

УДК 539.3

**К ВОПРОСУ УЧЕТА ЛИНЕЙНОГО ИЗМЕНЕНИЯ
ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НЕТРОНУТОГО МАССИВА
С ГЛУБИНОЙ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНИКИ**

В. Е. Миренков, А. А. Красновский

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: mirenkov@misd.nsc.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассматриваются вопросы формулирования граничных условий при расчетах напряженно-деформированного состояния горных пород в окрестности выработки. Классические формулировки граничных условий в таких задачах не только не учитывают исходную предпосылку о линейности поля напряжений с глубиной в нетронutom массиве пород, но и не объясняют несоответствие расчета и поведения реального массива пород. В основе исследования лежит положение о линейности исходных напряжений, формулировка граничных условий для расчетной области, обеспечивающих эту линейность и допускающих проведение выработки при сохранении неизменных условий на границе расчетной области. Общая задача расчета напряженно-деформированного состояния массива при этом делится на две из-за возможности для горизонтальной составляющей точно сформулировать граничные условия и отсутствие такой возможности для вертикальной. Обсуждается вопрос сложения полученных решений для горизонтальных и вертикальных составляющих исходного поля напряжений.

Граничные условия, выработка, смещения, напряжения, нетронутый массив, породы, боковой отпор

Первыми работами, в которых обсуждался феномен опорного давления на пласт впереди очистной выработки, являются публикации [1, 2]. И хотя в них пласт полезного ископаемого предполагался абсолютно жестким с использованием идеальных связей на контакте с породой, они заслуживают особого внимания и потому, что они — первые, и потому, что вызвали широкое обсуждение новых механизмов и моделей возникновения опорного давления. Авторы в своих рассуждениях и модельных экспериментах уловили большинство принципиальных моментов, влияющих на напряженно-деформированное состояние пород около выработок.

Численный эксперимент при рассмотрении сложных задач приобрел в настоящее время практически равные права с традиционным физическим. Кажущаяся его простота, однако, таит в себе значительные трудности, связанные с построением соответствующей математической модели — численного алгоритма решения задачи, и необходимостью обоснования полученных результатов. Среди достаточно общих методов решения задач нужно отметить вариационный метод, метод конечных элементов, разностные методы, метод разделения переменных, метод

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-05-00133).

интегральных преобразований. При всей важности и определенной эффективности таких подходов им присущи разного рода недостатки, значительно ограничивающие область их эффективного применения.

Повышение достоверности численных методов, уменьшение неопределенностей, связанных с физическими и/или геометрическими упрощениями, обуславливают необходимость применения строгих методов определения точности выбранной концептуальной модели и определение степени достоверности описания исследуемого явления с помощью адекватной формулировки граничных условий.

Большинство исследований по моделированию горного давления выполняются методом конечных элементов. Однако на точность расчета напряженно-деформированного состояния пород около выработки влияют параметры численных схем и формулировка граничных условий на внешнем контуре расчетной области. Поэтому для изучения влияния тех или иных параметров задачи необходимо строить аналитическое или экспериментально-аналитическое решения модельных задач, которые могут быть использованы для проверки точности численного решения. Аналогичная проблема в теории упругости возникла при моделировании трещин, когда классическая формулировка привела к сингулярному решению. Оказалось, что при приближении к вершине трещины возникают дополнительные механические эффекты, не учитываемые при классической формулировке задачи. Для устранения сингулярности необходимо было выявить эти эффекты, изучить граничные условия и произвести соответствующее обобщение модели. Первой работой по анализу граничных условий была [3], которая позволила получить эффективно работающие численные алгоритмы.

При моделировании напряженно-деформированного состояния в массиве пород с выработками используется представление о линейном изменении с глубиной поля вертикальных и горизонтальных напряжений нетронутого массива:

$$\sigma_y = -\gamma(H - y), \quad \sigma_x = -\lambda\gamma(H - y), \quad (1)$$

где γ — удельный вес пород; H — расстояние от дневной поверхности до центра будущей выработки; λ — коэффициент бокового распора. В задаче о дополнительных напряжениях, возникающих на контуре выработки и исчезающих на бесконечности, рассматривается плоскость с отверстием, по периметру которого действуют нормальные и касательные напряжения. Дополнительные напряжения, сложенные с полем нетронутого массива

$$\sigma_y = -\gamma H, \quad \sigma_x = -\lambda\gamma H, \quad (2)$$

обеспечивают нулевые нормальные и касательные напряжения на контуре выработки и значения (2) на бесконечности в предположении заглубленности выработки (H — много больше характерного размера выработки) [1–2].

При численной реализации таких задач рассматривается достаточно большая часть массива пород, содержащая выработку. Граничные условия формулируются и на контуре Γ_1 и на периметре выделенной части Γ_2 , который считается эквивалентом бесконечно удаленной точки (рис. 1). Дополнительная задача получается добавлением растягивающего поля напряжений к (2), т. е. на Γ_2 напряжения равны нулю, а на контуре Γ_1 задаются соответствующие значения σ_n и τ_n .

Проблема существенно усложняется, когда рассматривается незаглубленная выработка или случай открытых горных работ. Схемы таких ситуаций приведены на рис. 2 и в силу симметрии задачи представлены половины областей расчета. Граничные условия на частях массива Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 для схем рис. 2 имеют вид:

$$\sigma_x = -\lambda\gamma(H - y), \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_2; \tag{3}$$

$$\sigma_y = 0, \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_3; \tag{4}$$

$$u = 0, \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_4. \tag{5}$$

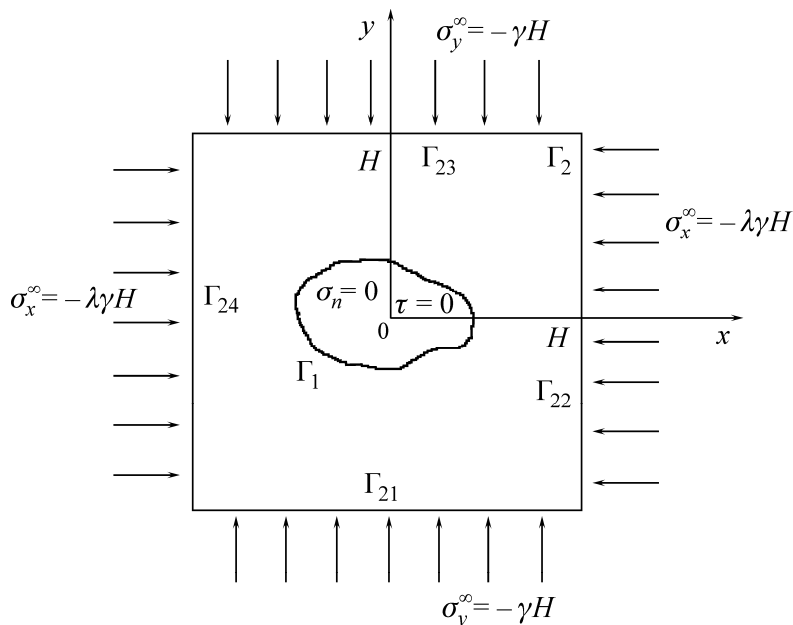


Рис. 1. Расчетная схема массива пород с выработкой

Если на контуре выработки нормальные и касательные напряжения равны нулю, то формулировка граничных условий на Γ_1 представляет нерешенную проблему. Переход к дополнительной задаче не сильно помогает в формулировке граничных условий на Γ_1 (рис. 2а), где возможны варианты:

$$\sigma_y = 0, \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{6}$$

если пренебречь изменением напряжений по высоте выработки;

$$v = 0, \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{7}$$

$$v = 0, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{8}$$

если учесть перепад давления по высоте выработки. Еще более сложная задача по формулировке граничных условий на Γ_1 возникает для схемы рис. 2б, она также сводится к случаям (7) или (8).

Рассмотрим задачу для плоскости с прямоугольным отверстием, по периметру которого зададим граничные условия в виде

$$\sigma_y = \sigma_0 = \text{const}, \quad \sigma_x = 2 - y, \tag{9}$$

затухающие на бесконечности. При численном счете необходим переход к конечной области, на границе которой нужно сформулировать конкретные в рамках трех основных задач условия. Но (9) — это задача для плоскости с отверстием, в которой не рассматривается исходное напряженное состояние в массиве пород без выработки. Если использовать математическое решение (9) в конкретной задаче механики горных пород, то нужно учитывать данные натурных измерений напряженного состояния и накладывать ограничения на возможность выбора условия (9). Боко-

вой отпор можно смоделировать точно, используя линейность исходного поля и условие симметрии. Для вертикальной составляющей поля напряжений такой ясности нет и необходимо использовать некоторые искусственные приемы и предположения.

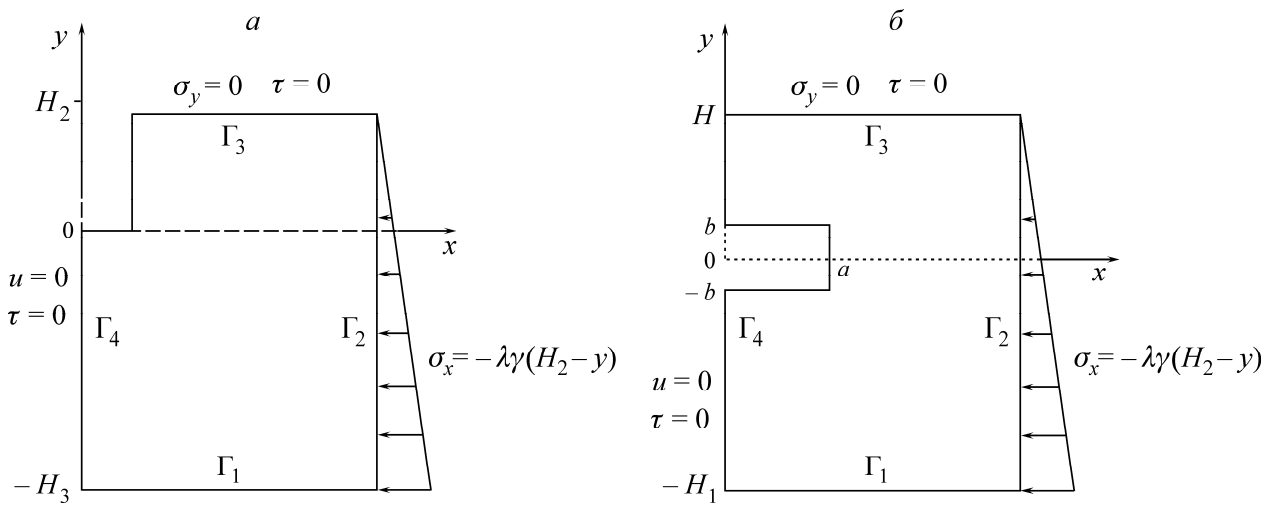


Рис. 2. Расчетная схема горной выработки: *a* — выходящей на дневную поверхность; *б* — незаглубленной

Рассмотрение формулировок задач геомеханики (рис. 1, 2) требует выполнения условий линейности поля напряжений (1) в нетронутом массиве пород и постановку граничных условий всюду на Γ_2 , обеспечивающих (1). После того как это достигнуто, рассматривается образование выработки и производится оценка ее влияния, вносимая в напряженное состояние. Это необходимо, чтобы исключить искажения, вносимые произвольными граничными условиями на конечный результат [4–9]. В силу сложности формулировки граничных условий для расчетных схем (рис. 1, 2), разделим их условно на два. Сначала поле напряжений создается заданием на Γ_2 только горизонтальных напряжений

$$\sigma_x = -\lambda\gamma(H - y), \quad \tau = 0, \quad (10)$$

а затем только вертикальных

$$\sigma_y = -\gamma(H - y), \quad \tau = 0. \quad (11)$$

Для граничных условий (10) на Γ_2 и (4), (5) на Γ_3, Γ_4 рассмотрим возможные четыре варианта граничных значений на Γ_1 :

$$\nu = 0, \quad \tau = 0; \quad \nu = 0, \quad u = 0; \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = 0; \quad \sigma_y = 0, \quad u = 0. \quad (12)$$

Граничные значения компонент напряжений и смещений для всех вариантов условий (4), (5), (10) и (12) на Γ связаны системой интегральных уравнений [3]:

$$f(t_0) + 2\mu g(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) + 2\mu g(t)}{t - t_0} dt, \quad (13)$$

$$k \overline{f(t_0)} - 2\mu \overline{g(t_0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k \overline{f(t)} - 2\mu \overline{g(t)}}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (f(t) + 2\mu g(t)) d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0},$$

где $k = 3 - 4\nu$; $\mu = E[2(1 + \nu)]^{-1}$, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга; t_0 — аффикс точки границы Γ ; i — мнимая единица; $g = u + i\nu$;

$$f(t) = i \int_0^t (X_n + iY_n) ds = f_1 + if_2, \tag{14}$$

X_n, Y_n — компоненты напряжений в направлении осей x и y ; черточка над функцией обозначает комплексно сопряженное значение.

Рассмотрение вариантов (12) показало, что только условие $\sigma_y = 0, \tau = 0$ на Γ_1 обеспечивает в нетронутом массиве линейное поле напряжений. На рис. 3 приведены результаты расчета напряженного состояния нетронутого массива пород, в котором при проведении выработки сохраняются граничные условия (3)–(6). Расчеты σ_x проводились по десяти вертикальным равноотстоящим сечениям в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к напряжениям в центре будущей выработки, а размерность длины — к характерному ее размеру.

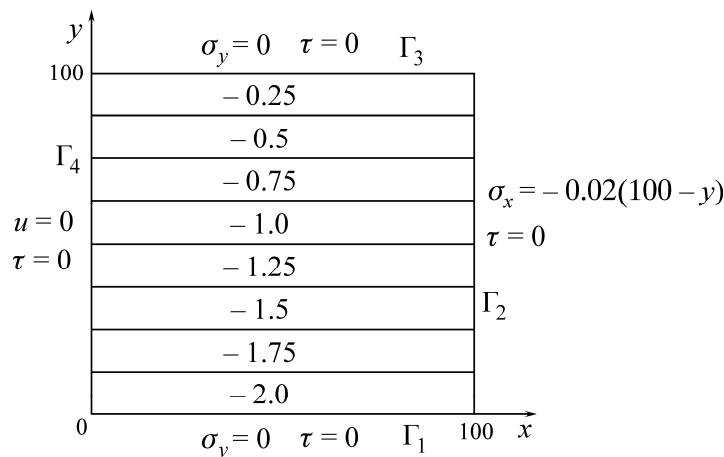


Рис. 3. Граничные условия, обеспечивающие линейное распределение напряжений $\sigma_x(y)$ в нетронутом массиве

При рассмотрении дополнительных напряженных состояний для случаев, представленных на рис. 2а и зависящих только от $\sigma_y = -\gamma(H_2 - y)$, возможные граничные условия на Γ_1 будут

$$\nu = 0, \tau = 0 \text{ или } \nu = 0, u = 0. \tag{15}$$

Следовательно, возникает некорректная ситуация при попытке сложить два упругих решения, отвечающих (10) и (11), из-за различия граничных условий на Γ_1 . Единственный выход — решить эти две задачи по отдельности, а затем результаты алгебраически сложить для расчетных точек.

На рис. 4 приведены результаты расчета смещений контура выработки с учетом только горизонтальной составляющей напряжения $\sigma_x^\infty = 2y$ и граничных условий

$$\nu = 0, \tau = 0 \text{ и } \sigma_y = 0, \tau = 0 \text{ на } \Gamma_1. \tag{16}$$

Как и следовало ожидать, решение существенно зависит от условий (16). Следует отметить большие по модулю отрицательные значения смещений $\nu(x)$ на основании выработки для второй пары граничных условий из (16), которые уменьшают значения положительных смещений, возникающих при учете вертикальной составляющей σ_y , т. е. суммарные значения $\nu(x)$ будут в итоге меньше для случая рис. 4б. Таким образом класс некорректных задач пополняется еще одной их разновидностью, т. е. увеличивается за счет нарушения принципа независимости действия сил, который предполагает их сложение, но при неизменных граничных условиях.

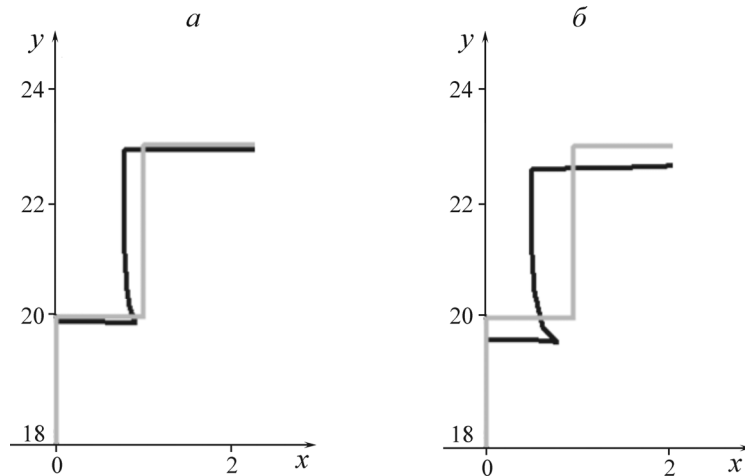


Рис. 4. Деформирование периметра выработки при граничных условиях на Γ_1 : *a* — $\nu = 0, \tau = 0$; *б* — $\sigma_y = 0, \tau = 0$

На рис. 5 представлено деформирование контура подземной выработки, схема которой приведена на рис. 2б при $H = 4, b = 1, a = 2, H_1 = 20$, для различных формулировок граничных условий.

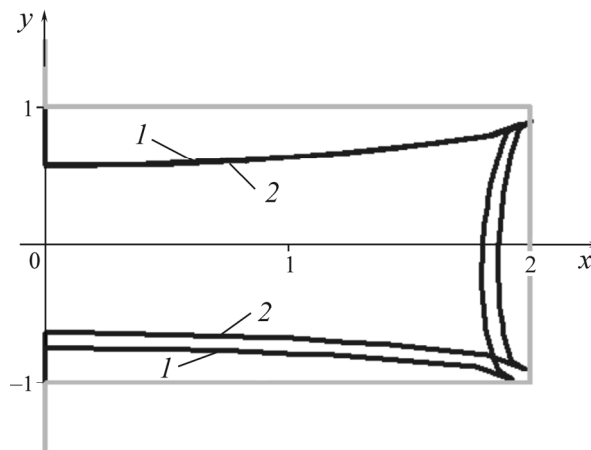


Рис. 5. Деформирование контура подземной выработки: *1* — с учетом линейности поля напряжений нетронутого массива $\sigma_x(y)$; *2* — без учета

Кривой 2 отвечает решение, соответствующее граничным условиям (7) на Γ_1 и (4) – (5) на Γ_3 и Γ_4 :

$$\sigma_x = 0, \quad \tau = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{17}$$

и на контуре выработки

$$\sigma_y = 4 - y, \quad \sigma_x = 4 - y \tag{18}$$

для горизонтальных и вертикальных участков. Кривой *1* соответствует сумма двух решений — первое отвечает граничным условиям (6), (4), (5), (17), а на контуре — (18) в предположении $\sigma_y \equiv 0$; второе аналогично условиям с заменой (6) на (7), а в (18) $\sigma_x \equiv 0$. В обоих случаях смещения кровли больше, чем смещения почвы, что обычно и наблюдается на практике. Более точное решение (кривая *1* на рис. 5) еще больше увеличивает разницу между смещениями

кровли и почвы. Как легко видеть, для решения, отвечающего кривой 2 и учитывающего линейность вертикальной составляющей веса пород при условии $\nu = 0$, $\tau = 0$ на Γ_1 , предельный переход к напряженному состоянию нетронутого массива не обеспечивает линейность $\sigma_x(y)$, что следует из сравнения с рис. 3. Аналогичный предельный переход для кривой 1 (рис. 5) выполняется автоматически.

ВЫВОДЫ

Установлены граничные условия, обеспечивающие линейность исходного поля напряжений для горизонтальной компоненты $\sigma_x(y)$ в месте проведения будущей выработки.

Учет линейности изменения исходного поля напряжений для вертикальной компоненты $\sigma_y(y)$ можно проводить различными вариантами формулировки граничных условий на наиболее удаленной от дневной поверхности линии счета.

Исходную задачу механики горных пород по расчету напряженно-деформированного состояния около выработки предлагается разделить на две независимые, учитывающие влияние только $\sigma_x(y)$ и только $\sigma_y(y)$, с последующим алгебраическим сложением результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С. Г. О напряжениях в породе над угольным пластом // Изв. АН СССР. ОТН. — 1942. — № 7–8.
2. Баренбратт Г. И. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. — № 11.
3. Mirenkov V. E. Finite stress in fracture mechanics. Engineering Fracture mechanics, 1994, Vol. 48, No. 1.
4. Liang Wang, Yuan-ping Cheng, Chun-gui Ge, Jia-xiang Chen, Wei Li, Hong-xing Zhou, Wang Hai-feng. Safety technologicis for the excavation of coal and gas outburst-prone coal seams in deep shafts. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 2013; 57.
5. Неверов С. А., Неверов А. А. Геомеханическая оценка устойчивости выработок выпуска руды при системах с обрушением // ФТПРПИ. — 2013. — № 2.
6. Назаров Л. А., Назарова Л. А., Карчевский А. Л., Мирошниченко Н. А. Оценка распределения давления в продуктивном пласте при добыче углеводородов по данным измерения смещений на дневной поверхности вмещающего породного массива // ФТПРПИ. — 2013. — № 6.
7. Johan Clausen. Bearing capacity of circular footing on a Hoek-Brown material. Int. J. of rock Mech. Min. Sci. 2013; 57.
8. Серяков В. М. Об одном способе учета реологических свойств горных пород при расчете напряженно-деформированного состояния массива в зоне подработки // ФТПРПИ. — 2010. — № 6.
9. Савченко С. Н. Деформирование геологической среды при отработке двух продуктивных пластов Штокмановского месторождения // ФТПРПИ. — 2010. — № 6.

Поступила в редакцию 2/IV 2014