В самом деле, пусть $\omega = \omega(q_1)$, тогда согласно (6), (7) будем иметь

$$H_1 = H_1(q_1), \qquad H_2 = Q_1(q_1)\, Q_2(q_2) \tag{12}$$

Отсюда для радиуса кривизны R_2 траекторий q_1=const имеем

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = \frac{1}{R_2(q_1)} = \text{const} \tag{13}$$

т. е. траектории будут концентрическими окружностями.

Заметим в заключение, что уравнения равновесия могут быть проинтегрированы и при любом другом условии текучести $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$.

Поступила 20 VIII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
2. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
3. Григорьев О. Д. К теории плоской деформации жестко-пластического тела. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Г. М. Заславский, С. С. Моисеев

(*Новосибирск*)

В работе [1] было показано, что учет конечности ларморовского радиуса приводит к стабилизации неоднородной плазмы относительно желобковых неустойчивостей. Так как перенос импульса связан с закручиванием частиц в магнитном поле, то учет конечности ларморовского радиуса может быть проделан для состояний плазмы, описываемых гидродинамическими уравнениями, путем введения тензора специфической магнитной «вязкости». На возможность использовать такие соображения авторам указал Л. И. Рудаков; эти же соображения были использованы в работе [2], где результат Розенблюта и других авторов был получен значительно проще из гидродинамических уравнений. Ниже показывается, что даже в однородной плазме учет магнитной вязкости приводит к стабилизации плазмы с анизотропным давлением.

Рассмотрим «бесстолкновительную» плазму в сильном магнитном поле H ($\omega_H \tau \gg 1$, ω_H — ларморовская частота ионов, τ — время столкновений). Как известно, такая плазма описывается системой уравнений [3]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0, \qquad \rho\frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\mathbf{H})\times\mathbf{H} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{H}), \qquad \frac{d}{dt}\frac{P_\parallel H^2}{\rho^3} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{P_\perp}{\rho H} = 0$$

Здесь $P_\parallel$ — давление вдоль магнитного поля, $P_\perp$ — давление поперек магнитного поля, $\boldsymbol{n}$ — орт вдоль магнитного поля, π_{ik}—тензор магнитной вязкости, P_{ik} — тензор давлений, равный

$$P_{ik} = P_\perp \delta_{ik} + (P_\parallel - P_\perp)\, n_i n_k \tag{2}$$

Тензор вязкости при условии $\omega_H \tau \gg 1$ имеет вид

$$\pi_{xx} = -\pi_{yy} = -\frac{1}{2\omega_H} w_{xy}, \quad \pi_{zz} = 0, \quad \pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{1}{4\omega_H}(w_{xx} - w_{yy}) \tag{3}$$

$$\pi_{xz} = \pi_{zx} = -\frac{1}{\omega_H} w_{yz}, \qquad \pi_{yz} = \pi_{zy} = \frac{1}{\omega_H} w_{yx}$$

где

$$w_{ik} = P_\perp\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right) +$$

$$+ (P_\parallel - P_\perp)\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_l} n_k n_l + \frac{\partial V_k}{\partial x^i} n_i n_l - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_m} n_l n_m\right) \tag{4}$$

Рассмотрим в однородной плазме возмущения типа $\sim \exp i(xk_x + zk_z - \omega t)$. Линеаризуя систему (1) с учетом (2) — (4), получаем систему

$$[\rho\omega^2 + k_z^2 A - k_x^2 (2P_\perp + H^2/4\pi)]\,\xi_x - k_x k_z P_\perp \xi_z = -i\omega (k_z^2\eta_\perp + 2k_z^2\eta_\parallel)\,\xi_y \qquad (5)$$

$$[\rho\omega^2 + k_z^2 A]\,\xi_y = i\omega (k_x^2\eta_\perp + 2k_z^2\eta_\parallel)\,\xi_x + 2i\omega k_x k_z \eta_\parallel \xi_z$$

$$-k_x k_z P_\perp \xi_x + [\rho\omega^2 - 3k_z^2 P_\parallel]\,\xi_z = -2i\omega k_x k_z \eta_\parallel \xi_y$$

где

$$\eta_\perp = P_\perp/2\omega_H, \qquad \eta_\parallel = P_\parallel/2\omega_H, \qquad \xi = i\mathbf{V}/\omega, \qquad A = P_\parallel - P_\perp - H^2/4\pi \qquad (6)$$

Для альфвеновской волны ($k_x = 0$) имеем из (5)

$$\omega = \pm\left(\frac{2}{\rho} k_z^2 \eta_\parallel \mp \frac{1}{\rho}\sqrt{4k_z^4 \eta_\parallel^2 - \rho k_z^2 A}\right) \qquad (7)$$

Таким образом, плазма устойчива при условии

$$k_z^2 > \frac{1}{4}\left(\frac{P_\parallel - P_\perp}{P_\parallel} - \frac{H^2}{4\pi P_\parallel}\right)\frac{\rho\omega_H^2}{P_\parallel} \qquad (8)$$

Максимальный инкремент неустойчивости ν при нарушении условия (8) равен

$$\nu = \frac{8\omega_H}{P_\parallel}\left(P_\parallel - P_\perp - \frac{H^2}{4\pi}\right) \qquad \left(P_\parallel > P_\perp + \frac{H^2}{4\pi}\right) \qquad (9)$$

Для почти поперечных волн ($k_z \sim 0$) при не очень сильной анизотропии ($P_\perp - P_\parallel \sim P_\parallel$) условие устойчивости имеет вид

$$k_x^2 \gtrsim \frac{1}{4}\left(\frac{P_\perp - P_\parallel}{P_\parallel} - \frac{H^2}{4\pi P_\perp}\right)\frac{\rho\omega_H^2}{P_\parallel} \qquad (10)$$

Поступила 20 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N. Finite larmor radius stabilization of «weakly» unstable confined plasma. (Доклад на конференции по физике плазмы и управляемым термоядерным реакциям. Зальцбург, 1961.)
2. Roberts K. V. and Taylor J. B. Magnetohydrodynamic Equations for finite Larmor radius. Physical Review Letters, 1962, vol. 8, p. 197.
3. Chew G., Goldberger M., Low F. Bolzmann equation and gidromagnetic collisionless equation for one fluid. Proc. Roy. Soc., 1956, vol. 236, 112. (Русск. пер.: Чу Г., Гольдбергер М. и Лоу Ф. Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений. Пробл. современ. физики, 1957, т. 7, стр. 139.)