

УДК 532.536

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Л. А. Сподарева

Новосибирский военный институт, 630117 Новосибирск

Исследована устойчивость пленок неньютоновских жидкостей, движущихся по наклонным плоскостям, в рамках двухпараметрической модели Оствальда — де Вилия с учетом сил поверхностного натяжения и сил Ван-дер-Ваальса. В линейной постановке задача решена аналитически, эволюция возмущений конечной амплитуды определена численно.

Неньютоновские жидкости характеризуются нелинейной связью напряжения сдвига и скорости сдвига течения. Такие жидкости широко распространены в природе и промышленных технологиях (вулканическая лава, грязевые потоки, нефть, пластмассы, масляные краски, растворы и расплавы полимеров).

Моделью, удовлетворительно описывающей движение аномально вязких неньютоновских жидкостей, является модель Оствальда — де Вилия со степенным законом связи напряжения сдвига и скорости сдвига (см., например, [1]). Эта модель содержит коэффициент динамической вязкости η_0 и показатель степени n , характеризующий неньютоновское поведение жидкости: чем больше значение n отличается от единицы ($n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости), тем сильнее проявляются аномально вязкие свойства. В зависимости от показателя степени неньютоновские жидкости разделяются на псевдопластические ($n < 1$), например нефть и ряд масел ($n \simeq 0,8$), и дилатантные ($n > 1$), например засахарившийся мед ($n > 2$) [1–3]. Заметим, что сухая сыпучая среда в инерционном режиме может рассматриваться как дилатантная жидкость с $n = 2$ [4–6], так как в такой среде напряжение сдвига пропорционально квадрату скорости сдвига течения.

В настоящей работе рассматривается устойчивость движущихся по шероховатой наклонной плоскости слоев несжимаемых неньютоновских жидкостей по отношению к возмущениям малых и конечных амплитуд с учетом поверхностного натяжения. Анализ выполнен на основе осредненных по толщине слоя уравнений баланса массы и импульса, дополненных уравнением состояния Оствальда — де Вилия. Соответствующий линейный анализ устойчивости в пренебрежении эффектом поверхностного натяжения проведен в [7, 8], а в [9] представлен краткий линейный анализ с учетом поверхностного натяжения при малых отклонениях свойств жидкости от ньютоновских ($n = 1 \pm \delta$, $\delta \ll 1$). В [8] приведены также некоторые результаты численного исследования эволюции локализованных возмущений конечной амплитуды.

Полагая, как и в [7, 8], что характерная толщина слоя жидкости H_0 значительно меньше характерного продольного размера L_0 ($\varepsilon \equiv H_0/L_0 \ll 1$), запишем исходные уравнения и граничные условия с учетом поверхностного натяжения на твердой плоскости и свободной поверхности:

$$u_t + uu_x + vv_y = -(p + \varphi)_x / \rho + g \sin \beta + \nu_n (|u_y|^{n-1} u_y)_y, \quad (1)$$

$$p_y = -\rho g \cos \beta, \quad u_x + v_y = 0;$$

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0;$$

$$p = -\alpha H_{xx}, \quad u_y = 0, \quad H_t + uH_x = v \quad \text{при} \quad y = H(x, t). \quad (2)$$

Здесь x — координата вдоль наклонной плоскости; y — в перпендикулярном направлении; t — время; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; p — давление; u, v — компоненты скорости; β — угол с горизонталью; ν_n [$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{n-2}$] — коэффициент кинематической вязкости неньютоновской жидкости с показателем n ; $\varphi = A_H/H^3$ — потенциал дальнедействующих молекулярных сил Ван-дер-Ваальса; A_H [Дж] — константа Хамакера (см., например, [10, 11]).

Следуя [12, 13], осредним уравнения (1) по толщине слоя, проинтегрировав их по координате y от дна слоя $y = 0$ до свободной поверхности $y = H(x, t)$ с использованием граничных условий (2), в результате чего в безразмерных переменных получим

$$H_t + Q_x = 0, \quad (3)$$

$$Q_t + \frac{4n+2}{3n+2} \left(\frac{Q^2}{H} \right)_x = \frac{1}{\varepsilon O_n} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left\{ \left[1 - \varepsilon H_x \operatorname{ctg} \beta \left(1 - \frac{3A_0}{H^4 \cos \beta} \right) \right] H - \frac{Q^n}{H^{2n}} \right\} + \varepsilon^2 \operatorname{We}_n H H_{xxx},$$

где Q — объемный расход жидкости; O_n — число Оствальда. При переходе к безразмерным переменным выбраны следующие масштабы: L_0, H_0 — характерные расстояния вдоль слоя и в перпендикулярном направлении; $\varepsilon = H_0/L_0 \ll 1$; $t_0 = L_0/u_0$ — время; $u_0 = Q_0/H_0$ — продольная скорость. Масштаб расхода равен

$$Q_0 = \left(\frac{g \sin \alpha}{\nu_n} \right)^{1/n} \frac{n}{2n+1} H_0^{(2n+1)/n}.$$

Безразмерный параметр $O_n = H_0^{2n-2} Q_0^{2-n} / \nu_n = H_0^n u_0^{2-n} / \nu_n$, названный в [8] числом Оствальда, представляет собой аналог числа Рейнольдса для неньютоновских сред, подчиняющихся степенному закону. Другой безразмерный параметр $\operatorname{We}_n = \sigma H_0 / (\rho Q_0^2) = \sigma / (\rho u_0^2 H_0)$ представляет собой число Вебера для неньютоновской жидкости. Величина $A_0 = A_H / (\rho g H_0^4)$, σ — поверхностное натяжение.

Как и в [7–9], линеаризуем систему уравнений (3) по отношению к малым возмущениям движущегося однородного слоя постоянной толщины, полагая $H = 1 + h$, $Q = 1 + q$ ($h, q \ll 1$). Представив решение полученной таким образом системы двух линейных уравнений в виде периодических волн $h, q \sim \exp(i(kx - \omega t))$, получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - (2ak - ib)\omega + ck^2 - ifk - \varepsilon^2 \operatorname{We}_n k^4 = 0, \quad (4)$$

где ω — комплексная частота; k — вещественное волновое число малых возмущений; $a = (4n+2)/(3n+2)$; $b = ((2n+1)/n)^n n / (\varepsilon O_n)$; $c = a - ((2n+1)/n)^n (1 - 3A_0/\cos \beta) \operatorname{ctg} \beta / O_n$; $f = b(2n+1)/n$. Запишем комплексную частоту в виде $\omega = \omega_r + i\gamma$, где ω_r — вещественная частота; γ — инкремент, и введем фазовую скорость возмущений $v = \omega_r/k$. Подставляя эти формулы в (4) и отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\gamma = b(v_0 - v)/(2(v - a)); \quad (5)$$

$$\varepsilon^2 \operatorname{We}_n k^4 - (v^2 - 2av + c)k^2 - b^2(v - v_0)(v + v_0 - 2a)/(4(v - a)^2) = 0, \quad (6)$$

где $v_0 = f/b$. Уравнения (5), (6) с точностью до обозначений совпадают с соответствующими уравнениями в случаях $\operatorname{We}_n = 0$ [7, 8] и $\operatorname{We}_n \neq 0$ [9]. Заметим также, что в частном случае ньютоновской жидкости ($n = 1$) уравнения (5), (6) переходят в приведенные в [12].

Из (5) следует, что инкремент γ положителен при $v < v_0$ и отрицателен при $v > v_0$. Таким образом, рассматриваемое движение однородного слоя неустойчиво по отношению к периодическим малым возмущениям с фазовой скоростью $v < v_0$ и устойчиво к малым возмущениям, имеющим фазовую скорость $v > v_0$. Эта критическая фазовая скорость равна $v_0 = (2n+1)/n$; при малых значениях n (сильнопсевдопластические жидкости) $v_0 \sim n^{-1}$, а при $n \rightarrow \infty$ (сильнодилатантные жидкости) $v_0 = 2$. Для ньютоновской жидкости $v_0 = 3$.

Уравнение (6) представляет собой биквадратное уравнение для волнового числа, выражение для квадрата волнового числа имеет вид

$$k^2 = \frac{(v - v_1)(v - v_2)}{2\varepsilon^2 \text{We}_n} \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{\varepsilon^2 \text{We}_n b^2 (v_0 - v)(v_0 + v - 2a)}{(v - a)^2 (v - v_1)^2 (v - v_2)^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (7)$$

где $v_1 = a + (a^2 - c)^{1/2}$; $v_2 = a - (a^2 - c)^{1/2}$. Инкремент γ обращается в нуль, когда $v = v_0$. Это имеет место при двух значениях волнового числа: $k^2 = 0$, $k^2 \equiv k_*^2 = (v_0 - v_1)(v_0 - v_2)/(\varepsilon^2 \text{We}_n)$. Подставляя значения v_0, v_1, v_2 , найдем квадрат граничного волнового числа

$$k_*^2 = \frac{2n + 1}{\varepsilon^2 \text{We}_n n^2} \left[1 - (2n + 1)^{n-1} n^{2-n} \left(1 - \frac{3A_0}{\cos \beta} \right) \frac{\text{ctg } \beta}{O_n} \right]. \quad (8)$$

Из этой формулы и приведенных выше соображений следует, что рассматриваемое течение устойчиво ($\gamma \leq 0$), когда $O_n \leq O_n^*$, где $O_n^* = (2n + 1)^{n-1} n^{2-n} (1 - 3A_0/\cos \beta) \text{ctg } \beta$ — критическое число Оствальда. Для случая движения жидкости по вертикальной стенке ($\beta = 90^\circ$) критическое число Оствальда равно нулю при $A_0 = 0$ и отрицательно при $A_0 \neq 0$, поэтому при любых числах Оствальда возмущения неустойчивы. Учет сил Ван-дер-Ваальса ($A_0 \neq 0$) приводит к уменьшению O_n^* . Однако, поскольку константа Хамакера мала (например, для водных пленок $A_H \approx 10^{-20}$ Дж), влияние этого эффекта существенно только для ультратонких пленок толщиной порядка 10^{-7} м. Если число Оствальда больше критического, то существует конечная область волновых чисел $\Delta k = 0 \div k_*$, в которой малые возмущения неустойчивы (инкремент положителен). В случае, когда поверхностным натяжением пренебрегается, область неустойчивых волновых чисел является неограниченной ($k \rightarrow \infty$) [8]. Поверхностное натяжение стабилизирует мелкомасштабные возмущения, делая область неустойчивости по волновым числам конечной ($k_* \sim \text{We}_n^{1/2}$).

При малых отклонениях чисел Оствальда от критического, когда $O_n = O_n^*(1 + \delta)$, $\delta \ll 1$, из (8) имеем $k_*^2 = (\varepsilon^2 \text{We}_n)^{-1} \delta (2n + 1)/n^2$, откуда следует, что для жидкостей с малыми показателями значение граничного для неустойчивости волнового числа $k_* \sim n^{-1}$, а в случае жидкостей с большими показателями $k_* \sim n^{-1/2}$. При фиксированных значениях числа Вебера и отклонениях от критического числа Оствальда граничное волновое число монотонно уменьшается по мере перехода от псевдопластических сред к дилатантным. Из формулы (6) получим уравнение нейтральной кривой $O_n = O_n(k)$, разделяющей области устойчивости и неустойчивости:

$$O_n = O_n^*/(1 - \varepsilon^2 \text{We}_n n^2 k^2 / (2n + 1)).$$

Для расчетов были выбраны две жидкости (псевдопластическая и дилатантная), параметры которых приведены в [1]: раствор напалма в керосине ($n = 0,52$, $\nu = 5,35 \times 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{n-2}$, $\sigma = 0,026 \text{ Н/м}$, $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$) и смесь извести с водой ($n = 1,47$, $\nu = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{n-2}$, $\sigma = 0,076 \text{ Н/м}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$). Во всех расчетах $\varepsilon = 0,1$, $\beta = 45^\circ$. На рис. 1 для указанных жидкостей представлены нейтральные кривые при различных числах Вебера. Области выше и левее нейтральных кривых соответствуют устойчивости, ниже и правее — неустойчивости.

Если степенные модели изучаются с математической точки зрения, то параметры n , O_n , We_n могут быть выбраны независимо друг от друга. Если же делаются расчеты для конкретных жидкостей, то эти параметры нельзя выбирать независимо. Действительно, числа Оствальда и Вебера зависят от расхода Q_0 , подстановка которого в соответствующие формулы дает

$$O_n = (g \sin \beta)^{(2-n)/n} n^{2-n} (2n + 1)^{n-2} \nu_n^{-2/n} H_0^{(n+2)/n},$$

$$\text{We}_n = (\sigma/\rho) (g \sin \beta)^{-2/n} n^{-2} (2n + 1)^2 \nu_n^{2/n} H_0^{-(3n+2)/n}.$$

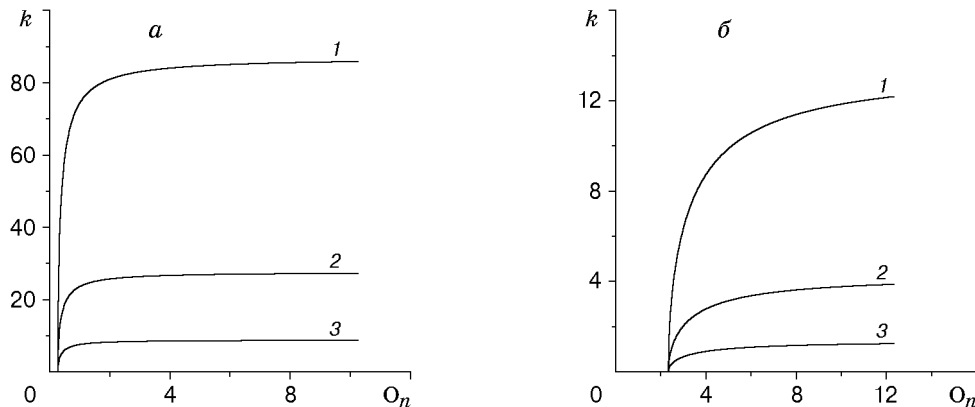


Рис. 1. Нейтральные кривые устойчивости:

a — для раствора напалма в керосине ($n = 0,52$, $O_n^* = 0,27$): 1 — $We = 0,1$; 2 — $We = 1$; 3 — $We = 10$; *б* — смеси извести с водой ($n = 1,47$, $O_n^* = 2,33$): 1 — $We = 1$; 2 — $We = 10$; 3 — $We = 100$

Если параметры жидкости n , ν_n , σ/ρ и угол наклона β заданы, то единственной величиной, определяющей числа Оствальда и Вебера, является невозмущенная толщина слоя H_0 , изменение которой приводит к одновременному изменению этих чисел, причем чем больше эта толщина, тем больше число Оствальда и меньше число Вебера, и наоборот.

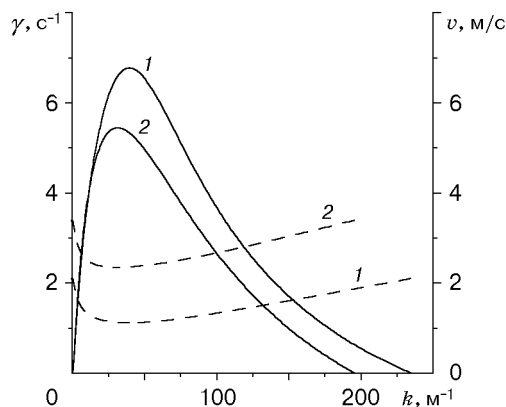


Рис. 2. Зависимость инкрементов (сплошные кривые) и фазовых скоростей (штриховые) от волнового числа: 1 — $n = 0,52$, $O_n = 7,2$, $We = 1$; 2 — $n = 1,47$, $O_n = 488$, $We = 11,9$

На рис. 2 приведены зависимости инкрементов и фазовых скоростей малых возмущений от волнового числа.

Изучение эволюции возмущений конечной амплитуды проведено численно. Для численного решения системы уравнений (3) без учета сил поверхностного натяжения в [8] использовалась явная конечно-разностная схема, в которой потоки массы и импульса аппроксимировались односторонними разностями в соответствии с направлением течения, а слагаемое HH_x , пропорциональное градиенту давления, — центральной разностью. Эта схема обладает условной устойчивостью; необходимое для устойчивости отношение шагов $\delta t/\delta x$ подбиралось с помощью вспомогательных расчетов. Учет поверхностного натяжения увеличивает порядок высшей производной по координате до третьего. Указанная схема, допол-

ненная симметричной конечной разностью для аппроксимации третьей производной, применена для решения системы (3):

$$H1_i = H_i - \frac{\delta t}{\delta x} (u_{i+0,5}H_i - u_{i-0,5}H_{i-1}),$$

$$Q1_i = Q_i - a_n \frac{\delta t}{\delta x} (u_{i+0,5}u_iH_i - u_{i-0,5}u_{i-1}H_{i-1}) - \varepsilon b_n \operatorname{ctg} \beta \frac{\delta t}{2\delta x} H_i(H_{i+1} - H_{i-1}) +$$

$$+ b_n \delta t \left[H_i - \frac{Q_i^n}{H_i^{2n}} \right] + \varepsilon^2 We_n \frac{\delta t}{2\delta x^3} H_i(H_{i+2} - 2H_{i+1} + 2H_{i-1} - H_{i-2}).$$

Здесь $H1_i \equiv H_i^{m+1}$, $Q1_i \equiv Q_i^{m+1}$, $H_i \equiv H_i^m$, $Q_i \equiv Q_i^m$; $t^{m+1} = (m+1)\delta t$, $t^m = m\delta t$; $u_{i+0,5} = (u_i + u_{i+1})/2$, $u_{i-0,5} = (u_i + u_{i-1})/2$; $a_n = (4n+2)/(3n+2)$, $b_n = (\varepsilon O_n)^{-1}((2n+1)/n)^n$. Схема удобна в реализации, а ее условная устойчивость, требующая выбора $\delta t < \delta x^3$,

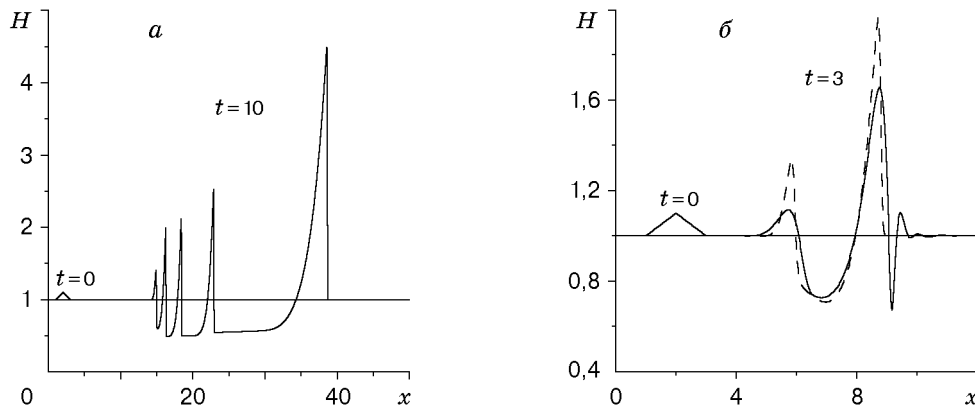


Рис. 3. Профили свободной поверхности слоя жидкости ($n = 0,52$, $O_n = 7,2$):
 а — $t = 0; 10$, $We = 0$; б — $t = 0; 3$ (сплошная кривая — $We = 1$, штриховая — $We = 0$)

не является большим ограничением из-за одномерности задачи. Начальное локализованное возмущение выбиралось в виде равнобедренного треугольника с высотой $0,1$ толщины невозмущенного слоя жидкости. В качестве граничных взяты условия невозмущенного потока $H = 1$, $H_x = H_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = x_{\max}$. Использование таких граничных условий подразумевает, что численное решение проводится до тех пор, пока возмущение находится достаточно далеко от границ расчетной области (это условие заложено в алгоритме).

На рис. 3,а представлен профиль свободной поверхности слоя псевдопластической жидкости ($n = 0,52$), движущегося по наклонной плоскости, в моменты времени $t = 0; 10$ (в безразмерных единицах) после внезапного освобождения начального вздутия при $O_n = 7,2$ и $We = 0$, что соответствует отсутствию поверхностного натяжения. Так как число Оствальда превышает критическое значение $0,23$, начальное возмущение треугольной формы неустойчиво, с течением времени возникает волновая структура, состоящая из ряда зубцов сжатия с резкими передними фронтами. Постепенно передний зубец отделяется от последующих, и между ним и следующим зубцом возникает область, где свободная поверхность ниже невозмущенного уровня. Такая структура, состоящая из скачка с резким передним фронтом и сопровождающего разрежения, приобретает вид, подобный стационарным решениям, проанализированным в [7]. Таким образом, характерной чертой каждой части общей волновой структуры является очень узкий фронт, плавное уменьшение амплитуды по мере продвижения в область меньших значений координаты x и достаточно протяженная область между последовательными скачками, где $H < 1$.

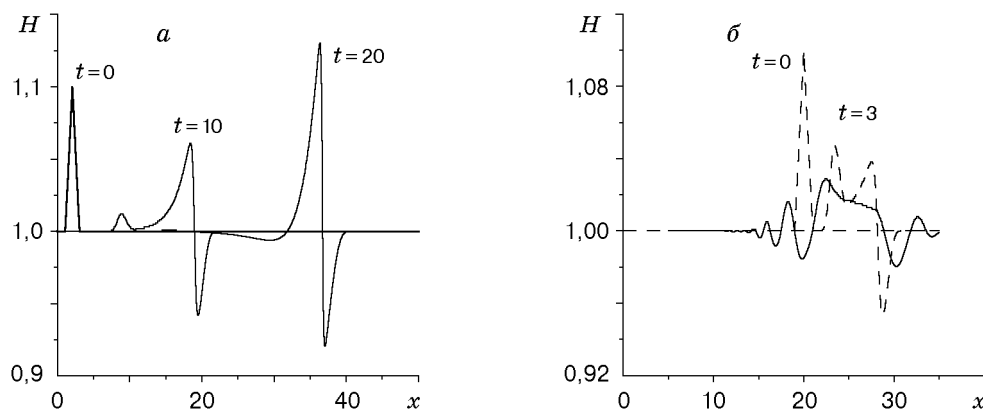


Рис. 4. Профили свободной поверхности слоя жидкости ($n = 1,47$, $O_n = 488$):
 а — $t = 0; 10; 20$, $We = 0$; б — $t = 0; 3$ (сплошная кривая — $We = 11,9$, штриховая — $We = 0$)

На рис. 3,б представлены результаты расчета профиля свободной поверхности в моменты времени $t = 0$; 3 при $On = 7,2$, когда влияние поверхностного натяжения учитывается (сплошная линия) и не учитывается (штриховая линия). Амплитуды скачков при наличии поверхностного натяжения уменьшаются, и на профиле свободной поверхности возникает осцилляторный предшественник, опережающий фронт возмущения. Это явление можно объяснить дисперсией мод малой амплитуды. Таким образом, хотя поверхностное натяжение и не приводит к изменению критического числа Оствальда, его воздействие проявляется в уменьшении амплитуды и дисперсионном расплывании профиля.

На рис. 4,а,б представлены профили свободной поверхности слоя дилатантной жидкости ($n = 1,47$) без учета и с учетом сил поверхностного натяжения соответственно. Видно, что поверхностное натяжение приводит к образованию типичной дисперсионной структуры с осцилляциями как перед, так и за основным фронтом (рис. 4,б).

Автор выражает благодарность Ю. А. Березину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульман З. П., Берковский Б. М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника, 1966.
2. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids. N. Y.: John Wiley and Son, 1977. V. 1.
3. Eirich F. R. Rheology. N. Y.: Acad. Press, 1967. V. 4.
4. Bagnold R. A. Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear // Proc. Roy. Soc. London. 1954. V. A225. P. 49–63.
5. Berezin Yu. A., Hutter K., Spodareva L. A. Stability properties of shallow granular flows // Intern. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33, N 4. P. 647–658.
6. Березин Ю. А., Сподарева Л. А. Анализ устойчивости тонкого слоя гранулированного материала, движущегося по наклонной плоскости // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 6. С. 113–117.
7. Ng C., Mei C. C. Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid // J. Fluid Mech. 1994. V. 263. P. 151–183.
8. Berezin Yu. A., Hutter K., Spodareva L. A. Stability analysis of gravity driven shear flows with free surface for power-law fluids // Arch. Appl. Mech. 1998. V. 68. P. 169–178.
9. Hwang C., Chen J., Wang J., Lin J. Linear stability of power-law liquid film flows down an inclined plane // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. V. 27. P. 2297–2301.
10. Erneux T., Davis S. H. Nonlinear rupture of free films // Phys. Fluids. 1993. V. A5, N 5. P. 1117–1122.
11. De Witt A., Gallez D., Christov C. I. Nonlinear evolution equations for thin liquid films with insoluble surfactants // Phys. Fluids. 1994. V. 6, N 10. P. 3256–3266.
12. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке // ПМТФ. 1979. № 6. С. 77–87.
13. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волновое течение пленок жидкостей. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1992.

*Поступила в редакцию 17/VI 1999 г.,
в окончательном варианте — 7/IX 1999 г.*