Теплофизика и аэромеханика, 2012, том 19, № 4

УДК 536.3+536.42

К анализу процессов нагрева и плавления слоя полупрозрачного материала

Н.А. Рубцов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Анализируется модельное представление процессов нагрева и плавления применительно к постановке однофазной задачи Стефана в плоском слое полупрозрачного материала, односторонне нагреваемого и оплавляемого радиационно-конвективным способом.

Ключевые слова: нагрев, плавление, задача Стефана, фазовый переход, поглощение, излучение, отражение, радиационно-кондуктивный теплообмен.

Введение

Рассматривается открытая система, представленная плоским слоем однородной серой поглощающей и излучающей среды с частично поглощающими, излучающими и пропускающими границами. Левая граница слоя охлаждается за счет конвективной и радиационной теплоотдачи в окружающую среду с температурой, равной начальному значению температуры пластины (T_{C1}). Правая граница слоя нагревается за счет конвективного теплоподвода со стороны высокотемпературной среды, с температурой $T_{C2} > T_{C1}$, и внешнего диффузно излучающего источника теплового излучения с температурой, превышающей температуру окружающей его среды ($T_u > T_{C2}$) (см. рис.). Оптические свойства материала пластины в объеме и на границах в процессе нагрева пластины остаются неизменными. Теплофизические свойства материала пластины полагаются независимыми от температуры. В этих условиях конвективный нагрев пластины, осуществляемый через правую границу посредством теплопроводности, приводит к монотонному характеру температурных распределений по толщине пластины.

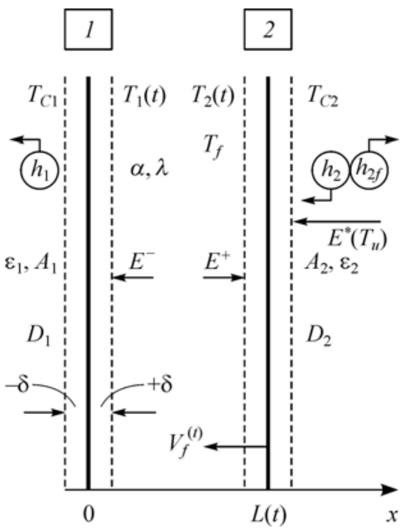

Рис. Геометрическая схема задачи (слой полупрозрачного материала).

Учет теплового излучения, проникающего в пластину через правую границу, а также излучения самой полупрозрачной границы ведет к возможности перегрева слоя, по сравнению с нагревом чистой теплопроводностью, и к формированию немонотонного температурного распределения в слое. Последнее связано с формированием в объеме слоя локальных источников (стоков) тепловыделения, имеющих смысл плотностей потоков объемного результирующего излучения.

При достижении нагреваемой границей пластины условий равновесного фазового перехода ее температура T_f фиксируется. Однако при этом объем среды, примыкающей к правой границе, может оказаться перегретым по отношению к постоянной температуре T_f. Тем не менее, предполагается, что фазовый переход в объеме перегретого материала не происходит, в силу его однородного состава, и осуществляется на границе, где указанная однородность нарушается [1]. Предполагается, что возникновение фазового перехода сопряжено с частичным замутнением поверхностного слоя за счет возникающих при фазовых переходах дефектов структуры материала и с соответствующим изменением оптических свойств границы *2*. При этом вместо A_2, ε_2, которые зачастую могут принимать нулевые значения (пластина с прозрачными границами), вводятся A_{2f}, ε_{2f}, имеющие конечные значения.

Формирование в объеме пластины тепловых процессов, носящих подобный динамический характер, сопряжено с необходимостью обоснования граничных условий. В этой связи, помимо законов сохранения энергии, привлекаются простейшие термодинамические соотношения.

1. Термодинамическое обоснование

В рамках однофазной задачи Стефана обычно рассматриваются лишь процессы переноса тепловой энергии. Применительно к полупрозрачной неподвижной среде обобщенное уравнение энергии записывается в виде:

$$\rho\frac{d(u+u_p)}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}\vec{E}_{4\pi} + \Phi_f. \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность вещества, t — время, u, u_p — плотность внутренней энергии вещества и излучения, $\vec{E}_{4\pi}$ — сферический вектор излучения, $\lambda \operatorname{grad} T = -\vec{q}$, где λ — коэффициент теплопроводности, T — температура, $\vec{q}$ — вектор плотности потока энергии теплопроводностью, Φ_f — локальный сток (источник) тепловой энергии, вызванный фазовым превращением в среде.

Рассматривая тепловое излучение в квазистационарном приближении и полагая

$$\operatorname{div}\vec{E}_{4\pi} = -\Phi_p, \tag{2}$$

где Φ_p — интегральное по спектру значение объемной плотности потока результирующего излучения, запишем (1) в виде:

$$\rho\frac{du}{dt} = \Phi - \operatorname{div}\vec{q}, \tag{3}$$

где

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_f \tag{4}$$

— обобщенный сток (источник) тепловой энергии.

С учетом второго закона термодинамики запишем уравнение (3) в виде:

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \Phi - \operatorname{div} \vec{q}, \tag{5}$$

где S — удельная энтропия.

Разделив члены уравнения (5) на температуру T и интегрируя их по объему системы V, с учетом соотношения

$$\frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{q} = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) + \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2},$$

получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\, S\, dv = \int_V \left[\frac{\Phi}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2}\right] dv - \int_V \operatorname{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) dv.$$

С помощью теоремы Гаусса–Остроградского, учитывая, что $T > 0$ есть скалярная величина, полученное выражение записывается в виде [2]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\, S\, dv = \int_V \left[\frac{\Phi}{T} - \frac{\vec{q}\, \operatorname{grad} T}{T^2}\right] dv - \oint_F \frac{\vec{q}\, \vec{n}}{T} df, \tag{6}$$

где F — поверхность системы.

Уравнение (6) отражает справедливость утверждения: скорость изменения энтропии системы определяется скоростью ее изменения как внутри системы, так и за счет ее теплового взаимодействия через поверхность F с окружающей средой. Из свойств открытых систем вытекает справедливость предположений:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\, S\, dv \geq -\oint_F \frac{\vec{q}\, \vec{n}}{T} df, \tag{7}$$

если тепловая энергия поступает в объем V через поверхность F;

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho\, S\, dv \leq -\oint_F \frac{\vec{q}\, \vec{n}}{T} df, \tag{8}$$

если тепловая энергия выходит из системы с объемом V через поверхность F.

Предположение (7) дает основание налагать на значения Φ, $\vec{q}$ и T следующее ограничение [2]:

$$[\Phi - \vec{q} \cdot \operatorname{grad} T / T] \geq 0. \tag{9}$$

Из предположения (8) вытекает ограничение:

$$[\Phi - \vec{q} \cdot \operatorname{grad} T / T] \leq 0. \tag{10}$$

Неравенство (9) выполняется при условии:

$$\text{если } \Phi \geq 0, \text{ то } \vec{q} \cdot \operatorname{grad} T \leq 0, \tag{11}$$

а неравенство (10) — при условии:

$$\text{если } \Phi \leq 0, \text{ то } \vec{q} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0. \tag{12}$$

Представленные соотношения (9), (10) могут быть использованы для анализа локальных тепловых состояний в объеме открытой системы, размерность — Вт/м^3.

При перемещении указанных характеристик из объема к поверхности их элементарные значения из объемных преобразуются в поверхностные с размерностью Вт/м^2. Применительно к определению (2) имеем:

$$\frac{dE_{\text{рез}}}{dx} = -\Phi_p. \tag{13}$$

С учетом определения $E_{\text{рез}}(x) \equiv \vec{E}_{4\pi}(x)\vec{n} = \lim\limits_{\delta\to 0}\left[E_{\text{пад}}(x-\delta) - E_{\text{пад}}(x+\delta)\right]$ получаем соотношение $\operatorname{div}\vec{E}_{4\pi}(x) \to \left[\frac{dE_{\text{пад}}(x-\delta)}{dx} - \frac{dE_{\text{пад}}(x+\delta)}{dx}\right]$, в котором $E_{\text{пад}}(x \pm \delta)$ — значения плотностей потоков полусферического поверхностного излучения, падающего на плоскость x с обоих сторон, $(x \pm \delta)$: $\lim\limits_{\delta\to 0} E_{\text{пад}}(x-\delta) = 2\pi \int\limits_{\mu=0}^{1} I(x,\mu)\mu d\mu$, $\lim\limits_{\delta\to 0} E_{\text{пад}}(x+\delta) = -2\pi \int\limits_{\mu=-1}^{0} I(x,\mu)\mu d\mu$, $\mu = \cos\theta$, где $I(x,\mu)$ — интенсивность излучения в точке x по направлению, образующему с вертикалью к плоскости x угол θ.

Используя второе определение плотностей потоков результирующего излучения в виде разности между поглощенным и собственным излучением, отмечаем, что поверхностные и объемные значения равновесного излучения физической границы x в выражениях для $\operatorname{div}\vec{E}_{4\pi}(x)$ и $\Phi_p(x)$ взаимно сокращаются. Это позволяет, следуя [3], записать соотношение для поглощающей среды:

$$\frac{dE_{\text{пад}}(x-\delta)}{dx} - \frac{dE_{\text{пад}}(x+\delta)}{dx} = \alpha\left[\varPhi_{\text{пад}}(x-\delta) + \varPhi_{\text{пад}}(x+\delta)\right], \tag{14}$$

Здесь $\lim\limits_{\delta\to 0} \varPhi_{\text{пад}}(x-\delta) = 2\pi\int\limits_{1}^{0} I(x,\mu)\mu d$, $\lim\limits_{\delta\to 0} \varPhi_{\text{пад}}(x+\delta) = 2\pi\int\limits_{0}^{-1} I(x,\mu)\mu d\mu$ — значения плотностей сферического (объемного) излучений, падающих на плоскость x с обоих сторон, $(x \pm \delta)$, $\delta \to 0$.

Производные $\frac{dE_{\text{пад}}(x \pm \delta)}{dx}$ отражают изменение плотности падающего поверхностного излучения по мере продвижения в глубину пластины. Полагая $\frac{dE_{\text{пад}}}{dx} \equiv -lE_{\text{пад}}$, легко показать справедливость соотношения

$$l\left[E_{\text{пад}}(x-\delta) - E_{\text{пад}}(x+\delta)\right] = k\left[\varPhi_{\text{пад}}(x-\delta) + \varPhi_{\text{пад}}(x+\delta)\right], \tag{15}$$

связывающего поверхностные и объемные характеристики излучения с помощью коэффициента l, отражающего свойства среды ослаблять (поглощать и изотропно рассеивать, $k = \alpha + \beta$) излучение, проникающее через прозрачную границу в глубину слоя [3].

Вводя характеристики излучений:

$$R = \frac{E_{\text{пад}}(x+\delta)}{E_{\text{пад}}(x-\delta)}, \quad g_1 = \frac{\varPhi_{\text{пад}}(x-\delta)}{E_{\text{пад}}(x-\delta)}, \quad g_2 = \frac{\varPhi_{\text{пад}}(x+\delta)}{E_{\text{пад}}(x-\delta)}, \tag{16}$$

не зависящие от глубины x, в уравнение (15), получаем соотношение $l = \dfrac{g_1 + g_2 R}{1 - R} k$, в котором R имеет смысл коэффициента отражения границы слоя, а $1/g_1$ и $1/g_2$ — взвешенных средних косинусов углов $(\mu = \cos\theta)$ между направлениями излучения, падающего слева $(x - \delta)$ и справа $(x + \delta)$ на границу x и нормалью к ней. В случае изотропного характера излучения $g_1 = g_2 = g = 2$ [3].

Известно, что фазовые превращения сопровождаются ростом флуктуаций плотности и увеличением коэффициентов объемного поглощения α и рассеяния β, причем $\beta \gg \alpha$. Это дает дополнительное основание приближенно считать границы полупрозрачного слоя поглощающими (A), пропускающими (D) и отражающими (R). Принимая во внимание соотношения $-dE_{\text{рез}} = \Phi_p dx$, $dq_f = \Phi_f dx$, где $dE_{\text{рез}}$ и dq_f — элементарные значения плотностей потоков результирующего излучения и тепловой энергии фазового превращения, пересекающих плоскость x, отмечаем, что между рассматриваемыми тепловыми характеристиками существует однозначное соответствие, позволяющее утверждать, что $\Phi_p \leftrightarrow E_{\text{рез}}$ и $\Phi_f \leftrightarrow q_f$.

С учетом приведенных соображений соотношения (11), (12) далее используются при определении граничных условий.

2. Обоснование граничных условий

Применительно к однофазной задаче Стефана рассматривается тепловое состояние открытой термодинамической системы в виде плоского слоя полупрозрачной конденсированной среды с проницаемыми для тепловых потоков (теплопроводности, конвекции и излучения) границами *1* и *2* (см. рис.). Нагрев пластины осуществляется через тепловоспринимающую границу 2, охлаждение — через теплоотдающую границу *1*.

Уравнение сохранения тепловой энергии

$$c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} - E_{\text{рез}}\right), \quad 0 < x < L \tag{17}$$

включает в себя молекулярную теплопроводность и тепловое излучение в слое пластины. Здесь ρ_s — плотность, c_s, λ_s — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности конденсированной среды пластины, $E_{\text{рез}}$ — полусферическая плотность потока результирующего излучения в объеме пластины.

Учитывая сопряженный характер переноса тепловой энергии на границах плоского слоя, результаты термодинамического обоснования, представленного в виде неравенств (11), (12), преобразуются применительно к анализу процессов на границах следующим образом. На теплоотдающей границе 1: в области внешней стороны границы $\Phi_p(x - \delta) \to E_{\text{рез},\,1}(x - \delta) > 0$, $q_{T1}(x - \delta) \equiv 0$, $q_{K1} \equiv h_1(T - T_{C1})\big|_{x-\delta} > 0$, $x = 0$; в области внутренней стороны границы $\Phi_p(x + \delta) \to E_{\text{рез},\,1}(x + \delta) < 0$, $q_{T1}(x + \delta) < 0$, $x = 0$, следовательно, на основании (12) получаем grad $T(x + \delta) \equiv \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} < 0$, $x = 0$. На тепловоспринимающей границе *2*: в области внутренней стороны границы $\Phi_p(x - \delta) \to E_{\text{рез},\,2}(x - \delta) > 0$, $q_{T2}(x - \delta) > 0$, $x = L$, следовательно, на основании (11) получаем grad $T(x - \delta) \equiv \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} < 0$, $x = L$;

в области внешней стороны границы $\Phi_p(x+\delta) \to E_{\text{рез},\,2}(x+\delta) < 0$, $q_{T2}(x+\delta) \equiv 0$, $q_{K2}(x+\delta) \equiv h_2(T - T_{C2})\big|_{x+\delta} < 0$, $x = L$. Здесь q_{Ti}, q_{Ki}, $E_{\text{рез},\,i}$ — плотности потоков с теплопроводностью, конвекцией и излучением в сечениях, примыкающих к границам $i = 1, 2$; δ — бесконечно малое изменение значения координаты x (см. рис.).

Суммируя вышеизложенное, составим балансовые уравнения для тепловых потоков на границах *1* и *2* в виде

$$E_{\text{рез},\,1}(x-\delta) + h_1(T - T_{C1})\big|_{x-\delta} - E_{\text{рез},\,1}(x+\delta) - \lambda_S \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} = 0, \; x = 0, \tag{18}$$

$$E_{\text{рез},\,2}(x-\delta) - \lambda_S \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} - E_{\text{рез},\,2}(x+\delta) - h_2(T - T_{C2})\big|_{x+\delta} = 0, x = L. \tag{19}$$

Запишем (18) и (19) в виде соотношений

$$-\lambda_S \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} + h_1(T - T_{C1})\big|_{x-\delta} + \left|E_{\text{рез},1}\right| = 0, \; x = 0, \tag{20}$$

$$\lambda_S \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} + h_2(T - T_{C2})\big|_{x+\delta} - \left|E_{\text{рез},2}\right| = 0, \; x = L, \tag{21}$$

приведенных ранее в работе [4] и являющихся граничными условиями уравнения энергии (17), описывающими, с учетом начального условия

$$T(x,\,t) = T_1 = \text{const}, \; t = 0, \tag{22}$$

краевую задачу для решения первого этапа однофазной задачи Стефана (нагрев пластины).

В уравнениях (20), (21) используются обозначения

$$\left|E_{\text{рез},i}\right| = E_{\text{рез},i}(x-\delta) - E_{\text{рез},i}(x+\delta), \; i = 1, 2, \tag{23}$$

удовлетворяющее условию (15) для $x \in [0, L]$, а также — коэффициентов конвективного теплообмена h_i на границах $i = 1, 2$ при $T_{C2} > T_{C1}$.

Для общности проводимого ниже анализа предполагается, что границы пластины частично поглощают (A_i), отражают (R_i), пропускают (D_i) тепловое излучение и удовлетворяют условию $A_i + R_i + D_i = 1$, $i = 1, 2$, а также — закону Кирхгофа, $A_i = \varepsilon_i$, где A_i, R_i, D_i, ε_i — полусферические значения поглощательной, отражательной, пропускательной и излучательной способностей границ $i = 1, 2$. В связи с этим значения перепадов плотностей потоков результирующего излучения $|E_{\text{рез},\,i}|$ определяются следующим образом [4]:

$$\left|E_{\text{рез},1}\right| = A_1[E^-(x+\delta) + E_b(T_{C1})] - \varepsilon_1(1+n^2)E_b(T_1), \; x = 0, \tag{24}$$

$$\left|E_{\text{рез},2}\right| = A_2[E^+(x-\delta) + E^*] - \varepsilon_2(1+n^2)E_b(T_2), \; x = L. \tag{25}$$

Здесь $E_b(T_i)$ — плотности потоков равновесного излучения при температурах границ с $i = 1, 2$ и среды $C1$; n — показатель преломления излучения материалом пластины; E^* — плотность потока полусферического излучения, падающего на внешнюю поверхность границы *2* ($x = L$); $E^-(x+\delta)$, $E^+(x-\delta)$ — плотности потоков излучения среды пластины, падающих на внутренние поверхности границ *1* ($x = 0$)

и *2* ($x = L$) соответственно, которые определяются из решения уравнения переноса энергии излучения [4].

В процессе нагрева пластины и достижения ее правой границей температуры фазового превращения T_f осуществляется переход к решению второго этапа задачи, связанного с рассмотрением уравнения энергии [4]:

$$c_s\rho_s\frac{\partial T}{\partial t}=c_s\rho_s\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_s\frac{\partial T}{\partial x}-E_{\text{рез}}\right),\qquad(26)$$

учитывающего зависимость координаты от времени. Граничное условие уравнения (26) на теплоотдающей поверхности *1* остается неизменным и записывается уравнением (20). Возникновение стока тепловой энергии на границе *2*, вызванное фазовым переходом первого рода, и объемное поглощение излучения, проникающего в пластину через границу *2*, приводят к перегреву среды по отношению к фиксированной температуре этой границы (T_f).

Соответствующее граничное условие составляется из следующих соображений. Прежде всего предполагается, что фазовый переход первого рода характеризуется расслоением на фазы. Это означает, что фронт фазового перехода, $x(t) = L(t)$, условно состоит из внутренней подобласти $[x(t) - \delta]$, принадлежащей конденсированной (твердой) среде с фазовым преобразованием, и внешней подобласти $[x(t) + \delta]$, принадлежащей чистой жидкой фазе. В предположении перегрева среды пластины, примыкающей к границе *2*, начало фазового перехода связано с формированием стока тепловой энергии на границе $x = L(t)$ за счет излучения, проникающего через сечения $(x - \delta)$ и $(x + \delta)$, и теплопроводности, проникающей через сечение $(x - \delta)$ и покидающей фронт фазового перехода через сечение $(x + \delta)$. Следовательно, согласно (4), (15) и (16), имеем $\Phi \equiv \Phi_p + \Phi_f$ и $\Phi(x - \delta) \to \to (E_{\text{рез, 2}}(x - \delta) + q_f) < 0$, а потому при $q_{T2}(x - \delta) < 0$, согласно (12), получаем $\operatorname{grad} T\big|_{x-\delta} \equiv \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} < 0$, $x = L(t)$. Аналогичным образом, так как $\Phi_p(x + \delta) \to \to E_{\text{рез}}(x + \delta) < 0$, то при $q_{T2}(x + \delta) > 0$, согласно (12), имеем $\operatorname{grad} T\big|_{x+\delta} \equiv \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} > 0$, $x = L(t)$. Учитывая указанное выше расслоение фронта фазового перехода на твердую и жидкую фазы, а также полагая, что скрытая теплота фазового перехода выделяется только в твердой фазе, преобразуем граничное условие (19) к виду

$$E_{\text{рез, 2}}(x-\delta)-\lambda_S\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta}-E_{\text{рез, 2}}(x+\delta)-\left(-\lambda_l\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta}\right)-$$

$$-\,h_{2f}\,(T_l-T_{C2})\big|_{x+\delta}=q_f,\quad x=L(t).\qquad(27)$$

Здесь

$$q_f=\rho_{sf}\Delta U_f V_f(t)\ \text{—}\qquad(28)$$

плотность потока тепловой энергии, воспринимаемой подвижной границей за счет фазового превращения (плавления) с учетом ее перемещения, где $\Delta U_f = U_l - U_s$ — скрытая удельная теплота фазового превращения, определяемая при температуре плавления $T_f = T_l$, U_l, U_s — плотности внутренней энергии жидкой и твердой фаз, $V_f(t) = \partial x(t)/\partial t$ — скорость движения плоского фронта фазового перехода, λ_l — коэффициент теплопроводности жидкой фазы, $h_{2f}(T_l - T_{C2})$ — плотность потока тепловой энергии, отводимой с поверхности жидкой фазы испарением (абляцией), записываемая в форме уравнения Ньютона с коэффициентом теплоотдачи h_{2f}. Запишем (27) с учетом (23) в виде

$$-\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x-\delta} + \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\delta} + \left|E_{\text{рез},2}\right|_f - h_{2f}(T_l - T_{C2}) = q_f, \quad x = L(t). \tag{29}$$

Радиационная составляющая уравнения (29), записываемая в виде $|E_{\text{рез},2}|_f$, имеет смысл плотности потока результирующего излучения, поглощаемого фронтом фазового превращения за счет разности плотностей потоков со стороны твердой ($E_{\text{рез},2f}(x-\delta)$) и жидкой ($E_{\text{рез},2f}(x+\delta)$) фаз. При этом предполагается, что излучение, $E_{\text{рез},2f}(x+\delta)$, проникающее через сечение $(x+\delta)$, достигает фронта фазового перехода без ослабления в оптически тонкой пленке жидкой фазы, образующейся в процессе испарения. Принимая во внимание систему координат для плоского слоя (см. рис.), на основании физических соображений отметим, что $V_f(t) \le 0$. Поэтому, исходя из единообразия описания процесса фазового перехода, условие теплообмена на подвижной границе (29) преобразуем к виду

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x-\delta} - \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\delta} - \left|E_{\text{рез},2}\right|_f + h_{2f}(T_l - T_{C2}) = \rho_{sf}\Delta U_f V_f(t), \quad x = L(t), \tag{30}$$

где $V_f(t) = [\partial x(t)/\partial t] \ge 0$. Следуя работе [5], запишем (30) в виде

$$-\left[q_{2f}^{\Sigma}\right] = \rho_f \Delta U_f V_f(t). \tag{31}$$

Здесь

$$\left[q_{2f}^{\Sigma}\right] = q_{2f}^{\Sigma}(x-\delta) - q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta), \quad x = L(t), \tag{32}$$

$$q_{2f}^{\Sigma}(x-\delta) = -\lambda_S \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x-\delta} + E_{\text{рез},2f}(x-\delta), \tag{33}$$

$$q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta) = \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\delta} - E_{\text{рез},2f}(x+\delta) - h_{2f}\,(T_l - T_{C2})\big|_{x+\delta}, \tag{34}$$

где, с учетом определения $E_{\text{рез},i} = E_{\text{пад},i} - E_{\text{эф},i}$, для проницаемой относительно теплового излучения границей i получаем значения плотностей потоков полусферического результирующего излучения вблизи внутренней и внешней поверхностей границы *2*, записываемых в виде соотношений:

$$E_{\text{рез},2f}(x-\delta) = (A_{2f} + D_{2f})E^{+}_{\text{пад},2}(x-\delta) - \varepsilon_{2f} n^2 \sigma_0 T^4(x-\delta) - D_{2f}E^{*}_{\text{пад},2}(x+\delta), \tag{35}$$

$$-E_{\text{рез},2f}(x+\delta) = (A_{2f} + D_{2f})E^{*}_{\text{пад},2}(x+\delta) - \varepsilon_{2f}\sigma_0 T^4(x+\delta) - D_{2f}E^{+}_{\text{пад},2}(x-\delta), \tag{36}$$

учитывающих A_{2f}, ε_{2f}, D_{2f} — значения полусферических поглощательных, излучательных и пропускательных способностей границы *2*, претерпевающей фазовый переход. Уравнение (23), с подставленными в него (35) и (36), удовлетворяет соотношению (25).

3. Анализ теплообмена на подвижной границе

Начало фазового перехода связано с формированием локального стока тепловой энергии (Ф > 0), который определяется радиационно-кондуктивной теплопередачей вблизи фронта фазового перехода со стороны конденсированного материала и внешней среды.

Запишем граничное условие (29) с учетом (32) в виде соотношения, характеризующего баланс плотностей потоков тепловой энергии, пересекающих фронт фазового перехода:

$$\rho_{sf}\Delta U_f V_f(t)+q_{2f}^{\Sigma}(x-\delta)=q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta),\quad x=L(t), \tag{37}$$

Если в (34) выполняется условие $q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta)>0,\ x=L(t)$, то левая часть уравнения (37) приобретает смысл количественной характеристики поступления (выделение энергии через сечение ($x-\delta$)) тепловой энергии во фронт фазового перехода со стороны конденсированной фазы, а правая часть — оттока тепловой энергии (поглощение энергии сечением ($x+\delta$)) от фронта со стороны жидкой фазы в окружающую среду. В условиях, когда $h_{2f}(T_l-T_{2c})>\lambda_l\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta}-E_{\text{рез}}$, возможна ситуация прекращения фазового перехода. Если $q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta)<0$, то суммарная тепловая энергия поступает во фронт фазового перехода через сечение ($x+\delta$) со стороны окружающей среды. Последнее может приводить к перегревам конденсированной фазы, охлаждаемой через левую границу ($x=0$) пластины. В частном случае, когда $q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta)\equiv 0,\ x=L(t)$, рассматривается классическое решение однофазной задачи Стефана [5]. Указанное решение связано с предположением отсутствия суммарного результирующего потока $q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta)$ в сечении $(x+\delta),\ \ x=L(t)$. Составляющие указанного потока взаимно уравновешиваются, что равносильно тепловой изоляции сечения $(x+\delta)$. Фазовый переход и движение фронта фазового перехода осуществляется за счет потока в сечении $(x-\delta),\ x=L(t)$. Другими словами, граничное условие (30) в этом случае приобретает вид:

$$\lambda_s\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta}-(A_{2f}+D_{2f})E^{+}(x-\delta)+D_{2f}E^{*}(x+\delta)+$$
$$+\varepsilon_2 n^2\sigma_0 T^4(x-\delta)=\rho_{sf}\Delta U_f V_f(t), \tag{38}$$

где $T(x-\delta)\equiv T_f$.

Если фронт фазового перехода оказывается непроницаемым для теплового излучения, то из (36) следует:

$$-E_{\text{рез},2}(x+\delta)=A_{2f}E^{*}(x+\delta)-\varepsilon_{2f}\sigma_0 {T_f}^4, \tag{39}$$

а граничное условие (38) принимает вид

$$\lambda_s\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta}-A_{2f}E^{+}(x-\delta)+\varepsilon_2 n^2\sigma_0 T_f^4=\rho_{sf}\Delta U_f V_f(t),\quad x=L(t). \tag{40}$$

В частном случае, когда $A_{2f}=\varepsilon_{2f}=0$ и фазовый переход сопровождается появлением большого количества рассеивающих (непоглощающих) центров, из (36) и (38), соответственно, вытекают условия:

$$-E_{\text{рез},2}(x+\delta)=D_{2f}\left[E^{*}(x+\delta)-E^{+}(x-\delta)\right], \tag{41}$$

$$\lambda_s \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} + D_{2f}\left[E^*(x+\delta) - E^+(x+\delta)\right] = \rho_{sf}\Delta U_f V_f(t), \quad x = L(t). \tag{42}$$

Заметим, что при $D_{2f} \equiv 1$ (абсолютная проницаемость границы *2*) разность встречных потоков E^*, E^+ в выражениях (41) и (42) сохраняется. Если $A_{2f} = D_{2f} \equiv 0$, $R_{2f} = 1$, то $E_{\text{рез},2}(x+\delta) = 0$, а из (38) и (34) вытекает тождество:

$$\lambda_s \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} = \rho_{sf}\Delta U_f V_f(t); \quad \lambda_l \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} = h_{2f}(T_l - T_{c2}).$$

Предполагаемая модель включает в себя обобщенное уравнение теплопроводности, описывающее динамику температурных полей в конденсированной фазе, и условие Стефана, в котором результирующий тепловой поток со стороны фазы с постоянной температурой T_f тождественно равен нулю.

Имея в виду, что $\lambda_l \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} \equiv 0$ (изотермическая жидкая фаза), из условия $q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta) \equiv 0$, согласно (34), вытекает тождество $-E_{\text{рез},2}(x+\delta) = h_{2f}(T_f - T_{C2})$, описывающее компенсацию плотности потока результирующего излучения в сечении $(x+\delta)$, $x = L(t)$ тепловым потоком, образующимся в этом сечении за счет процессов испарения жидкой фазы. Запишем его с учетом (36) в виде:

$$h_{2f}(T_f - T_{c2}) = (A_{2f} + D_{2f})E^*(x+\delta) - \varepsilon_{2f}\sigma_0 {T_f}^4 - D_{2f}E^+(x-\delta). \tag{43}$$

Так как по условию задачи $E^*(x+\delta) = \text{const}$ и $T_f = \text{const}$, то правая часть этого соотношения содержит единственную динамическую составляющую в последнем члене $\left(D_{2f}E^+(x-\delta)\right)$, имеющем смысл плотности потока излучения, выходящего из объемно излучающей и поглощающей пластины, которая меняет во времени свою толщину. Следовательно, на основании (43),

$$h_{2f} = \frac{-E_{\text{рез},2}(x+\delta)}{T_f - T_{C2}} \equiv h_{2f}(x+\delta), \quad x = L(t). \tag{44}$$

Соотношение (44) позволяет определить в процессе решения как уровень, так и динамику значений h_{2f}, условно характеризующих принятую модель теплоотдачи за счет испарения.

Высказанные соображения дают основание для записи условия теплообмена на подвижной границе в виде ранее представленного соотношения (30):

$$\lambda_s \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} - \left|E_{\text{рез},2}\right| + h_{2f}(x+\delta)(T_f - T_{C2}) = \rho_{sf}\Delta U_f V_f(t), \quad x = L(t). \tag{45}$$

в котором учитываются неравновесные условия взаимодействия фронта фазового перехода с внешней средой за счет процессов испарения. По-видимому, аналогичным образом формируются неравновесные условия теплоотдачи за счет излучения выходящего из слоя переменной толщины через абсолютно черный фронт фазового перехода [6].

Выводы

С помощью простейших соображений термодинамического анализа открытой системы дан вывод граничных условий краевой задачи о радиационно-кондуктивном теплообмене в плоском слое с фазовым переходом на одной из границ. Показано, что классическое решение однофазной задачи обобщается на случай равновесного значения суммарного потока, инициирующего фазовый переход. Неравновесные значения указанного потока могут рассматриваться с привлечением параметров неравновесности (испарения, излучения), характеризующих нестационарное взаимодействие пластины с активной внешней средой. При этом решение однофазной задачи Стефана в слое полупрозрачной среды может оказаться монотонным и устойчивым по отношению к произвольным значениям оптических свойств границ и объема.

Список литературы

1. **Tseng C.C., Viskanta R.** On the hypothesis of internal phase change // Intern. Communications in Heat and Mass Transfer. 2005. Vol. 32. P. 1267–1272.
2. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М.: изд-во ИЛ, 1963. 256 с.
3. **Гершун А.А.** К теории светового поля в рассеивающей среде // ДАН СССР. 1945. Т. 49, № 8. С. 578–580.
4. **Рубцов Н.А.** К решению однофазной задача Стефана в слое полупрозрачного материала // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 3. С. 471–482.
5. **Мейрманов А.М.** Задачи Стефана. Новосибирск: Наука. 1986. 239 с.
6. **Le Dez V., Yousefian F., Vaillon D., Lemonnier D., Lallemand M.** Probléme de Stefan direct dans un milien semi-transparent gris // J. de Phys. III. 1996. Vol. 6. P. 379–390.

Статья поступила в редакцию 19 мая 2011 г.