

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г., Крылов В. С., Воротилин В. П. К теории нестационарной диффузии из движущейся капли.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 3.
2. Ruckenstein E. Mass transfer between a single drop and continuous phase.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1967, vol. 10, p. 1785.
3. Ruckenstein E. A generalized penetration theory for unsteady convective mass transfer.— Chem. Engng Sci., 1968, vol. 23, p. 363.
4. Ruckenstein E., Berbente C. Mass transfer to falling liquid film at low Reynolds numbers.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1968, vol. 11, p. 743.
5. Ruckenstein E., Muntean O. Mass transfer between a bubble and a oscillating liquid.— Chem. Engng Sci., 1970, vol. 25, N 7.
6. Chao B. T. Transient heat and mass transfer to translating droplet.— Trans. ASME, Ser. C. J. Heat Transfer, 1969, vol. 91, N 2.
7. Ruckenstein E. Unsteady mass transfer near fluid-liquid interfaces.— Chem. Engng Sci., 1970, vol. 25, N 11.
8. Гунало Ю. П., Полянин А. Д. и др. О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
9. Гунало Ю. П., Полянин А. Д. и др. Об интегрировании нестационарного уравнения теплообмена движущихся в жидкости тел.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6.
10. Полянин А. Д. О диффузионном взаимодействии капель в жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.
11. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
12. Sutfon W. G. L. On the equation of diffusion in turbulent medium.— Proc. Roy. Soc. A, 1943, vol. 182, N 988.
13. Гунало Ю. П., Полянин А. Д. и др. Конвективная диффузия к капле при произвольных условиях поглощения. Приближение диффузионного пограничного слоя.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6.
14. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
15. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

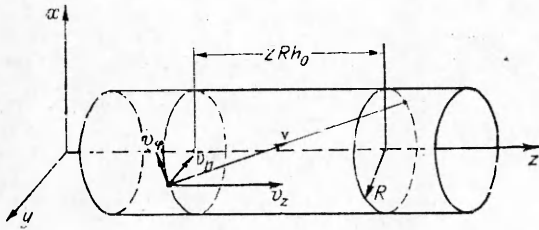
УДК 533.15

ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ И ТЕПЛОВОЙ КРИП ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЯДЕР РАССЕЙНИЯ ГАЗА НА ПОВЕРХНОСТИ КАНАЛА

Ю. И. Маркелов, Б. Т. Породнов,
В. Д. Селезнев, А. Г. Флягин

(Свердловск)

Широко известная максвелловская диффузно-зеркальная модель граничных условий не способна полностью описать существующие в настоящее время экспериментальные результаты по исследованию течения разреженного газа в длинных каналах. В рамках этой модели не удается объяснить эффект аккомодационной откачки Хобсона [1], температурную зависимость свободномолекулярного приведенного расхода газа в капиллярах [2, 3]. Поэтому возникает необходимость разработки и рассмотрения новых, более адекватно описывающих взаимодействие газа с поверхностью моделей граничных условий. В работе [4] предложено достаточно простое двухпараметрическое ядро рассеяния, которое следует как из физического, так и из чисто математического анализа проблемы. Однако это ядро не учитывает возможности захвата молекул на поверхности с последующим диффузным их испарением. В данной работе предлагается учесть этот механизм взаимодействия молекул с поверхностью путем применения суперпозиции ядра, предложенного в [4], с диффузной функцией рассеяния. Предлагаемая комбинированная модель граничных условий и ядро рассеяния Черчиньяни-Лампис применяются затем в задаче об изотермическом и неизотермическом течении газа в свободномолекулярном режиме в длинном канале с целью проверки их эффективности при описании соответствующих экспериментальных данных.



1. Постановка задачи.

Рассматривается изотермическое течение одноатомного газа в свободномолекулярном режиме в бесконечно длинном канале цилиндрической геометрии при наличии градиента давления вдоль канала. Геометрия задачи

изображена на фигуре. Вектор скорости молекулы удобно представлять через компоненты v_n , v_ϕ , v_z , зависящие от координат точки наблюдения (v_n — радиальная компонента). Газ имеет температуру стенки T .

При расчете макрохарактеристик течения газа используются соотношения, полученные в [5], где для пуазейлевского потока найдено следующее выражение:

$$(1.1) \quad I_p = I_{p0}(1 + 3\langle h^+ h_0 \rangle),$$

$$\langle f(\mathbf{v}) \rangle = \frac{2\beta^2}{\pi} \int_+ v_n \exp(-\beta v^2) f(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

где $I_{p0} = -\frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} R^3 n'$ — пуазейлевский поток через канал с полностью аккомодирующей поверхностью; n' — градиент числовой плотности молекул; R — радиус канала; $\beta = m/2kT$; m — масса молекулы; k — постоянная Больцмана; $h_0 = v_n v_z / (v_n^2 + v_\phi^2)$ следует из геометрии задачи; h^+ — решение интегрального уравнения

$$(1.2) \quad h^+ = \hat{P}h_0 + \hat{P}h^+,$$

$$\hat{P}f(\mathbf{v}) = \int_+ P(\mathbf{v}_R \rightarrow \mathbf{v}') f(\mathbf{v}') d\mathbf{v}', \quad \mathbf{v}_R = (-v_n, v_\phi, v_z),$$

$P(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ — ядро рассеяния молекул разреженного газа на поверхности [4]. Значок $+$ под знаком интеграла означает интегрирование по верхнему полупространству скоростей.

Молекулярный поток под действием градиента давления сопровождается потоком кинетической энергии (механокалорический эффект):

$$(1.3) \quad Q = Q_0 \left(1 + \frac{3}{2} \beta \langle v^2 h^+ h_0 \rangle\right),$$

$$\text{где} \quad Q_0 = -\frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} R^3 n' kT.$$

Механокалорический эффект является перекрестным к эффекту теплового крипа (поток молекул I_T при наличии градиента температуры на стенке канала). Следуя [5], можно получить соотношение

$$(1.4) \quad \gamma = 5/2 - Q/I_p kT,$$

где $\gamma = (I_T/I_{T0})I_{p0}/I_p$ — характеристика термомолекулярной разности давлений (ТРД), возникающей в системе двух колб с газом, соединенных капилляром и поддерживаемых при различных температурах; $I_{T0} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} R^3 \frac{n}{T} \frac{dT}{dz}$ — поток теплового крипа при полностью диффузном отражении.

Знание выражений для потока Пуазейля (1.1) и для показателя ТРД γ (1.4) позволяет рассчитать неизотермический молекулярный поток I_T .

2. Вычисление изотермического и неизотермического потоков газа для ядра рассеяния общего вида. Для реализации вычислений по форму-

лам (1.1), (1.3) необходимо решить интегральное уравнение (1.2). Приближенное решение этого уравнения можно получить вариационным методом без ограничения какими-либо специфическими моделями ядер рассеяния. Для уравнения (1.2) составляется вариационный функционал [5]

$$(2.1) \quad J\{h^+\} = \langle h^+(2\hat{P}h_0 + \hat{P}h^+ - h^+) \rangle$$

и предполагается, что

$$(2.2) \quad h^+ = A\hat{P}h_0.$$

При $A=1$ эта функция является первым приближением решения уравнения (1.2) итерационным методом. Выражение (2.2) минимизирует функционал при

$$(2.3) \quad A = S_2/(S_2 - S_3), \quad S_k = \langle h_0\hat{P}^k h_0 \rangle.$$

Теперь, зная $h^+(\mathbf{v})$, можно записать выражения потоков и показателя ТРД γ для произвольного ядра рассеяния

$$(2.4) \quad I_p = I_{p0}(1 + 3AS_1);$$

$$(2.5) \quad Q = Q_0(1 + (3/2)\beta A \langle v^2 h_0 \hat{P} h_0 \rangle);$$

$$(2.6) \quad \gamma = \frac{5}{2} - \frac{2\left(1 + \frac{3}{2}\beta A \langle v^2 h_0 \hat{P} h_0 \rangle\right)}{(1 + 3AS_1)}.$$

Решение уравнения (1.2) можно представить также в виде ряда Неймана

$$(2.7) \quad h^+ = \hat{P}h_0 + \hat{P}^2h_0 + \hat{P}^3h_0 + \dots$$

Если ряд Неймана (2.7) сходится, то потоки имеют вид

$$(2.8) \quad I_p = I_{p0} \left(1 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} S_k\right);$$

$$(2.9) \quad Q = Q_0 \left(1 + \frac{3}{2} \beta \sum_{k=1}^{\infty} V_k\right),$$

где

$$V_k = \langle v^2 h_0 \hat{P}^k h_0 \rangle.$$

Полученные выражения удобно использовать при анализе влияния различных ядер рассеяния, описывающих взаимодействие газа с поверхностью, на макрохарактеристики течения разреженного газа.

3. Расчет макрохарактеристик течения газа для некоторых ядер рассеяния. Для максвелловской модели граничных условий уравнение (1.2) имеет точное решение. После ряда несложных преобразований можно получить

$$(3.1) \quad I_p = I_{p0} \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right), \quad Q = Q_0 \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right), \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

где α — доля диффузно-отраженных молекул.

Черчиньяни и Лампис предложено следующее двухпараметрическое ядро рассеяния [4]:

$$(3.2) \quad P_c(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{2\beta^2}{\pi} \frac{v_n}{\alpha_n \alpha_t (2-\alpha_t)} \exp \left\{ -\beta \left(\frac{v_n^2 + (1-\alpha_n)v_n'^2}{\alpha_n} + \frac{[\mathbf{v}_t - (1-\alpha_t)\mathbf{v}_t']^2}{\alpha_t(2-\alpha_t)} \right) \right\} I_0 \left(\frac{\sqrt{1-\alpha_t}}{\alpha_n}, 2\beta v_n v_n' \right),$$

$$v_n < 0, v_n' > 0, 0 \leq \alpha_t \leq 2, 0 \leq \alpha_n \leq 1,$$

I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента первого рода нулевого порядка.

Параметры α_n и α_t совпадают с кнудсеновскими коэффициентами аккомодации нормальной энергии и тангенциального импульса [6].

Вследствие сложности вида ядра для него не удается получить аналитический вид вариационного решения уравнения (1.2). Только при условии, что α_n и α_t близки к 1, можно прийти к следующим простым выражениям для потоков и показателя γ :

$$(3.3) \quad I_p = I_{p0} \left\{ 1 + \frac{3\pi(1-\alpha_t)}{8\alpha_t} \left[1 + \frac{1-\alpha_t}{16} \right] \right\};$$

$$(3.4) \quad Q = Q_0 \left\{ 1 + \frac{3\pi(1-\alpha_t)}{32\alpha_t} \left[5 - \frac{1-\alpha_n}{16} \right] \right\};$$

$$(3.5) \quad \gamma = \frac{1}{2} - \frac{3\pi(1-\alpha_t)}{16} \left[1 - \frac{5}{16}(1-\alpha_n) - \frac{3\pi-8}{8}(1-\alpha_t) \right].$$

Как видно из выражений (3.3)–(3.5), зависимость макрохарактеристик течения газа от параметра α_n является более слабой, чем от α_t . Это дает основание рассмотреть ядро Черчиньяни — Лампис (3.2) с одним параметром α_t , когда $\alpha_n = 1$. В этом случае для него возможно без каких-либо упрощений для произвольных значений α_t провести все математические выкладки при решении интегрального уравнения (1.2) вариационным методом и вычислить скобочные выражения S_k , V_k , необходимые при расчете макрохарактеристик течения газа:

$$(3.6) \quad S_k = \frac{\pi}{2(1-\alpha_t)^k} \left\{ \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - (1-\alpha_t)^{2k}}}{2} \right| + 1 - \sqrt{1 - (1-\alpha_t)^{2k}} \right\};$$

$$(3.7) \quad V_k = \frac{3}{2\beta} S_k + \frac{\pi}{8\beta} (1-\alpha_t)^k.$$

Необходимо отметить, что если аккомодация близка к полной, то выражения для макрохарактеристик, полученные для однопараметрического ядра Черчиньяни — Лампис, совпадают с выражениями (3.3)–(3.5), если в последних пренебречь членами порядка $(1-\alpha_{n,t})^2$.

Подстановка скобок S_k и V_k в формулы (2.8), (2.9) позволяет рассчитывать значения I_p , Q , γ , I_T в случае, когда $h^+(v)$ представима в виде ряда Неймана.

С целью получения температурной зависимости $I_p(T)$ рассмотрим физический вывод ядра рассеяния Черчиньяни — Лампис [4]. В этой работе взаимодействие молекул газа с твердым телом рассматривается как случайный процесс блуждания молекул в поверхностном слое толщиной d с характерной длиной диффузии l в пространстве скоростей в касательном к поверхности направлении. Параметр ядра (3.2) α_t определяется через характеристики взаимодействия газ — твердое тело l , d следующим образом [4]:

$$(3.8) \quad \alpha_t = 1 - \exp \{-2d/l\}.$$

Будем полагать, что конечность длины диффузии обусловлена тепловыми колебаниями твердого тела и неидеальностью структуры поверхности (например, наличием шероховатости). Тогда вероятность столкновения молекулы в поверхностном слое $2d/l$ будет суммой вероятностей столкновения с дефектами поверхности p и с фононами тепловых колебаний. Считая, что вероятность столкновения с фононами пропорциональна их числу, которое, в свою очередь, пропорционально температуре, выражение (3.8) можно переписать в виде

$$(3.9) \quad \alpha_t = 1 - \exp \{-(p + qT)\},$$

где q — некоторая постоянная, характеризующая сечение взаимодействия атомов газа с фононами твердого тела.

Физический вывод функции рассеяния (3.2) не учитывает возможности захвата молекул газа поверхностью с последующим их испарением по диффузному закону. Поэтому вполне логичным будет комбинирование ядра Черчиньяни — Лампис (3.2) с диффузным ядром $P_0(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ при помощи введения коэффициента конденсации (или прилипания) s в форме

$$(3.10) \quad P_k(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = sP_0(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) + (1 - s)P_c(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}).$$

Наиболее простой подход к явлениям конденсации и аккомодации был предложен в [7]. Следуя [7], выражение для коэффициента прилипания s можно представить в виде

$$(3.11) \quad s = 1 - \exp\{-T_s/T\},$$

где T_s — температура, соответствующая критической энергии захвата молекулы поверхностью.

Вычисление изотермического потока, согласно формуле (2.4), с использованием ядра (3.10) и выражений (3.9), (3.11) приводит к следующей температурной зависимости приведенного расхода ω :

$$(3.12) \quad \omega = \frac{I_p}{I_{p0}} = 1 + \frac{3\pi}{8} e^{-\frac{T_s}{T}} (e^{p+qT} - 1)^{-1}.$$

4. Сравнение с экспериментом. В работе [1] экспериментально показано, что показатель ТРД γ в свободномолекулярном режиме отличается от значения $\gamma = 1/2$, которое следует не только для полностью диффузного отражения, но и для зеркально-диффузной схемы при произвольной доле диффузного отражения (3.4). Применение граничных условий Черчиньяни — Лампис позволяет получить формулу (3.5), объясняющую отклонение γ от $1/2$.

По экспериментальным данным работ [1, 2], используя соотношения (3.3), (3.5) при $\alpha_n = 1$, можно рассчитать параметр α_t для ядра Черчиньяни — Лампис. В табл. 1 представлены значения α_t для ряда инертных газов на плавленом стекле, рассчитанные по данным исследования эффекта аккомодационной отсечки [1] и изотермического течения разреженных газов [2]. Значения параметра α_t , соответствующие изотермическому течению газов, приведены для двух температур, при которых поддерживались концы каналов в опытах Хобсона.

Удовлетворительное согласие значений α_t , полученных в опытах разного типа, подтверждает эффективность использования граничных условий Черчиньяни — Лампис при описании изотермического и неизотермического движения разреженных газов.

Экспериментальные данные по температурной зависимости приведенных свободномолекулярных изотермических потоков ω , полученные в работах [2, 3] для длинных капилляров из плавленого стекла, сведены в табл. 2. Отличие величин ω от единицы обусловлено неполной аккомодацией молекул газа на поверхности твердого тела. Для каждого из газов, приведенных в табл. 2, нелинейным методом наименьших квадратов из условия минимального отклонения экспериментального набора значений

Таблица 1

Параметр	T, К	He	Ne	Ar	Kr	Xe
α_t [1]	77—295	0,79	0,80	0,91	0,94	0,94
	77	0,75	0,84	0,89	—	—
α_t [2]	295	0,91	0,89	0,97	0,99	1,00

Т а б л и ц а 2

Т, К	ω				
	He	Ne	Ar	H ₂	D ₂
Работа [2]					
77,2	1,389	1,233	1,144	1,210	1,210
194,7	1,247	1,223	1,092	1,137	1,152
Работа [3]					
295	1,148	1,167	1,047	1,047	1,053
395	1,096	1,128	1,058	1,047	1,049
440	1,079	1,119	1,075	1,047	1,062
490	1,060	1,123	1,099	1,049	1,058

Т а б л и ц а 3

Параметр	He	Ne	Ar	H ₂	D ₂
T_s , К	33,1	33,9	122,0	45,1	66,0
$\pm \Delta T_s \cdot 10^1$	3	14	23	48	66
p	0,741	1,271	0,280	0,920	0,666
$\pm \Delta p \cdot 10^3$	3	16	23	60	74
$q \cdot 10^2$, К ⁻¹	0,451	0,232	0,919	0,640	0,716
$\pm \Delta q \cdot 10^5$	1	4	6	16	20

$\omega(T_s)$ от теоретической зависимости (3.12) были найдены значения параметров p , q , T_s , которые приведены в табл. 3.

Выражение (3.12) со значениями p , q , T_s из табл. 3 описывает экспериментальные температурные зависимости $\omega(T)$ с точностью не хуже 3%, что подтверждает целесообразность использования комбинированного ядра рассеяния (3.10) с температурными зависимостями (3.9), (3.11) для его параметров в качестве граничных условий для функции распределения молекул разреженного газа.

Поступила 23 IX 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Hobson J. P. Accommodation pumping — a new principle for low pressures. — J. Vac. Sci. and Technol., 1970, vol. 7, N 2.
2. Акиншин В. Д., Борисов С. Ф. и др. Экспериментальное исследование течения разреженных газов в капиллярном сите при различных температурах. — ПМТФ, 1974, № 2.
3. Породнов Б. Т., Флягин А. Г. Экспериментальное исследование истечения гелия, неона и аргона в вакуум через длинный одиночный капилляр при температурах 295—490 К. — ПМТФ, 1978, № 4.
4. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
5. McCormick N. G., Kuscer I. Knudsen flow in a tube with arbitrary gas — wall interaction. — Phys. Fluids, 1972, vol. 15, N 9.
6. Кушер И. Феноменологические теории аккомодации газа на поверхности. — В сб.: Механика. М.: Мир, 1976.
7. Френкель Я. И. К теории явлений аккомодации и конденсации. — УФН, 1938, т. 20, № 1.

УДК 532.529.5 : 66.065.5

УРАВНЕНИЯ ТЕРМОГИДРОМЕХАНИКИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ МАССОВОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ИЗ РАСТВОРОВ И ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

И. Н. Дорохов, В. В. Кафаров, Э. М. Кольцова
(Москва)

В [1] были получены уравнения термогидромеханики двухфазной полидисперсной среды, учитывающие только рост кристаллов. В данной работе процесс массовой кристаллизации описан с учетом явлений гомогенного, гетерогенного, вторичного зародышеобразования. Получены соотношения для движущих сил зародышеобразования и массопереноса при росте кристаллов.