

УДК 536.2, 536.3, 537.63

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ЕСТЕСТВЕННОМ КОНВЕКТИВНОМ ПОТОКЕ ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО КОНУСА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Е. Тандапани, А. Р. Рагаван*, Дж. Палани*

Институт современных исследований в математике им. Рамануджана
Университета Мадраса, 600005 Ченнай, Тамилнад, Индия

* Правительственный колледж искусств, 600039 Ченнай, Тамилнад, Индия

E-mail: gpalani32@yahoo.co.in

Изучены характеристики теплопереноса естественной конвекции вблизи вертикального конуса при воздействии магнитного поля и теплового излучения. Поверхность конуса подвержена воздействию переменного температурного поля. Жидкость считается серой поглощающей, но нерассеивающей средой. С использованием безразмерных величин, соответствующих режиму конвекции, уравнения пограничного слоя приведены к безразмерному виду и решены с помощью неявного конечно-разностного метода типа метода Кранка — Николсона, быстро сходящегося и безусловно устойчивого. Для различных значений параметров задачи вычислены скорость, температура, локальное и среднее значения поверхностного трения, локальное и среднее числа Нуссельта. Результаты вычислений представлены в виде графиков. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с известными данными.

Ключевые слова: вертикальный конус, вершина конуса, магнитная гидродинамика, излучение, конечные разности, поверхностное трение.

Введение. Экспериментальные и численные исследования естественной конвекции, обусловленной влиянием подъемных сил и наличием температурной диффузии, проводились во многих работах. Как известно, естественная конвекция, имеющая место в природе, лабораторных экспериментах, геофизике, океанографии, процессах сушки, при отвердевании бинарных сплавов, в электронных охлаждающих устройствах, сопровождается неустойчивостью. В ряде работ получены автомодельные решения двумерных осесимметричных задач естественной конвекции в ламинарном потоке при установившемся обтекании вертикального конуса. В [1, 2] найдены общие соотношения для изотермического осесимметричного автомодельного решения и показано, что такое решение существует в стационарной задаче для вертикального конуса. В работе [3] получены автомодельные решения для изотермических осесимметричных тел (конуса, заостренного параболоида, затупленных плоских тел) с закрытым нижним концом и с помощью интегральных методов

Работа выполнена при финансовой поддержке Университетской комиссии по грантам (Нью Дельфи, Индия) и в рамках основного проекта (F.N 38-224/2009(SR)).

изучен теплоперенос в широком диапазоне чисел Прандтля. В [3] также представлены результаты численного интегрирования дифференциальных уравнений при числе Прандтля $Pr = 0,72$ и сделан вывод, что при малых числах Прандтля форма тела оказывает наиболее существенное влияние на теплоперенос.

В [4] показано, что в задаче об установившейся свободной конвекции при обтекании вертикального конуса с переменной температурой его поверхности, изменяющейся по степенному закону в зависимости от расстояния от вершины, существуют автомодельные решения. Для изотермической поверхности и поверхности, температура которой меняется по линейному закону, получены численные решения преобразованных уравнений пограничного слоя при $Pr = 0,7$. Отмечено, что в случае изотермической поверхности скорость и температура на 22 % превышают значения этих параметров в случае линейного распределения температуры по поверхности конуса.

В работе [5] задача, рассмотренная в [4], обобщена на случай малых чисел Прандтля, найдены численные решения для жидких металлов. На основе полученных результатов сделан вывод о том, что при малых числах Прандтля толщина пограничного слоя больше. В [6] показано, что в случае обтекания изотермической вертикальной пластины воздухом ($Pr = 0,733$) толщина пограничного слоя приблизительно в 14,5 раза меньше, чем в случае обтекания ее жидким натрием ($Pr = 0,003$). В работе [7] результаты, полученные в [4], обобщены на случай больших чисел Прандтля, найдены выражения для локального поверхностного трения и локального числа Нуссельта.

В [8] проведен анализ влияния поперечной кривизны на осесимметричную свободную конвекцию в пограничном слое воды, температура которой равна $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, в случае обтекания тонкого вертикального конуса. Отмечено, что с увеличением поперечной кривизны скорость теплопередачи увеличивается. В [9] решена неавтомодельная задача о свободной конвекции в пограничном слое в случае обтекания конуса с постоянной температурой стенок при наличии равномерного вдува (отсоса) и представлены результаты численных расчетов при различных значениях параметра вдува (отсоса) и угла раствора конуса.

В [10] исследовалось влияние теплофизических величин на установившуюся свободную конвекцию при обтекании газом изотермического вертикального конуса. При этом предполагалось, что с изменением абсолютной температуры теплопроводность, динамическая вязкость и удельная теплоемкость при постоянном давлении изменяются по степенному закону. В [10] также сделан вывод, что при наличии отсоса теплоотдача увеличивается, а при наличии вдува уменьшается. В [11] изучена неустановившаяся ламинарная свободная конвекция в вязкой несжимаемой жидкости при обтекании неизотермического вертикального конуса. Безразмерные определяющие уравнения решены с помощью неявного метода конечных разностей.

Интерес к исследованию ламинарной свободной конвекции в пограничном слое электропроводящей жидкости при наличии магнитного поля обусловлен ее применением в промышленности и технологических процессах (экструзия пластмасс при изготовлении вискозы и нейлона, очистка сырой нефти, обработка материалов магнитными полями, производство стекла, бумажная промышленность, различные геофизические процессы и т. д.). Конвекция при наличии магнитного поля имеет большое значение в различных промышленных процессах, например при использовании магнитного поля для контроля потоков расплавленного железа в сталелитейной промышленности и охлаждения металла потоком жидкости в ядерных реакторах.

Свободная конвекция теплового потока при одновременном воздействии сил плавучести и магнитного поля исследовалась в [12]. Показано, что магнитное поле оказывает существенное влияние на свободную конвекцию теплового потока в жидком металле. Взаимодействие теплового излучения и свободной тепловой конвекции изучалось в [13].

В [14] рассмотрен асимметричный поток вязкой электропроводящей жидкости перед застойной областью двумерного тела и при обтекании растягивающейся поверхности при наличии магнитного поля в случае, когда внешний поток или растяжение поверхности возникают внезапно из состояния покоя. В [15] численно исследована нестационарная смешанная конвекция при наличии поперечного магнитного поля вблизи вращающегося вертикального конуса в случае, когда скорость вращения зависит от времени.

Анализ нестационарной ламинарной смешанной конвекции при наличии магнитного поля вблизи вращающейся сферы выполнен в [16]. В [17] проведен численный анализ нестационарных ламинарных потоков тепла и массы вблизи вертикального вращающегося конуса при наличии магнитного поля и с учетом эффектов поглощения. Ламинарная свободная конвекция при наличии поперечного магнитного поля в пограничном слое вблизи нагретого заостренного конуса, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии, изучена в [18] с использованием автомодельных переменных.

При исследовании полей излучения в потоках жидкости (радиационная гидродинамика) необходимо проводить очень сложные вычисления астрофизических потоков. Радиационный нагрев можно трактовать как предельный случай потока фотонов с очень малой длиной свободного пробега (оптически толстые среды) либо как поток фотонов с очень большой длиной свободного пробега (оптически тонкие среды). Наличие тепловой радиации при высокой температуре оказывает влияние на распределение температуры в пограничном слое и как следствие на теплоперенос в стенке.

Радиационные потоки встречаются в различных технологических процессах и процессах, происходящих в окружающей среде, например при нагреве и охлаждении помещений, при сжигании природного топлива, при испарении с поверхности больших водных резервуаров, в астрофизических потоках, в технологиях использования солнечной энергии. В работе [19] рассматривалось радиационное конвективное течение оптически тонкого серого газа вблизи полубесконечной вертикальной пластины. Влияние радиации на смешанную конвекцию вдоль изотермической вертикальной пластины исследовано в [20]. В [21] изучены тепловая радиация и свободная конвекция в потоке вблизи движущейся вертикальной пластины. В [22] с помощью преобразования Лапласа исследовалось влияние радиации на поток вблизи вертикальной пластины с переменной температурой, движение которой начинается внезапно. Магнитогидродинамический поток вблизи пластины при наличии радиации изучен в [23]. Получено аналитическое решение для средней температуры, скорости и магнитного поля, исследовано влияние радиации на распределение температуры. В рамках модели диффузии Росселанда в [24] численно исследовано влияние радиации на смешанную конвекцию вблизи изотермического конуса, находящегося в пористой среде.

В [25] изучалось совместное влияние тепловой радиации, теплопроводности, числа Рейнольдса и объемных сил, не удовлетворяющих закону Дарси (сил Форшмайера и сил сопротивления Бринкмана), на установившееся ламинарное течение в пограничном слое вблизи вертикальной поверхности, находящейся в идеализированной геологической пористой среде.

Влияние радиации на свободную конвекцию и перенос массы вблизи вертикального изотермического конуса с учетом химической реакции при наличии магнитного поля исследовано в [26] с использованием автомодельных переменных. Влияние тепловой радиации и сил сопротивления на естественную конвекцию и перенос массы в потоке вязкой несжимаемой серой поглощающей излучение жидкости вблизи внезапно начинающей движение пластины, примыкающей к пористой среде, не описываемой законом Дарси, изучалось в [27]. В [28] исследовано влияние радиации на неустановившийся магнитогидродинамический поток вблизи полубесконечной вертикальной пористой пластины при наличии поперечного однородного магнитного поля.

Однако влияние магнитного поля и тепловой радиации на естественную конвекцию вблизи вертикального конуса с переменной температурой поверхности осталось неизученным. Целью настоящей работы является исследование совместного воздействия магнитного поля и тепловой радиации на свободную конвекцию в потоке сжимаемой вязкой электропроводящей жидкости вблизи полубесконечного вертикального конуса с переменной температурой поверхности. Жидкость рассматривается как серая поглощающая, но нерассеивающая среда. При описании радиационного теплового потока тепла в уравнении энергии используется аппроксимация Росселанда. Система безразмерных управляющих уравнений решена методом конечных разностей.

1. Основные уравнения и математический анализ задачи. В данном пункте приводится математическая формулировка двумерной задачи об установившейся ламинарной конвекции в потоке вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости вблизи вертикального конуса с переменной температурой его поверхности ($T_w'(x) = T_\infty' + ax^n$) при наличии поперечного магнитного поля и тепловой радиации.

Исследование задачи проводится при следующих допущениях:

- рассматривается вертикальный конус с локальным радиусом r и полууглом раствора φ , помещенный в покоящуюся жидкость с температурой T_∞' ;
- координата x измеряется вдоль поверхности конуса от вершины ($x = 0$), координата y — вдоль внешней нормали к поверхности конуса (рис. 1);
- ускорение свободного падения g направлено вниз;
- первоначально ($t' \leq 0$) температура поверхности конуса и окружающей жидкости была равна T_∞' ; при $t' > 0$ температура конуса T_∞' внезапно изменяется до температуры $T_w'(x) = T_\infty' + ax^n$ (n — константа) и затем поддерживается постоянной;
- в уравнении энергии вязкой диссипацией пренебрегается;
- однородное поперечное магнитное поле действует по нормали к поверхности конуса;
- сила взаимодействия индуцированного магнитного поля и потока пренебрежимо мала по сравнению с силой взаимодействия приложенного магнитного поля и потока;
- тепловое излучение представляет собой одномерный поток q_r в направлении y (по нормали к поверхности конуса);
- радиационный поток тепла в направлении x пренебрежимо мал по сравнению с потоком в направлении y ;
- жидкость рассматривается как серая поглощающая, но нерассеивающая среда;

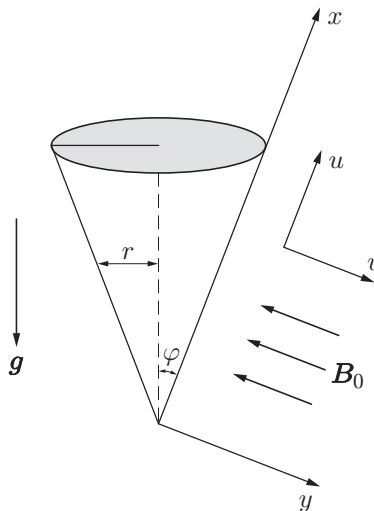


Рис. 1. Схема течения и система координат

— в уравнении энергии для радиационного потока тепла принимается аппроксимация Росселанда;

— все характеристики жидкости считаются постоянными, в выражении для объемных сил учитывается только зависимость плотности от температуры, что имеет большое значение в случае свободной конвекции.

Уравнения, описывающие магнитное поле, представляют собой обычные уравнения теории электромагнетизма и магнитной гидродинамики. При этом учитывается взаимодействие потока и магнитного поля. В большинстве задач, в которых присутствуют проводники, токами смещения Максвелла пренебрегается. Таким образом, считается, что электрический ток течет в замкнутом контуре. В предположении, что скорость потока мала по сравнению со скоростью света (пренебрегается релятивистскими эффектами), систему уравнений Максвелла и закон Ома можно записать в виде [28, 29]

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J}, & \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{J} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости; \mathbf{E} — интенсивность электрического поля; \mathbf{B} — интенсивность магнитного поля; μ — проницаемость магнитного поля; \mathbf{J} — интенсивность электрического тока; σ — электропроводность.

В уравнение движения добавляется объемная сила $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ — сила, приходящаяся на единицу объема. Эта сила (сила Лоренца) обусловлена взаимодействием магнитного поля и потока жидкости.

Магнитным полем, индуцированным вследствие движения электропроводящей жидкости, пренебрегается. Это допущение справедливо при малых числах Рейнольдса. В частности, числа Рейнольдса малы во многих инженерных задачах, например в тех случаях, когда проводимость невелика, внешнее поле отсутствует или можно пренебречь эффектами поляризации в ионизированном газе. Принимается, что $\mathbf{E} = 0$ (отсутствует конвекция вне пограничного слоя: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ и $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$, следовательно, $\mathbf{E} = 0$).

Таким образом, выражение для силы Лоренца принимает вид $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$. Далее индуцированное магнитное поле не учитывается. Это справедливо в случае малых магнитных чисел Рейнольдса Re_m . Поэтому, для того чтобы получить лучшую аппроксимацию, было принято следующее выражение для силы Лоренца: $\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = -\sigma B_0^2 \mathbf{u}$.

Пренебрегая вязкостью, градиентом давления, магнитной диссипацией и принимая приближение Буссинеска, уравнения пограничного слоя с учетом (1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T' - T'_\infty) \cos \varphi + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u;$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} - \frac{\partial q_r}{\partial y}. \quad (3)$$

В уравнении энергии выражение для члена $\partial q_r / \partial y$, соответствующего потоку тепловой радиации, упрощается, если принять приближение Росселанда [30]:

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*} \frac{\partial T'^4}{\partial y}. \quad (4)$$

Начальные и краевые условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} t' \leq 0: & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty & \quad \forall x, y, \\ t' > 0: & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T'(x) = T'_\infty + ax^n & \quad \text{при } y = 0, \\ & \quad u = 0, \quad T' = T'_\infty & \quad \text{при } x = 0, \\ & \quad u \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T'_\infty & \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следует отметить, что аппроксимация Росселанда ограничивает анализ задачи оптически толстыми потоками. Если разность температур $T' - T'_\infty$ внутри потока достаточно мала, то уравнение (4) может быть линеаризовано с использованием разложения Тейлора для T'^4 в окрестности значения T'_∞ . Пренебрегая членами высшего порядка, получаем

$$T'^4 \simeq 4T'^3_\infty T' - 3T'^4_\infty. \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (3), находим

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{16\sigma^* T'^3_\infty}{3k^*} \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}. \quad (6)$$

В (2)–(6) u, v — компоненты вектора скорости в направлениях x, y соответственно; T' — температура жидкости в пограничном слое; T'_∞ — температура вдали от поверхности конуса; t' — время; g — ускорение свободного падения; r — локальный радиус конуса; k — теплопроводность жидкости; β — температурный коэффициент объемного расширения; ρ — плотность; C_p — удельная теплоемкость; φ — полуугол раствора конуса; ν — кинематическая вязкость; B_0^2 — индукция магнитного поля; k^* — коэффициент поглощения; σ^* — константа Стефана — Больцмана.

Физическими величинами, представляющими интерес в данной задаче, являются локальное поверхностное трение τ_x и локальное число Нуссельта Nu_x , которые определяются следующими выражениями:

$$\tau_x = \rho\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad \text{Nu}_x = \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left(- \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Осредненные по поверхности конуса значения поверхностного трения $\bar{\tau}_L$ и коэффициента теплопереноса \bar{h} задаются выражениями

$$\bar{\tau}_L = \frac{2\rho\nu}{L^2} \int_0^L x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad \bar{h} = \frac{2k}{L^2} \int_0^L \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left(- \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0} dx.$$

Следовательно, среднее значение числа Нуссельта определяется по формуле

$$\overline{\text{Nu}}_L = \frac{L\bar{h}}{k} = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left(- \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=0} dx.$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L} \text{Gr}_L^{1/4}, \quad U = \frac{uL}{\nu} \text{Gr}_L^{-1/2}, \quad V = \frac{vL}{\nu} \text{Gr}_L^{-1/4}, \quad t = \frac{\nu t'}{L^2} \text{Gr}_L^{1/2}, \\ R = \frac{r}{L}, \quad T = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w(L) - T'_\infty}, \quad \text{Gr}_L = \frac{g\beta(T'_w(L) - T'_\infty)L^3 \cos \varphi}{\nu^2}, \\ \text{Pr} = \frac{\rho\nu C_p}{k}, \quad N = \frac{k^* k}{4\sigma^* T'^3_\infty}, \quad M = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\rho\nu} \text{Gr}_L^{-1/2}. \end{aligned}$$

Здесь Pr — число Прандтля для жидкости; M — параметр магнитного поля; N — параметр радиационной проводимости (параметр Росселанда или Старка); Gr_L — модифицированное число Грасгофа; L — характерная длина.

Пограничный слой остается достаточно тонким, поскольку его толщина увеличивается значительно медленнее локального радиуса конуса. Локальный радиус в точке пограничного слоя можно заменить радиусом поверхности конуса, а именно $r = x \sin \varphi$.

В безразмерных переменных уравнения (2), (6) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{U}{X} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= T + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - MU, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} &= \frac{1}{Pr} \frac{3N+4}{3N} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Начальные и краевые условия в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} t \leq 0: \quad U &= 0, \quad V = 0, \quad T = 0 \quad \forall X, Y, \\ t > 0: \quad U &= 0, \quad V = 0, \quad T = X^n \quad \text{при } Y = 0, \\ &U = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } X = 0, \\ &U \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражения для локальных поверхностного трения и числа Нуссельта в безразмерных переменных представляются в виде

$$\tau_X = Gr_L^{3/4} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0}, \quad Nu_X = -\frac{X}{T_{Y=0}} \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right)_{Y=0} Gr_L^{1/4}. \quad (9)$$

Осредненные по поверхности конуса значения поверхностного трения и коэффициента теплопереноса в безразмерных переменных задаются следующими выражениями:

$$\bar{\tau} = 2 Gr_L^{3/4} \int_0^1 X \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{Y=0} dX, \quad \bar{Nu} = -2 Gr_L^{1/4} \int_0^1 \frac{X}{T_{Y=0}} \left(\frac{\partial T}{\partial Y} \right)_{Y=0} dX. \quad (10)$$

2. Численный метод. Определяющая система уравнений (7) является связанной системой дифференциальных уравнений в частных производных. Эта система вместе с начальными и краевыми условиями (8) решалась численно с использованием неявной конечно-разностной схемы Кранка — Николсона. Уравнения (7), (8) имеют следующий конечно-разностный аналог:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{m+1} - U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i,j}^m - U_{i-1,j}^m + U_{i,j-1}^{m+1} - U_{i-1,j-1}^{m+1} + U_{i,j-1}^m - U_{i-1,j-1}^m}{4\Delta X} + \\ + \frac{V_{i,j}^{m+1} - V_{i,j-1}^{m+1} + V_{i,j}^m - V_{i,j-1}^m}{2\Delta Y} + \frac{U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j}^m + U_{i,j-1}^m}{4(i\Delta X)} = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{m+1} - U_{i,j}^m}{\Delta t} + U_{i,j}^m \frac{U_{i,j}^{m+1} - U_{i-1,j}^{m+1} + U_{i,j}^m - U_{i-1,j}^m}{2\Delta X} + \\ + V_{i,j}^m \frac{U_{i,j+1}^{m+1} - U_{i,j-1}^{m+1} + U_{i,j+1}^m - U_{i,j-1}^m}{4\Delta Y} = \frac{1}{2} [T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j}^m] + \\ + \frac{U_{i,j-1}^{m+1} - 2U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j+1}^{m+1} + U_{i,j-1}^m - 2U_{i,j}^m + U_{i,j+1}^m}{2(\Delta Y)^2} - M \frac{U_{i,j}^{m+1} + U_{i,j}^m}{2}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j}^m}{\Delta t} + U_{i,j}^m \frac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i-1,j}^{m+1} + T_{i,j}^m - T_{i-1,j}^m}{2\Delta X} + \\
& + V_{i,j}^m \frac{T_{i,j+1}^{m+1} - T_{i,j-1}^{m+1} + T_{i,j+1}^m - T_{i,j-1}^m}{4\Delta Y} = \\
& = \frac{1}{Pr} \frac{3N + 4}{3N} \frac{T_{i,j-1}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j+1}^{m+1} + T_{i,j-1}^m - 2T_{i,j}^m + T_{i,j+1}^m}{2(\Delta Y)^2}. \quad (13)
\end{aligned}$$

В качестве области интегрирования рассматривается прямоугольник со сторонами $X_{\max} = 1$ и $Y_{\max} = 14$, где Y_{\max} соответствует $Y = \infty$ — области, расположенной на значительном расстоянии от пограничного слоя. Значение $Y_{\max} = 14$ выбрано после проведения предварительных численных экспериментов, так чтобы выполнялись краевые условия (8). Выбор экономичной и эффективной с точки зрения вычислений сетки также проводился на основе результатов предварительных вычислений. В итоге была выбрана сетка размером 20×280 с шагами $\Delta X = 0,05$ и $\Delta Y = 0,05$. Шаг по времени выбран равным $\Delta t = 0,01$. В (11)–(13) нижние индексы i, j обозначают номер узла сетки в направлении координат X, Y соответственно, верхний индекс m обозначает номер шага по времени. На каждом шаге по времени величины $U_{i,j}^m$ и $V_{i,j}^m$ считаются постоянными. Значения величин U, V, T известны из начальных условий при $t = 0$ во всех узлах сетки. Вычисление величин U, V, T на временном шаге $m + 1$ по их значениям на предыдущем шаге производится следующим образом. Система конечно-разностных уравнений (13), записанная для каждого внутреннего узла с фиксированным индексом i , является системой с трехдиагональной матрицей. Эта система решается с использованием алгоритма Томаса [31]. В результате значения величины T находятся во всех узлах сетки с фиксированным индексом i на $(m + 1)$ -м временном слое. С использованием значений величины T на $(m + 1)$ -м временном слое аналогично вычисляется величина U на $(m + 1)$ -м временном слое. В результате находятся величины T и U в узлах с фиксированным индексом i . Затем вычисляется величина V на $(m + 1)$ -м временном слое с использованием уравнения (11), записанного для каждого узла с фиксированным индексом i . В результате находятся величины T, U, V во всех узлах сетки прямоугольной области на $(m + 1)$ -м временном слое.

Вычисления проводились до тех пор, пока не было достигнуто установившееся состояние. Считалось, что установившееся состояние достигнуто, если во всех узлах сетки абсолютное значение разности величин U и T на двух последовательных временных шагах оказывалось меньше 10^{-5} .

Для вычисления производных в уравнениях (9), (10) использовался пятиточечный шаблон, интегралы вычислялись с использованием формулы Ньютона — Котеса.

3. Устойчивость и сходимость конечно-разностной схемы. Исследование устойчивости конечно-разностной схемы на расчетной сетке фиксированных размеров проводится с использованием техники Фон Неймана [31]. Общий член разложения Фурье для величин U и T в момент времени $t = 0$ принимается в виде $e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}$ ($i = \sqrt{-1}$). В последующие моменты времени t эти члены имеют следующий вид:

$$U = F(t) e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}, \quad T = G(t) e^{i\alpha X} e^{i\beta Y}. \quad (14)$$

Полагая, что коэффициенты U, T постоянны на каждом временном шаге, обозначая их значения на следующем шаге через F', G' и подставляя (14) в уравнения (12), (13), после ряда упрощений получаем

$$\begin{aligned} \frac{F' - F}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(F' + F)(1 - e^{-i\alpha\Delta X})}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(F' + F)i \sin \beta\Delta Y}{\Delta Y} = \\ = \frac{G' + G}{2} + \frac{(F' + F)(\cos \beta\Delta Y - 1)}{(\Delta Y)^2} - \frac{M}{2} (F' + F), \\ \frac{G' - G}{\Delta t} + \frac{U}{2} \frac{(G' + G)(1 - e^{-i\alpha\Delta X})}{\Delta X} + \frac{V}{2} \frac{(G' + G)i \sin \beta\Delta Y}{\Delta Y} = \\ = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{N + 4}{3N} \frac{(G' + G)(\cos \beta\Delta Y - 1)}{(\Delta Y)^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) можно записать в виде

$$(1 + A)F' = (1 - A)F + (G' + G)\Delta t/2; \quad (16)$$

$$(1 + B)G' = (1 - B)G, \quad (17)$$

где

$$A = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - e^{-i\alpha\Delta X}) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta\Delta Y) - (\cos \beta\Delta Y - 1) \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2} + \frac{\Delta t}{2} M,$$

$$B = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X} (1 - e^{-i\alpha\Delta X}) + \frac{V}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y} i \sin(\beta\Delta Y) - \frac{\cos \beta\Delta Y - 1}{\text{Pr}} \frac{3N + 4}{3N} \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2}.$$

Исключив G' из уравнения (16) с помощью уравнения (17), получаем разрешающее уравнение

$$(1 + A)F' = (1 - A)F + G(1 + B)^{-1}\Delta t. \quad (18)$$

Уравнения (17), (18) можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} F' \\ G' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - A)/(1 + A) & D_1 \\ 0 & (1 - B)/(1 + B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $D_1 = \Delta t/[(1 + A)(1 + B)]$.

Для того чтобы конечно-разностная схема была устойчивой, модуль любого собственного значения матрицы не должен превышать единицу. Поскольку матрица уравнения (19) является треугольной, ее собственными значениями являются диагональные элементы, т. е. $(1 - A)/(1 + A)$ и $(1 - B)/(1 + B)$. В предположении, что величина U неотрицательна, а величина V неположительна, получаем

$$A = 2a \sin^2(\alpha\Delta X/2) + 2c \sin^2(\beta\Delta Y/2) + i(a \sin \alpha\Delta X - b \sin \beta\Delta Y) + (M/2)\Delta t,$$

где

$$a = \frac{U}{2} \frac{\Delta t}{\Delta X}, \quad b = \frac{|V|}{2} \frac{\Delta t}{\Delta Y}, \quad c = \frac{\Delta t}{(\Delta Y)^2}.$$

Так как вещественная часть $A \geq 0$, то всегда $|(1 - A)/(1 + A)| \leq 1$. Аналогично $|(1 - B)/(1 + B)| \leq 1$. Следовательно, конечно-разностная схема является безусловно устойчивой. Локальная ошибка усечения есть $O(\Delta t^2 + \Delta Y^2 + \Delta X)$ и стремится к нулю, когда Δt , ΔX , ΔY стремятся к нулю. Таким образом, схема является совместной. Из устойчивости и совместности следует сходимость схемы.

4. Результаты расчетов и их обсуждение. Результаты численных расчетов, выполненных в настоящей работе в случае установившегося состояния при $X = 1,0$, $\text{Pr} = 0,7$ для $n = 0, 1$, сравнивались с известными аналогичными результатами. На рис. 2 показаны распределения скорости и температуры в конусе в установившемся состоянии при

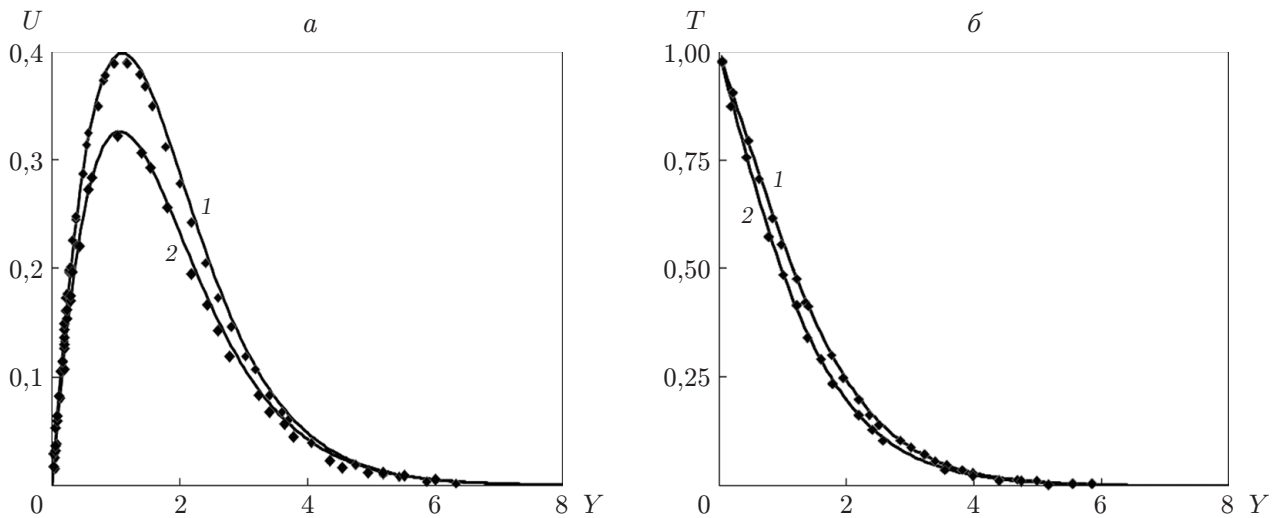


Рис. 2. Распределения скорости (а) и температуры (б) по координате Y в установившемся режиме при $X = 1$, $Pr = 0,7$, $M = 0$, $N = 0$:
 сплошные линии — данные настоящей работы, точки — данные работы [4]; 1 — $n = 0$,
 2 — $n = 1$

переменной температуре его поверхности ($n = 1$ — линейное распределение температуры, $n = 0$ — изотермическая поверхность). Видно, что результаты хорошо согласуются.

В табл. 1, 2 приведены значения локального поверхностного трения и локального числа Нуссельта при различных значениях числа Прандтля и экспоненты n . Из табл. 1, 2 следует, что при малых значениях n приведенные результаты хорошо согласуются. Небольшое различие имеет место при больших значениях экспоненты n , причем с увеличением n это различие увеличивается.

На рис. 3 приведены распределения скорости и температуры в установившемся режиме при различных значениях X . Видно, что и скорость, и температура существенно увеличиваются при увеличении X и уменьшаются при увеличении n .

На рис. 4, 5 представлены распределения скорости и температуры на передней кромке конуса ($X = 1$) при различных значениях числа Прандтля Pr и экспоненты n . Видно, что скорость и температура потока увеличиваются со временем, достигают максимума, а затем постепенно уменьшаются, до тех пор пока не будет достигнуто установившееся состояние. С увеличением числа Прандтля Pr или экспоненты n скорость и температура в установившемся режиме уменьшаются. Для воздуха ($Pr = 0,71$) градиент скорости всегда меньше, чем для воды ($Pr = 7,0$). Это очевидно с физической точки зрения, поскольку увеличение числа Прандтля приводит к увеличению вязкости жидкости, что в свою очередь обуславливает увеличение толщины потока и, следовательно, уменьшение скорости потока. Распределение температуры существенно зависит от числа Прандтля: с увеличением числа Прандтля температура уменьшается. Этот результат находится в соответствии со следующим физическим фактом: с увеличением числа Прандтля толщина температурного пограничного слоя уменьшается. Также можно заметить, что с увеличением числа Прандтля время, необходимое для достижения установившегося режима, увеличивается, а толщина температурного пограничного слоя уменьшается. С увеличением n движущие силы уменьшаются вдоль поверхности конуса вблизи его вершины. Вследствие этого при равномерном распределении температуры по поверхности конуса наблюдается существенное различие между достигнутым максимумом и значением в установившемся режиме. В случае неравномерного распределения температуры с увеличением n это различие по-

Таблица 1

Локальное поверхностное трение в установившемся состоянии при $X = 1$
в случае переменной температуры поверхности конуса ($N = 0, M = 0$)

n	Pr = 0,03		Pr = 0,1		Pr = 0,7		Pr = 1,0	
	Данные [5]	Данные настоящей работы	Данные [5]	Данные настоящей работы	Данные [5]	Данные настоящей работы	Данные [5]	Данные настоящей работы
0	1,2444	1,241 46	1,0960	1,101 89	0,8195	0,825 66	0,7694	0,775 24
0,2	1,1999	1,195 45	1,0603	1,065 27	0,7959	0,801 32	0,7475	0,752 65
1	1,0693	1,064 04	0,9545	0,958 23	0,7248	0,729 35	0,6815	0,685 87
2	0,9668	0,964 45	0,8693	0,873 65	0,6661	0,670 50	0,6270	0,631 14
4	0,8473	0,851 81	0,7668	0,774 86	0,5937	0,600 24	0,5596	0,565 64
8	0,7269	0,742 46	0,6612	0,677 04	0,5164	0,528 14	0,4872	0,498 18

Таблица 2

Локальное число Нуссельта в установившемся состоянии при $X = 1$
в случае переменной температуры поверхности конуса ($N = 0, M = 0$)

n	Pr = 0,03		Pr = 0,1		Pr = 0,7		Pr = 1,0	
	Данные [5]	Данные настоящей работы	Данные [5]	Данные настоящей работы	Данные [5]	Данные настоящей работы	Данные [5]	Данные настоящей работы
0	0,1244	0,127 41	0,2113	0,209 49	0,4511	0,447 71	0,5104	0,506 70
0,2	0,1338	0,136 76	0,2263	0,225 09	0,4794	0,476 97	0,5148	0,539 00
1	0,1631	0,163 42	0,2739	0,272 06	0,5670	0,564 62	0,6389	0,636 04
2	0,1886	0,188 30	0,3136	0,311 11	0,6436	0,638 63	0,7240	0,718 28
4	0,2229	0,218 47	0,3684	0,361 01	0,7484	0,735 51	0,8406	0,826 30
8	0,2655	0,252 70	0,4367	0,417 55	0,8810	0,847 60	0,9889	0,951 83

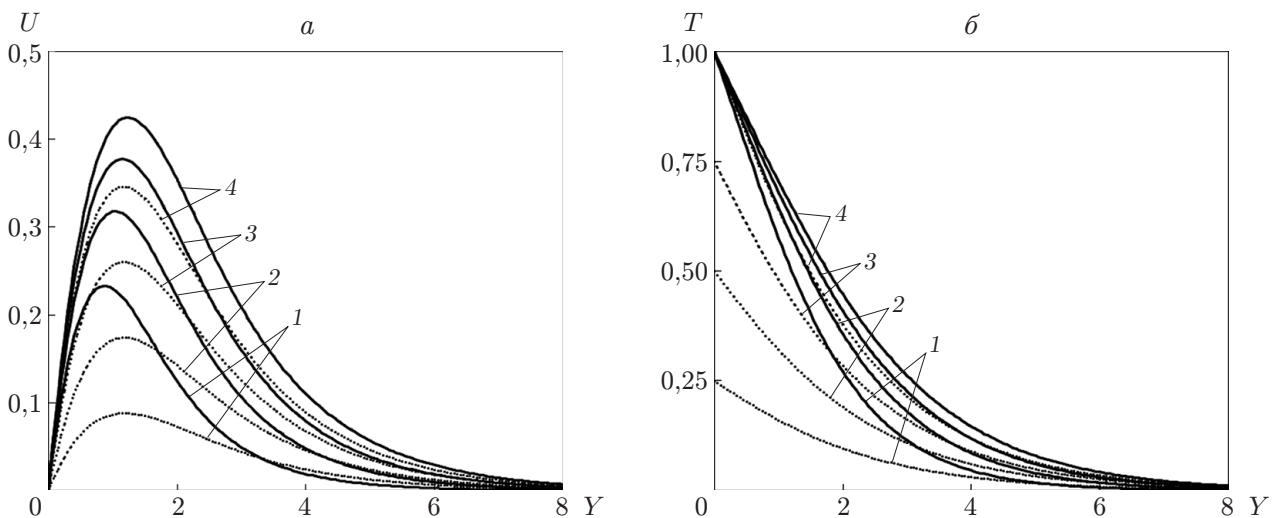


Рис. 3. Распределения скорости (а) и температуры (б) по координате Y в установившемся режиме при $Pr = 0,71, M = 0,5, N = 1$:
сплошные линии — $n = 0$, пунктирные — $n = 1$; 1 — $X = 0,25$, 2 — $X = 0,5$, 3 — $X = 0,75$, 4 — $X = 1$

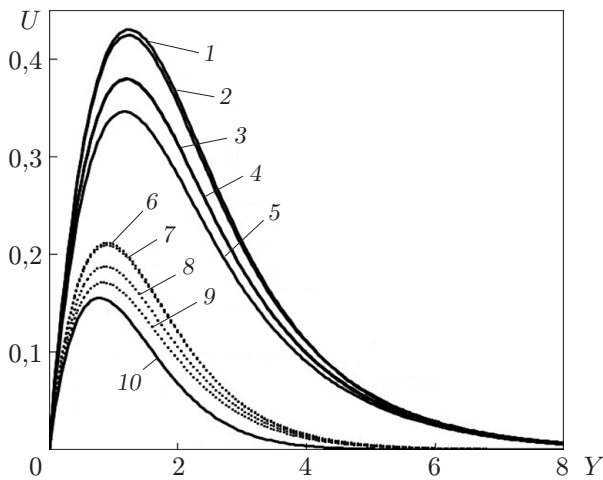


Рис. 4

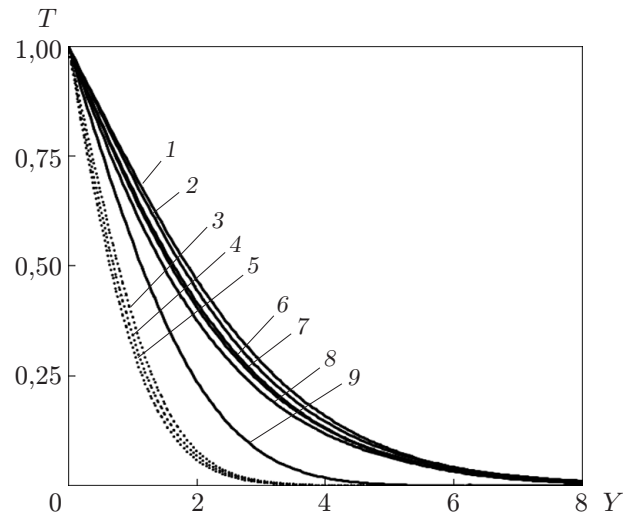


Рис. 5

Рис. 4. Распределение скорости по координате Y при $X = 1$, $M = 0,5$, $N = 1$ в различные моменты времени при различных значениях Pr :

сплошные линии — $Pr = 0,71$, пунктирные — $Pr = 7$; 1, 2, 6, 7, 10 — $n = 0$ (1 — $t = 2,46$, 2 — $t = 3,98$ (установившийся режим), 6 — $t = 3,97$, 7 — $t = 5,24$ (установившийся режим), 10 — $t = 0,50$), 3, 4, 8 — $n = 0,5$ (3 — $t = 3,20$, 4 — $t = 4,23$ (установившийся режим), 8 — $t = 5,57$ (установившийся режим)), 5, 9 — $n = 1$ (5 — $t = 4,64$ (установившийся режим), 9 — $t = 5,59$ (установившийся режим))

Рис. 5. Распределение температуры по координате Y при $X = 1$, $M = 0,5$, $N = 1$ в различные моменты времени при различных значениях Pr :

сплошные линии — $Pr = 0,71$, пунктирные — $Pr = 7$; 1, 2, 3, 9 — $n = 0$ (1 — $t = 1,93$, 2 — $t = 3,98$ (установившийся режим), 3 — $t = 5,24$ (установившийся режим), 9 — $t = 0,45$), 4, 6, 7 — $n = 0,5$ (4 — $t = 5,57$ (установившийся режим), 6 — $t = 1,83$, 7 — $t = 4,23$ (установившийся режим)), 5, 8 — $n = 1$ (5 — $t = 5,59$ (установившийся режим), 8 — $t = 4,64$ (установившийся режим))

степенно уменьшается. Однако при больших значениях n указанное различие отсутствует. Кроме того, время, необходимое для достижения установившегося состояния, увеличивается с увеличением n .

На рис. 6, 7 приведены распределения скорости и температуры вдоль координаты Y для воздуха ($Pr = 0,71$) при $X = 1$ и различных значениях магнитного параметра M и параметра излучения N . Эти распределения найдены численно из уравнений (12), (13). На рис. 6, 7 видно, что с увеличением магнитного параметра M время, необходимое для достижения установившегося режима, увеличивается. С увеличением M различие между достигнутыми максимальными значениями и соответствующими значениями в установившемся режиме уменьшается. При больших значениях M максимум отсутствует. Воздействие поперечного магнитного поля на электрическую проводимость приводит к увеличению силы сопротивления Лоренца. Наличие этой силы обуславливает замедление движения жидкости и увеличение ее температуры. С увеличением параметра N температура уменьшается. Этот эффект предсказуем, поскольку наличие излучения приводит к уменьшению скорости поступления энергии к жидкости, в результате чего уменьшается температура жидкости. Также на рис. 6, 7 видно, что с увеличением параметра N скорость потока воздуха уменьшается.

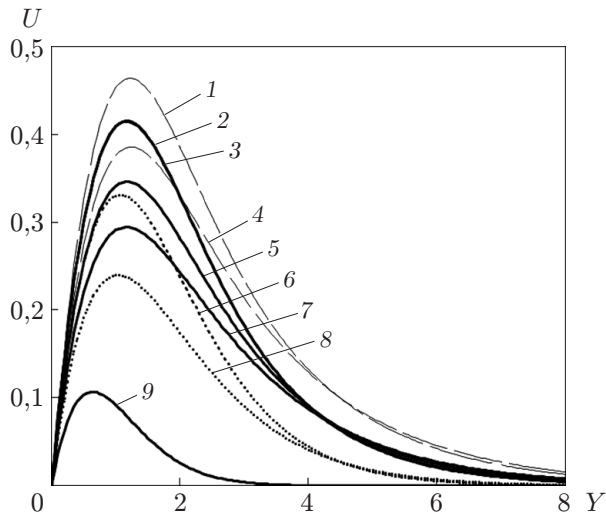


Рис. 6

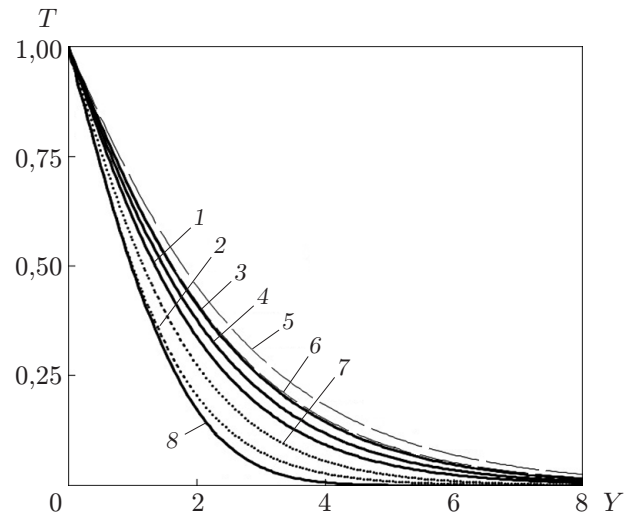


Рис. 7

Рис. 6. Распределение скорости по координате Y при $X = 1$, $Pr = 0,71$, $n = 1$ в различные моменты времени при различных значениях параметров N и M :

сплошные линии — $N = 1$, пунктирные — $N = 30$, штриховые — $N = 0,5$; 1, 2, 3, 6, 9 — $M = 0$ (1 — $t = 4,50$ (установившийся режим), 2 — $t = 3,56$, 3 — $t = 4,60$ (установившийся режим), 6 — $t = 5,01$ (установившийся режим), 9 — $t = 0,32$), 4, 5 — $M = 0,5$ (4 — $t = 4,36$ (установившийся режим), 5 — $t = 4,64$ (установившийся режим)), 7, 8 — $M = 1$ (7 — $t = 5,20$ (установившийся режим), 8 — $t = 5,32$ (установившийся режим))

Рис. 7. Распределение температуры по координате Y при $X = 1$, $Pr = 0,71$, $n = 1$ в различные моменты времени при различных значениях параметров N и M :

сплошные линии — $N = 1$, пунктирные — $N = 30$, штриховые — $N = 0,5$; 1-3 — $M = 0$ (1 — $t = 4,60$ (установившийся режим), 2 — $t = 5,01$ (установившийся режим), 3 — $t = 4,50$ (установившийся режим)), 4, 5 — $M = 0,5$ (4 — $t = 4,64$ (установившийся режим), 5 — $t = 4,36$ (установившийся режим)), 6-8 — $M = 1$ (6 — $t = 5,20$ (установившийся режим), 7 — $t = 5,32$ (установившийся режим), 8 — $t = 0,34$)

При решении задач теплопереноса большое значение имеет изучение влияния различных параметров как на локальное, так и на среднее значение сдвигающих напряжений, а также на скорость потока тепла. На рис. 8 представлены зависимости локального поверхностного трения и числа Нуссельта от различных параметров задачи. Эти зависимости получены в результате численного решения уравнения (9). Видно, что с увеличением n локальное поверхностное трение уменьшается. Наиболее существенно этот эффект проявляется вблизи вершины конуса ($X = 0$), а по мере удаления от вершины постепенно ослабевает. С увеличением n вблизи вершины конуса ($X = 0$) локальное число Нуссельта уменьшается. Однако по мере удаления от вершины эта тенденция постепенно меняется, и в результате проявляется противоположный эффект. Видно, что с увеличением числа Прандтля локальное поверхностное трение уменьшается. Зависимость скорости теплопереноса от числа Прандтля сильнее зависимостей ее от других параметров, так как с уменьшением числа Прандтля толщина температурного слоя увеличивается. Большие значения числа Нуссельта соответствуют большим значениям числа Прандтля. С увеличением M и N локальные сдвиговые напряжения на стенке уменьшаются. Локальная скорость теплопереноса уменьшается с увеличением M и увеличивается с увеличением N .

На рис. 9, 10 представлены зависимости средних значений поверхностного трения и числа Нуссельта от параметров Pr , n , N , M . На рис. 9 видно, что с уменьшением экс-

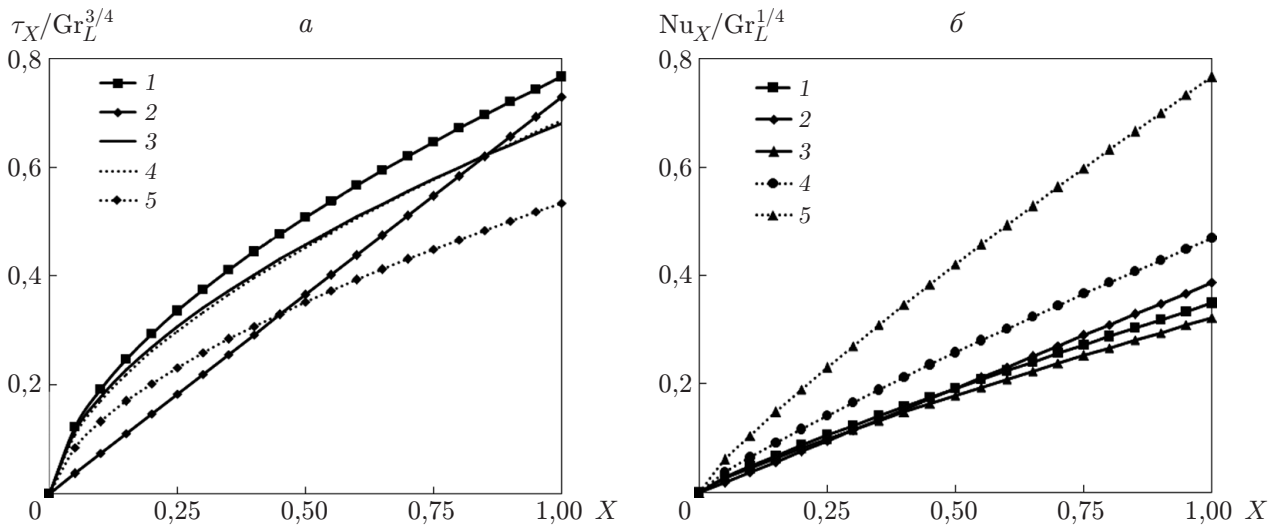


Рис. 8. Распределения локального поверхностного трения (а) и локального числа Нуссельта (б) по координате X при различных значениях числа Прандтля и параметров N, M :

1–4 — $Pr = 0,71$ (1 — $n = 0,5, N = 1, M = 0,5$; 2 — $n = 1, N = 1, M = 0,5$; 3 — $n = 0,5, N = 1, M = 1$; 4 — $n = 0,5, N = 30, M = 0,5$); 5 — $Pr = 7, n = 0,5, N = 1, M = 0,5$

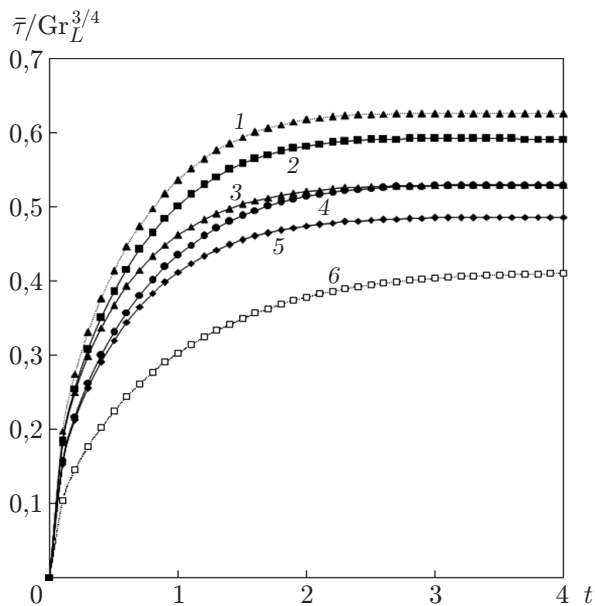


Рис. 9

Рис. 9. Зависимость среднего поверхностного трения от времени при различных значениях числа Прандтля и параметров N, M :

1–5 — $Pr = 0,71$ (1 — $n = 0,5, N = 0,5, M = 0,5$; 2 — $n = 0,5, N = 1, M = 0,5$; 3 — $n = 0,5, N = 1, M = 1$; 4 — $n = 0,5, N = 30, M = 0,5$; 5 — $n = 1, N = 1, M = 0,5$), 6 — $Pr = 7, n = 0,5, N = 1, M = 0,5$

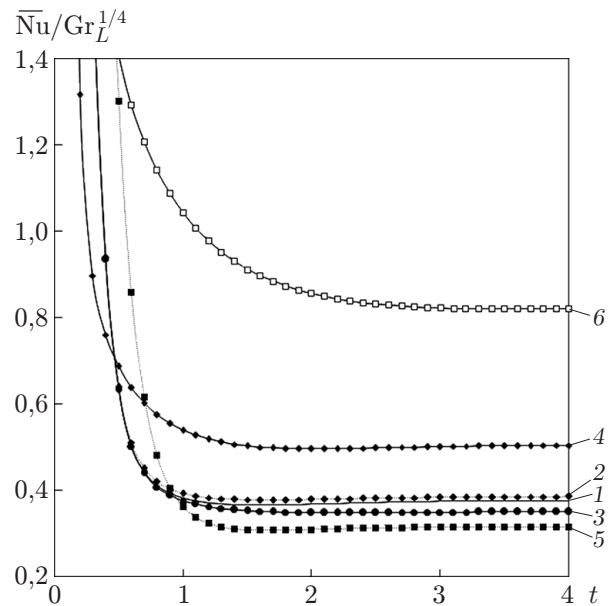


Рис. 10

Рис. 10. Зависимость среднего числа Нуссельта от времени при различных значениях числа Прандтля и параметров N, M :

1–5 — $Pr = 0,71$ (1 — $n = 0,5, N = 1, M = 0,5$; 2 — $n = 1, N = 1, M = 1$; 3 — $n = 0,5, N = 1, M = 1$; 4 — $n = 0,5, N = 30, M = 0,5$; 5 — $n = 0,5, N = 0,5, M = 0,5$), 6 — $Pr = 7, n = 0,5, N = 1, M = 0,5$

попенты n ее влияние на среднее значение поверхностного трения увеличивается. Также можно заметить, что для воздуха среднее значение поверхностного трения больше, чем для воды, поскольку скорость потока воздуха всегда больше скорости потока воды. Кроме того, с увеличением N и M среднее значение поверхностного трения уменьшается. На рис. 10 видно, что средние значения числа Нуссельта в начальный момент больше, чем в последующие моменты. В течение малого промежутка времени средние значения числа Нуссельта не зависят от различных параметров. Следовательно, на начальном этапе существенную роль играет только теплопроводность. С увеличением параметра M или n и с уменьшением параметра излучения N среднее значение числа Нуссельта уменьшается.

Заключение. Представлена математическая модель неустановившейся свободной конвекции теплопереноса вблизи вертикального конуса с учетом магнитогидродинамических эффектов и теплового излучения. Поверхность конуса подвержена неравномерному нагреву. Безразмерные уравнения пограничного слоя решены численно с использованием безусловно устойчивой сходящейся конечно-разностной схемы.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Увеличение интенсивности магнитного поля приводит к замедлению движения жидкости вдоль стенки конуса внутри пограничного слоя и увеличению температуры пограничного слоя.

Влияние экспоненты n на локальное поверхностное трение является наиболее существенным вблизи вершины конуса и по мере удаления от нее уменьшается.

С увеличением теплового излучения безразмерная температура уменьшается.

При наличии теплового излучения локальное и среднее значения поверхностного трения уменьшаются.

С увеличением n различие между достигнутым максимумом и соответствующим значением в установившемся состоянии увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Merk H. J., Prins J. A.** Thermal convection laminar boundary layer. 1 // Appl. Sci. Res. 1953. V. A4. P. 11–24.
2. **Merk H. J., Prins J. A.** Thermal convection laminar boundary layer. 2 // Appl. Sci. Res. 1954. V. A4. P. 195–206.
3. **Braun W. H., Ostrach S., Heighway J. E.** Free convection similarity flow about two-dimensional and axi-symmetric bodies with closed lower ends // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1961. V. 2. P. 121–135.
4. **Hering R. G., Grosh R. J.** Laminar free convection from a non-isothermal cone // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1962. V. 5. P. 1059–1068.
5. **Hering R. G.** Laminar free convection from a non-isothermal cone at low Prandtl numbers // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1965. V. 8. P. 1333–1337.
6. **Sparrow E. M., De Mello Luiz, Guinle F.** Deviation from classical free convection boundary layer theory at low Prandtl numbers // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1968. V. 11. P. 1403–1406.
7. **Roy S.** Free convection from a vertical cone at high Prandtl numbers // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1974. V. 96. P. 115–117.
8. **Gorla R. S. R., Startman R. A.** Natural convection boundary layer flow of water at 4 °C past slender cones // Intern. Commun. Heat Mass Transfer. 1986. V. 13. P. 403–411.
9. **Watanabe T.** Free convection boundary layer flow with uniform suction injection over a cone // Acta Mech. 1991. V. 87. P. 1–9.
10. **Takhar H. S., Chamkha A. J., Nath G.** Effect of thermophysical quantities on the natural convection flow of gases over a vertical cone // Intern. J. Engng Sci. 2004. V. 42. P. 243–256.
11. **Vapuji P. J., Ekambavannan K., Pop I.** Finite difference analysis of laminar free convection flow past a non isothermal vertical cone // Heat Mass Transfer. 2008. V. 44. P. 517–526.

12. **Sparrow E. M., Cess R. D.** The effect of a magnetic field on free convection heat transfer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1961. V. 3. P. 267–274.
13. **Cess R. D.** The interaction of thermal radiation with free convection heat transfer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1966. V. 9. P. 1269–1277.
14. **Kumari M., Nath G.** Development of two dimensional boundary layer with an applied magnetic field due to an impulsive motion // Indian J. Pure Appl. Math. 1999. V. 30. P. 695–708.
15. **Takhar H. S., Chamkha A. J., Nath G.** Unsteady mixed convection flow from a rotating vertical cone with magnetic field // Heat Mass Transfer. 2003. V. 39. P. 297–304.
16. **Ozturk A.** Unsteady laminar mixed convection about a spinning sphere with a magnetic field // Heat Mass Transfer. 2005. V. 41. P. 864–874.
17. **Chamkha A. J., Al-Mudhaf A.** Unsteady heat and mass transfer from a rotating vertical cone with a magnetic field and heat generation or absorption effects // Intern. J. Thermal Sci. 2005. V. 44. P. 267–276.
18. **Mehmet C. E.** Free convection flow about a vertical spinning cone under a magnetic field // Appl. Math. Comput. 2006. V. 179. P. 231–242.
19. **Soundalgekar V. M., Takhar H. S.** Radiation effects on free convection flow past a semi-infinite vertical plate // Modelling Measurement Control. 1993. V. B51. P. 31–40.
20. **Hossain M. A., Takhar H. S.** Radiation effects on mixed convection along a vertical plate with uniform surface temperature // Heat Mass Transfer. 1996. V. 31. P. 243–248.
21. **Raptis A., Perdikis C.** Radiation and free convection flow past a moving plate // Appl. Mech. Engng. 1999. V. 4. P. 817–821.
22. **Muthucumaraswamy R., Ganesan P.** Radiation effects on flow past an impulsively started infinite vertical plate with variable temperature // Intern. J. Appl. Mech. Engng. 2003. V. 8. P. 125–129.
23. **Raptis A., Massalas C. V.** Magneto hydrodynamic flow past a plate by the presence of radiation // Heat Mass Transfer. 1998. V. 34. P. 107–109.
24. **Yih K. A.** Radiation effects on mixed convection over an isothermal cone in porous media // Heat Mass Transfer. 2001. V. 37. P. 53–57.
25. **Takhar H. S., Beg O. A., Chamkha A. J., et al.** Mixed radiation-convection boundary layer flow of an optically dense fluid along a vertical flat plate in a non-Darcy porous medium // Intern. J. Appl. Mech. Engng. 2003. V. 8. P. 483–496.
26. **Ahmed A. A.** The effect of radiation on free convective flow and mass transfer past a vertical isothermal cone surface with chemical reaction in the presence of a transverse magnetic field // Canad. J. Phys. 2004. V. 82. P. 447–458.
27. **Anwar O. B., Zueco J., Takhar H. S., Beg T. A.** Network numerical simulation of impulsively-started transient radiation-convection heat and mass transfer in a saturated Darcy — Forchheimer porous medium // Nonlinear Anal.: Modelling Control. 2008. V. 13. P. 281–303.
28. **Abd El-Naby M. A., Elsayed M. E. Elbarbary, Nayed Y. Abd Elazem.** Finite difference solution of radiation on MHD unsteady free-convection flow over vertical porous plate // Appl. Math. Comput. 2004. V. 151. P. 327–246.
29. **Roming Mary F.** The influence of electric and magnetic fields on heat transfer to electrically conducting fluid // Advances in heat transfer. N. Y.: Acad. Press, 1964. P. 286–354.
30. **Brewster M. Q.** Thermal radiative transfer and properties. N. Y.: John Wiley and Sons, 1992.
31. **Carnahan B.** Applied numerical methods / B. Carnahan, H. A. Luther, J. O. Wilkes. N. Y.: John Wiley and Sons, 1969.

*Поступила в редакцию 30/IX 2010 г.,
в окончательном варианте — 1/IV 2011 г.*