

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВ В КАНАЛЕ ПРИ НЕПОЛНОЙ АККОМОДАЦИИ НА СТЕНКАХ

*И. П. Александровичев, Ю. И. Маркелов, Б. Т. Породнов,  
В. Д. Селезнев  
(Свердловск)*

Имеющиеся в настоящее время в научной литературе кинетические модели процессов переноса газов, как правило, достаточно строго описывают столкновения молекул газа друг с другом, а их взаимодействие с поверхностью твердого тела учитывают обычно лишь на основе грубых предположений о зеркальном или диффузном отражении. В целях упрощения описания взаимодействия газ — поверхность нередко используется прямое моделирование функции распределения отраженных поверхностью молекул в виде степенного ряда по скоростям. Члены этого ряда определяются на основе введения коэффициентов аккомодации различных молекулярных признаков. При таких граничных условиях решение уравнения Больцмана и его моделей содержит внутренние противоречия, появляющиеся из-за различного уровня описания кинетических процессов в объеме газа и на поверхности твердого тела.

Последовательное кинетическое рассмотрение движения газов в каналах требует описания движения молекул в области действия флуктуирующего поля поверхностных сил. В [1] предложено соответствующее кинетическое уравнение и его решение, позволяющее установить связь между функциями распределения падающих на стенку канала и отраженных от нее молекул газа.

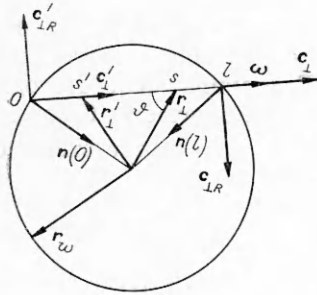
В данной работе представлено вариационное решение задачи о неизоотермическом движении газа в бесконечно длинном канале при произвольном разрежении на основе  $S$ -модельного кинетического уравнения и граничных условий, сформулированных на основе ядра рассеяния. Для проведения конкретных расчетов в качестве модели ядра рассеяния выбрана модель Черчиньяни — Лэмпис [2]. Найдена зависимость кинетических коэффициентов движения газа от параметров стохастического движения газовых молекул в поле поверхностных сил и взаимодействия газ — газ.

1. Рассматривается стационарное движение однокомпонентного одноатомного газа в бесконечно длинном цилиндрическом капилляре с радиусом  $R$ , обусловленное продольными градиентами давления и температуры. Ось капилляра совпадает с осью  $z$ . Поверхность капилляра однородна. Состояние газа предполагается слабо возмущенным. В качестве масштабов обезразмеривания выбраны следующие величины: для длин —  $R$ , для скоростей —  $\beta_0^{-1/2} = (2kT_0/m)^{1/2}$ , для числовых плотностей —  $n_{0\beta}$ , для температур —  $T_0$ , для давлений —  $p_0$ , для функций распределения —  $p_0\beta_0^{3/2}/kT_0$ , для плотностей потоков частиц и тепла —  $n_0\beta_0^{-1/2}$  и  $kT_0n_0\beta_0^{-1/2}$  соответственно, где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $n_0$  — некоторые средние по капилляру значения температуры, давления и числовой плотности газа. Так как течение газа в бесконечно длинном канале можно считать трансляционно-инвариантным, то функцию распределения молекул газа в капилляре имеет смысл представить в виде максвеллиана с плотностью и температурой, линейными по  $z$ , и поправочного члена, не зависящего от  $z$ , т. е.  $f(\mathbf{r}_\perp, z, \mathbf{c}) = f^0(\mathbf{c})\{1 + z[\nu + \tau(c^2 - 5/2)] + h(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{c})\}$ ,  $f^0(\mathbf{c}) = \pi^{-3/2} \exp(-c^2)$ . Здесь  $\mathbf{r}_\perp$  — двумерный радиус-вектор в плоскости поперечного сечения канала;  $\nu$  и  $\tau$  — продольные градиенты давления и температуры;  $h(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{c})$  — функция возмущения;  $\mathbf{c}$  — безразмерная абсолютная скорость движения молекул газа. Для молекул, падающих на стенку канала в точке  $\mathbf{r}_w$ ,  $\mathbf{c} = (c_n, c_\varphi, c_z)$ , где  $c_n = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_w)$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_w)$  — единичный вектор нормали к поверхности канала, восстановленный в точке  $\mathbf{r}_w$  и направленный внутрь канала, а  $c_z$  — скорость движения вдоль оси  $z$  для всех молекул.

2. Для решения задачи используется кинетическое уравнение с  $S$ -модельным интегралом столкновений [3, 4]. Применяя к этому уравнению известную процедуру интегрирования по траектории [5—7], получим выражение для функции возмущения

$$(2.1) \quad h(s, \mathbf{c}) = \frac{c_z}{c_\perp} \Pi(s, \mathbf{c}) + h^+(0, \mathbf{c}) \exp\left(-\frac{\delta s}{c_\perp}\right).$$

$$\text{Здесь } \Pi(x, \mathbf{c}) = \int_0^x \left\{ 2\delta u(s') + \frac{4\delta}{15} \left(c^2 - \frac{5}{2}\right) q(s') - \left[\nu + \tau \left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\right] \right\} \times$$



Р и с. 1

$\times \exp \left\{ -\frac{\delta(x-s')}{c_{\perp}} \right\} ds'$ ;  $\mathbf{c}_{\perp} = (c_n, c_{\varphi}, 0)$ ;  $u$  — макроскопическая скорость движения газа;  $q$  — плотность теплового потока вдоль капилляра;  $\delta$  — параметр разреженности;  $h^+$  — функция возмущения молекул, отраженных от стенки канала;  $s'$  — координата по лучу  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{c}_{\perp} / c_{\perp}$  (рис. 1). Полагая в выражении (2.1)  $s = l$  ( $l = 2(\mathbf{c}_{\perp} \cdot \mathbf{n}(0)) / c_{\perp}$ ), находим уравнение, связывающее функции возмущения падающих на стенку и отраженных от нее молекул:

$$(2.2) \quad h^-(l, \mathbf{c}) = \frac{c_z}{c_{\perp}} \Pi(l, \mathbf{c}) + h^+(0, \mathbf{c}) \exp \left( -\frac{\delta l}{c_{\perp}} \right).$$

Следствием осевой симметрии задачи является равенство

$$(2.3) \quad h^-(l, \mathbf{c}) = h^-(0, \mathbf{c}_R),$$

где  $\mathbf{c}_R = (-c_n, c_{\varphi}, c_z)$  — вектор скорости молекулы газа, зеркально отраженной поверхностью канала в точке  $s = 0$ . Граничное условие, сформулированное на основе ядра рассеяния, в случае изотропности последнего может быть представлено в виде [1]

$$(2.4) \quad h^+(\mathbf{r}_w, \mathbf{c}) = \widehat{W} h^-(\mathbf{r}_w, \mathbf{c}_R) = \theta[\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_w)] \int d\mathbf{c}' \theta[\mathbf{c}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_w)] \times \\ \times W_0(\mathbf{c}_R \rightarrow \mathbf{c}') h^-(\mathbf{r}_w, \mathbf{c}').$$

Здесь  $\mathbf{r}_w$  — радиус-вектор стенки канала;  $\theta(x)$  — функция Хевисайда;  $W_0(\mathbf{c}_R \rightarrow \mathbf{c}')$  — ядро рассеяния.

Используя выражения (2.2)–(2.4), легко получить интегральное уравнение для функции возмущения отраженных от стенки канала молекул

$$(2.5) \quad h^+(0, \mathbf{c}) = \theta(c_n) \int d\mathbf{c}' \theta(c'_n) W_0(\mathbf{c}_R \rightarrow \mathbf{c}') \times \\ \times \left\{ h^+(0, \mathbf{c}') \exp \left( -\frac{\delta l}{c_{\perp}} \right) + \frac{c'_z}{c_{\perp}} \Pi(l, \mathbf{c}') \right\},$$

которое является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Его решение, как указывалось в [6], может быть представлено в виде ряда Неймана. После подстановки этого решения в выражение (2.1)

$$(2.6) \quad h(s, \mathbf{c}) = \widehat{L} c_z \left\{ 2\delta u + q \frac{4\delta}{15} \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) - \left[ v + \tau \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) \right] \right\},$$

где  $\widehat{L} = \left\{ \widehat{U}_s + \widehat{U}_s \widehat{E} \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{W} \widehat{U}_l \widehat{E})^k \widehat{U}_l \right\}$ ;  $\widehat{U}_s \varphi(x, \mathbf{c}) = \frac{1}{c_{\perp}} \int_0^x ds' \exp \left\{ -\frac{\delta(x-s')}{c_{\perp}} \right\} \times \\ \times \varphi(s', \mathbf{c})$ ;  $\widehat{E} = c_{\perp} \delta_D(s)$ ;  $\delta_D(x)$  — дельта-функция Дирака.

С помощью выражения (2.6) можно составить систему уравнений для неизвестных  $u(s)$  и  $q(s)$  в гильбертовых пространствах  $G_1$  и  $G_2$  со скалярными произведениями

$$\langle g(r_{\perp}, \mathbf{c}), f(r_{\perp}, \mathbf{c}) \rangle = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp(-c_{\perp}^2 - c_z^2) g(r_{\perp}, \mathbf{c}) f(r_{\perp}, \mathbf{c}) c_{\perp} dc_{\perp} dc_z d\vartheta$$

для  $G_1$  и  $\langle \langle g(r_{\perp}, \mathbf{c}), f(r_{\perp}, \mathbf{c}) \rangle \rangle = 2\pi \int_0^1 \langle g(r_{\perp}, \mathbf{c}), f(r_{\perp}, \mathbf{c}) \rangle r_{\perp} dr_{\perp}$  для  $G_2$ . Эта система уравнений имеет вид

$$(2.7) \quad u = \left\langle c_z, \widehat{L} c_z \left\{ 2\delta u + \frac{4\delta}{15} \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) q - \left[ v + \tau \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) \right] \right\} \right\rangle, \\ q = \left\langle c_z \left( c^2 - \frac{5}{2} \right), \widehat{L} c_z \left\{ 2\delta u + \frac{4\delta}{15} \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) q - \left[ v + \tau \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) \right] \right\} \right\rangle.$$

3. Интегральные уравнения переноса, входящие в систему (2.7), относятся к классу фредгольмовских. Поэтому для ее решения может быть использован приближенный метод Бубнова — Галеркина [8]. Исходя из геометрии задачи и свойства симметрии для  $h$  (2.3), в качестве базовых можно выбрать функции  $\psi_i(r_\perp) = r_\perp^{2(i-1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . В соответствии с идеей метода для  $u$  и  $q$  используется приближение

$$(3.1) \quad u' = A_1\psi_1 + A_2\psi_2, \quad q' = A_3\psi_1$$

( $A_m$  — коэффициенты). При подстановке пробных функций (3.1) в (2.7) находим систему невязок, характеризующих отличие приближенного решения от точного. По методу Бубнова — Галеркина вариационные константы вычисляются из условия ортогональности невязок базовым функциям. Тогда для определения коэффициентов  $A_m$  запишем систему уравнений

$$(3.2) \quad b_n = \sum_{m=1}^3 a_{nm}A_m, \quad n = 1, 2, 3, \quad a_{ij} = 2\delta(s_{ij}^{pp} + l_{ij}^{pp}) - \psi_{ij},$$

$$a_{3i} = 2\delta(s_{i1}^{Tp} + l_{i1}^{Tp}), \quad a_{i3} = \frac{4\delta}{15}(s_{i1}^{pT} + l_{i1}^{pT}), \quad a_{33} = \frac{4\delta}{15}(s_{11}^{TT} + l_{11}^{TT}),$$

$$b_i = \nu(s_{i1}^{pp} + l_{i1}^{pp}) + \tau(s_{i1}^{pT} + l_{i1}^{pT}), \quad b_3 = \nu(s_{11}^{pT} + l_{11}^{pT}) + \tau(s_{11}^{TT} + l_{11}^{TT}).$$

Здесь  $i, j = 1, 2$ ;  $\psi_{ij} = \langle \psi_i, \psi_j \rangle$ ;  $s_{ij}^{pp} = \langle \psi_i c_z, \widehat{U}_s c_z \psi_j \rangle$ ;  $s_{ij}^{pT} = \langle \psi_i c_z, \widehat{U}_s c_z (c^2 - 5/2) \psi_j \rangle$ ;  $s_{i3}^{Tp} = \langle \psi_i c_z (c^2 - 5/2), \widehat{U}_s c_z \psi_j \rangle$ ;  $s_{ij}^{TT} = \langle \psi_i c_z (c^2 - 5/2), \widehat{U}_s c_z (c^2 - 5/2) \psi_j \rangle$ ;

$$l_{ij}^{pp} = \left\langle \psi_i c_z, \widehat{U}_s \widehat{E} \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{W} \widehat{U}_l \widehat{E})^k \widehat{U}_l c_z \psi_j \right\rangle;$$

$$l_{ij}^{pT} = \left\langle \psi_i c_z, \widehat{U}_s \widehat{E} \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{W} \widehat{U}_l \widehat{E})^k \widehat{U}_l c_z (c^2 - 5/2) \psi_j \right\rangle;$$

$$l_{i3}^{Tp} = \left\langle \psi_i c_z (c^2 - 5/2), \widehat{U}_s \widehat{E} \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{W} \widehat{U}_l \widehat{E})^k \widehat{U}_l c_z \psi_j \right\rangle;$$

$$l_{ij}^{TT} = \left\langle \psi_i c_z (c^2 - 5/2), \widehat{U}_s \widehat{E} \sum_{k=1}^{\infty} (\widehat{W} \widehat{U}_l \widehat{E})^k \widehat{U}_l c_z (c^2 - 5/2) \psi_j \right\rangle.$$

Функцию возмущения  $h$  удобно представить как  $h = \nu h_p + \tau h_T$ . В этом случае макроскопическая скорость и плотность теплового потока

$$(3.3) \quad u' = \nu u'_p + \tau u'_T, \quad q' = \nu q'_p + \tau q'_T.$$

И если константы  $A_m$ , а также элементы столбца свободных членов записать следующим образом:  $A_m = \nu A_m^p + \tau A_m^T$ ,  $b_n = \nu b_n^p + \tau b_n^T$ , то (3.2) распадется на две независимые системы алгебраических уравнений. После их решения и подстановки найденных значений для коэффициентов  $A_m$  в (3.3)

$$u' = \Delta^{-1} \{ \nu (\Delta_1^p + \Delta_2^p r_\perp^2) + \tau (\Delta_1^T + \Delta_2^T r_\perp^2) \}, \quad q' = \Delta^{-1} \{ \nu \Delta_3^p + \tau \Delta_3^T \},$$

где  $\Delta$  — определитель матрицы  $[a_{nm}]$ ;  $\Delta_j^k$  — определитель матрицы, которая получается при замене  $m$ -го столбца матрицы  $[a_{nm}]$  на столбец свободных членов  $[b_n^k]$ , причем  $k = p, T$ . Полученное таким образом выражение для функции распределения малоприспособно для расчета локальных значений макропараметров движения газа в капилляре. Однако с его помощью можно достаточно точно описать поведение системы в целом, в частности рассчитать интегральные характеристики движения газа в канале.

4. Выражения для потоков частиц и тепла через поперечное сечение канала имеют вид

$$J_N = \int_{\Sigma_{\perp}} d\mathbf{r}_{\perp} \int c_z f^0 h(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{c}) d\mathbf{c}, \quad J_q = \int_{\Sigma_{\perp}} d\mathbf{r}_{\perp} \int c_z \left(c^2 - \frac{5}{2}\right) f^0 h(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{c}) d\mathbf{c}$$

( $\Sigma_{\perp}$  — поперечное сечение канала). Если в данные формулы подставить найденное для  $h(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{c})$  вариационное решение, то они преобразуются в уравнения

$$(4.1) \quad J_N = \pi \Delta^{-1} \left\{ \nu \left( \Delta_1^p + \frac{\Delta_2^p}{2} \right) + \tau \left( \Delta_1^T + \frac{\Delta_2^T}{2} \right) \right\}, \quad J_q = \pi \Delta^{-1} \left[ \nu \Delta_3^{\tilde{z}} + \tau \Delta_3^T \right].$$

В случае свободномолекулярного движения газа в линеаризованной задаче потоки можно представить выражениями

$$J_N = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ \nu - \frac{\tilde{\nu}}{2} + 3 \langle h_0, h^+ \rangle^* \right\}, \quad J_q = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ -\frac{\nu}{2} + \frac{9}{4} \tau + \right. \\ \left. + 3 \left\langle h_0 \left( c^2 - \frac{5}{2} \right), h^+ \right\rangle^* \right\}, \\ \langle f(\mathbf{c}), g(\mathbf{c}) \rangle^* = 2\pi^{-1} \int \theta(c_n) c_n \exp(-c^2) g(\mathbf{c}) f(\mathbf{c}) d\mathbf{c}.$$

Если в них подставить решение уравнения (2.5) для кнудсеновского режима течения газа  $h^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{W}^k h_0 \left[ \nu + \tau \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) \right]$ ,  $h_0 = 2c_n c_z / c_{\perp}^2$ , то

$$(4.2) \quad J_N = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ \nu \left[ 1 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} N_k \right] - \tau \left[ \frac{1}{2} - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left( M_k - \frac{5}{2} N_k \right) \right] \right\}, \\ J_q = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ \nu \left[ \frac{1}{2} - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left( M_k - \frac{5}{2} N_k \right) \right] - \right. \\ \left. - \tau \left[ \frac{9}{4} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{25}{4} N_k - 5M_k + V_k \right) \right] \right\}, \\ N_k = \langle h_0, \widehat{W}^k h_0 \rangle^*, \quad M_k = \langle h_0 c^2, \widehat{W}^k h_0 \rangle^* = \langle h_0, \widehat{W}^k h_0 c^2 \rangle^*, \\ V_k = \langle h_0 c^2, \widehat{W}^k h_0 c^2 \rangle^*.$$

При выводе этих выражений используется равенство  $\langle f, \widehat{W}^k g \rangle^* = \langle g, \widehat{W}^k f \rangle^*$ , справедливое в том случае, если ядро рассеяния удовлетворяет соотношению взаимности. Ряды в (4.2) сходятся, когда отражение молекул газа от стенки канала отлично от зеркального. Таким образом, получены выражения для потоков тепла и массы как функций ядра рассеяния. Сравнивая расчеты для конкретных моделей ядра рассеяния с экспериментальными данными, можно оценивать эффективность использования той или иной модели для описания взаимодействия молекул газа с поверхностью твердого тела, вычислять значения параметров этого взаимодействия.

Один из способов проверки достоверности полученного решения — проверка выполнения соотношений Онзагера. Согласно линейной неравновесной термодинамике, между «потоками» и «силами» одинаковой тензорной размерности существует связь

$$(4.3) \quad J_i = \sum_j L_{ij} x_j$$

( $L_{ij}$  — кинетические коэффициенты). Следовательно, если выбрать «термодинамические силы» в виде  $x_N = -\nu$ ,  $x_q = -\tau$ , то в соответствии с вы-

ражениями (4.1) и (4.3)

$$(4.4) \quad L_{NN} = -\pi\Delta^{-1} \left( \Delta_1^p + \frac{\Delta_2^p}{2} \right), \quad L_{Nq} = -\pi\Delta^{-1} \left( \Delta_1^T + \frac{\Delta_2^T}{2} \right),$$

$$L_{qN} = -\pi \frac{\Delta_3^p}{\Delta}, \quad L_{qq} = -\pi\Delta^{-1}\Delta_3^T.$$

Для того чтобы доказать равенство перекрестных кинетических коэффициентов  $L_{Nq}$  и  $L_{qN}$ , достаточно расписать определители  $\Delta_1^T$ ,  $\Delta_2^T$ ,  $\Delta_3^p$ . При этом необходимо воспользоваться самосопряженностью операторов  $\widehat{U}_s$  и  $\widehat{W}$  в пространстве  $G_2$ , которая является следствием симметрии ядра оператора  $\widehat{U}_s$ , и взаимностью ядра рассеяния  $W_0(c' \rightarrow c)$ . Дальнейший ход доказательства, как и доказательства соотношения Онзагера в случае свободномолекулярного движения газа, очевиден. Таким образом, можно сделать вывод о том, что предложенный метод решения задачи не нарушает общих физических закономерностей.

5. Для дальнейшего расчета кинетических коэффициентов (4.4), характеризующих неизотермическое движение газа в бесконечно длинном канале, как функций параметров ядра рассеяния необходимо выбрать конкретную модель ядра рассеяния. В качестве таковой используется модель Черчиньяни — Лэмпис [2]. В выражениях (4.4) неопределенными остались лишь члены  $l_{ij}^{mn}$ . Получить для них аналитические формулы во всем диапазоне чисел Кнудсена не представляется возможным. Поэтому рассчитываются лишь асимптотические выражения для кинетических коэффициентов.

В случае, когда движение газа в канале близко к континуальному, т. е. когда  $\delta \rightarrow \infty$ , после несложных, но довольно громоздких вычислений кинетические коэффициенты принимают вид

$$(5.1) \quad L_{NN} = \frac{\pi}{8} \delta \left( 1 + \frac{a_1}{\delta} + \frac{a_2}{\delta^2} + \frac{a_3}{\delta^3} \right),$$

$$L_{Nq} = L_{qN} = -\frac{3\pi}{4\delta} \frac{t_0}{\delta} \left( 1 + \frac{b_1}{\delta} + \frac{b_2}{\delta^2} + \frac{b_3}{\delta^3} \right), \quad L_{qq} = \frac{15}{8} \frac{\pi}{\delta} \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{c_1}{\delta} + \frac{c_2}{\delta^2} + \frac{c_3}{\delta^3} \right),$$

где

$$a_1 = l_1 + m_1, \quad a_2 = m_1^2 - m_2 + l_1 m_1 - l_2 - 4,$$

$$a_3 = m_1^3 - 2m_1 m_2 - m_3 + l_1 (m_1^2 - m_2) - l_2 m_1 + l_3,$$

$$b_1 = t_0^{-1} (t_0 m_1 - t_1), \quad b_2 = t_0^{-1} \{ t_0 (m_1^2 - m_2) - t_1 m_1 + t_2 \},$$

$$b_3 = t_0^{-1} \{ t_0 (m_1^3 - 2m_1 m_2 + m_3) - t_1 (m_1^2 - m_2) + t_2 m_1 + t_3 \},$$

$$c_1 = 3(m_1 - d_1), \quad c_2 = 3(m_1^2 - m_2 - d_1 m_1 + d_2),$$

$$c_3 = 3 \{ m_1^3 - 2m_1 m_2 - m_3 - d_1 (m_1^2 - m_2) + d_2 m_1 + d_3 \},$$

$$m_1 = (5\sqrt{\pi})^{-1} \{ 17 + 5\pi + \varepsilon(1 - 5\pi - \alpha_n + 10S) + 2\varepsilon^3 \},$$

$$m_2 = (40\pi)^{-1} \{ 199\pi - 96 + \varepsilon [32 + 131\pi - \alpha_n(32 + 92\pi) - 48S] -$$

$$- \varepsilon^2 [2\pi(5 - 6\alpha_n + \alpha_n^2) - 16(1 - \alpha_n)S] + 16\varepsilon^3(\pi + 4) - 16\varepsilon^4(\pi - 2S) \},$$

$$m_3 = (40\sqrt{\pi})^{-1} \{ 444 - \varepsilon(254 - 203\alpha_n + 30\pi\sqrt{\alpha_n} - 30S) -$$

$$- \varepsilon^3 [6 + \alpha_n(15\pi - 9) + 3\alpha_n^2 - 30\pi\sqrt{\alpha_n} + 30S] -$$

$$- 142\varepsilon^3 - 6\varepsilon^4(3 - 2\alpha_n) - 24\varepsilon^6 \},$$

$$l_1 = 4\sqrt{\pi}\varepsilon\alpha_t^{-1} + (5\sqrt{\pi})^{-1} \{ 3 - \varepsilon(1 - \alpha_n) - 2\varepsilon^3 \},$$

$$l_2 = (40\alpha_t)^{-1} \{ 159 + 2\varepsilon(189 - 4\alpha_n + 160S) + 3\varepsilon^2(13 - 8\alpha_n) + 64\varepsilon^4 \},$$

$$\begin{aligned}
l_3 &= -(40\alpha_t \sqrt{\pi})^{-1} [200 + 32\pi + \varepsilon [114 - 1344\pi + \alpha_n(61 + 352\pi) + \\
&+ 60\pi \sqrt{\alpha_n} + 208S] + \varepsilon^2 [32\pi - 52 + \alpha_n(58 - 32\pi) + \alpha_n^2(3 + 8\pi) - \\
&- 60\pi \sqrt{\alpha_n} + (64\alpha_n - 80)S] - \varepsilon^3 (128 - 9\alpha_n + 3\alpha_n^2) - \\
&- 4\varepsilon^4 (35 - 3\alpha_n + 32S) + 6\varepsilon^5 (1 - 2\alpha_n) + 24\varepsilon^6 - 24\varepsilon^7, \\
t_0 &= 3 - \varepsilon(1 - \alpha_n), \quad t_1 = 2\pi^{-1/2} \{7 + 2\pi - \varepsilon [2 + 2\pi - \alpha_n(\pi + 2) - 2S] - \varepsilon^3\}, \\
t_2 &= \frac{1}{8} [225 - \varepsilon(80 - 83\alpha_n - 6\sqrt{\alpha_n}) - \varepsilon^2(1 - \alpha_n)(9 - 6\sqrt{\alpha_n}) - \\
&- 20\varepsilon^3 + 12\varepsilon^4(1 - \sqrt{\alpha_n})], \\
t_3 &= (4\sqrt{\pi})^{-1} \varepsilon \{88 - 109\alpha_n - 15\pi \sqrt{\alpha_n} + 18S + 3\varepsilon [4 - \alpha_n(6 + \pi) + \\
&+ 2\alpha_n^2 + \pi \sqrt{\alpha_n}(1 + \alpha_n) + 2(1 - 2\alpha_n)S] - 118\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3(7 - 8\alpha_n - \\
&- 4\pi \sqrt{\alpha_n} + 8S) + 39\varepsilon^5\}, \\
d_1 &= \pi^{-1/2} \{4 + \pi - \varepsilon(\pi - 2S)\}, \quad d_2 = \frac{4}{9} \{45 + \varepsilon(19 - 16\alpha_n)\}, \\
d_3 &= (8\sqrt{\pi})^{-1} \{60 - \varepsilon(44 - 32\alpha_n + 6\pi \sqrt{\alpha_n} - 6S) - \\
&- \varepsilon^2(3\pi\alpha_n - 6\pi \sqrt{\alpha_n} + 6S) - 16\varepsilon^3\}, \\
\varepsilon &= 1 - \alpha_t, \quad S = 2E(\sqrt{1 - \alpha_n}) - \alpha_n K(\sqrt{1 - \alpha_n})
\end{aligned}$$

( $K(x)$  и  $E(x)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода). Видно, что коэффициенты разложения  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  есть функции параметров модели ядра рассеяния, в данном случае функции  $\alpha_t$  и  $\alpha_n$ , имеющих смысл коэффициентов аккомодации тангенциальной составляющей импульса и той части кинетической энергии, которая соответствует движению по нормали к стенке канала.

Коэффициенты аккомодации  $\alpha_n$  и  $\alpha_t$  связаны с физическими параметрами, характеризующими стохастическое движение молекул газа в поле поверхностных сил [1]:  $\alpha_n = 1 - \exp(-4d/l_n)$ ,  $\alpha_t = 1 - \exp(-2d/l_t)$ . Здесь  $d$  — глубина проникновения;  $l_n$  и  $l_t$  — две характерные длины, связанные с диффузией в пространстве скоростей молекул газа, находящихся в приповерхностном слое стенки.

При выводе формул (5.4) замечено, что существует однозначное соответствие между числом членов в разложении кинетических коэффициентов по степеням  $1/\delta$  и числом необходимых для получения данного разложения членов ряда Неймана в решении уравнения (2.5). Для вывода (5.4) достаточно ограничиться тремя членами ряда Неймана для (2.5). Следующие члены дают вклад только в коэффициенты разложения при более высоких степенях  $1/\delta$ .

Ядро рассеяния Черчиньяни — Лэмпис [2], описывающее рассеяние молекул газа на изотропной поверхности, является функцией трех параметров:  $\alpha_n$ ,  $\alpha_\varphi$ ,  $\alpha_z$ . Параметры  $\alpha_\varphi$  и  $\alpha_z$  имеют смысл коэффициентов аккомодации тангенциальных составляющих импульса молекул газа в направлении касательной к окружности поперечного сечения канала и в направлении продольной оси соответственно и изменяются в интервалах  $0 \leq \alpha_n \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha_\varphi \leq 2$ ,  $0 \leq \alpha_z \leq 2$ . В свободномолекулярном режиме на основе данной модели ядра рассеяния удается получить следующие асимптотические формулы для кинетических коэффициентов:

$$\begin{aligned}
(5.2) \quad L_{NN} &= \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ 1 + 3 \sum_{h=1}^{\infty} N_h \right\}, \quad L_{Nq} = L_{qN} = \\
&= -\frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ \frac{1}{2} - 3 \sum_{h=1}^{\infty} \left( M_h - \frac{5}{2} N_h \right) \right\}, \\
L_{qq} &= \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ \frac{9}{4} + 3 \sum_{h=1}^{\infty} \left( \frac{25}{4} N_h - 5M_h + V_h \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Функции  $N_k$ ,  $M_k$ ,  $V_k$  при  $\alpha_n = 1$  имеют вид

$$(5.3) \quad N_k = \frac{\pi}{2} \frac{(1 - \alpha_z)^k}{(1 - \alpha_\varphi)^{2k}} \left\{ \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - \alpha_\varphi)^{2k}}}{2} \right) + \right. \\ \left. + 1 - \sqrt{1 - (1 - \alpha_\varphi)^{2k}} \right\},$$

$$M_k = \frac{3}{2} N_k + \frac{\pi}{8} (1 - \alpha_z)^k, \quad V_k = \frac{3}{4} N_k \{3 + 2(1 - \alpha_z)^{2k}\} + \frac{\pi}{2} (1 - \alpha_z)^k,$$

а при  $\alpha_\varphi = 1$

$$(5.4) \quad N_k = \frac{(1 - \alpha_z)^k}{(1 - \alpha_n)^k} \left( p_k - \frac{\pi}{2} \right), \quad M_k = \frac{3}{2} N_k + \frac{(1 - \alpha_z)^k}{6(1 - \alpha_n)^k} \Phi_k,$$

$$V_k = \frac{9}{4} \left\{ 1 + \frac{2}{3} (1 - \alpha_z)^{2k} \right\} N_k + \frac{(1 - \alpha_z)^k}{4} p_k + \frac{(1 - \alpha_z)^k}{2(1 - \alpha_n)^k} \Phi_k,$$

$$p_k = 2E[(1 - \alpha_n)^{k/2}] - [1 - (1 - \alpha_n)^k]K[(1 - \alpha_n)^{k/2}],$$

$$\Phi_k = [1 + (1 - \alpha_n)^k]E[(1 - \alpha_n)^{k/2}] - [1 - (1 - \alpha_n)^k]K \times \\ \times [(1 - \alpha_n)^{k/2}].$$

6. Итак, получено решение задачи о переносе тепла и массы при неизоэтермическом движении разреженного газа в цилиндрическом капилляре, основанное на последовательном кинетическом рассмотрении как межмолекулярных столкновений, так и взаимодействия газ — поверхность. Найдены выражения для кинетических коэффициентов, в которые входит закон взаимодействия молекул газа с поверхностью в общем виде через ядро рассеяния. Полученный результат справедлив для класса нормированных, положительных и удовлетворяющих соотношению взаимности моделей ядра рассеяния.

В режимах течения (близком к вязкому и свободномолекулярному) проведен конкретный расчет кинетических коэффициентов для двухпараметрической модели ядра рассеяния Черчиньяни — Лэмпис, описывающей стохастическое движение молекул газа в поле поверхностных сил. Из выражений (5.4) для кинетических коэффициентов в вязком пределе для констант вязкого и теплового скольжений имеем

$$(6.1) \quad \sigma_p = 2 \left\{ \frac{1 - \alpha_t}{\alpha_t} + \frac{\alpha_t}{4} + \frac{1}{\pi} + \frac{1 - \alpha_t}{\pi} \left[ E(\sqrt{1 - \alpha_n}) - \frac{\alpha_n}{2} K(\sqrt{1 - \alpha_n}) \right] \right\};$$

$$(6.2) \quad \sigma_T = \frac{9}{8} \left\{ 1 - \frac{1}{3} (1 - \alpha_n)(1 - \alpha_t) \right\}.$$

Данные константы не зависят ни от выбора статистической модели оператора межмолекулярных столкновений, ни от геометрии задачи, а определяются лишь законом взаимодействия газ — поверхность. Полученный результат для  $\sigma_p$  и  $\sigma_T$  полностью совпадает в предельных случаях, т. е. при  $\alpha_n = \alpha_t = 1$  и  $\alpha_n = \alpha_t = 0$  (что соответствует диффузному и зеркальному рассеяниям), со значениями, приведенными в [9], а при  $\alpha_n = 1$  — с результатами [10]. В [10] при расчете констант скольжения с использованием двухпараметрической модели ядра рассеяния Черчиньяни — Лэмпис [2] параметр  $\alpha_n$  необоснованно полагался равным единице. Это привело к независимости  $\sigma_T$  от параметров взаимодействия газ — поверхность, что противоречит экспериментальным данным [11]. Из соотношения (6.2) вытекает, что константа теплового скольжения принимает значение, равное диффузному, как при полной аккомодации тангенциальной составляющей импульса, так и при полной аккомодации энергии при движении по нормали к стенке. Выражения (6.1) и (6.2) можно рассматривать как систему уравнений для определения параметров  $\alpha_n$  и  $\alpha_t$  по экспериментальным значениям констант  $\sigma_p$  и  $\sigma_T$ . Однако графическое ре-

шение этой системы с использованием экспериментальных результатов [11, 12] показало, что она несовместна, т. е. нельзя подобрать такие пары значений  $\alpha_n$  и  $\alpha_i$ , которые бы одновременно характеризовали граничные условия при изотермическом и неизотермическом движении газа. Значит, необходимы дополнительные экспериментальные исследования явлений скольжения и построения более адекватных опыту моделей ядра рассеяния.

Если рассмотреть свободномолекулярный режим движения газа в канале, то в случае, когда  $1 - \alpha_z \ll 1$  и  $1 - \alpha_\varphi \ll 1$ , из (5.2) и (5.3) нетрудно найти выражения

$$(6.3) \quad \begin{aligned} L_{NN} &= \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ 1 + \frac{3\pi}{8} (1 - \alpha_z) \left[ 1 + (1 - \alpha_z) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \alpha_z)^2 + \frac{1}{8} (1 - \alpha_\varphi)^2 \right] \right\}, \\ L_{Nq} &= L_{qN} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{3} \left\{ 1 + \frac{3\pi}{32} (1 - \alpha_z) (1 - \alpha_\varphi)^2 \right\}, \\ L_{qq} &= 3\sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{4} (1 - \alpha_z)^3 \left[ 1 + \frac{(1 - \alpha_\varphi)^2}{12(1 - \alpha_z)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично из (5.2) и (5.4) при условии, что  $1 - \alpha_z \ll 1$ ,  $1 - \alpha_n \ll 1$ , получаем

$$(6.4) \quad \begin{aligned} L_{NN} &= \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ 1 + \frac{3\pi}{8} (1 - \alpha_z) \left[ 1 + (1 - \alpha_z) + \frac{i}{16} (1 - \alpha_n) \right] \right\}, \\ L_{Nq} &= L_{qN} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{3} \left\{ 1 + \frac{9\pi}{64} (1 - \alpha_z) (1 - \alpha_n) \right\}, \\ L_{qq} &= 3\sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{3\pi}{32} (1 - \alpha_z) (1 - \alpha_n) \right\}. \end{aligned}$$

При  $\alpha_n = 1$  и  $\alpha_\varphi = 1$  ряды в (5.2) удается просуммировать. Кинетические коэффициенты тогда имеют вид

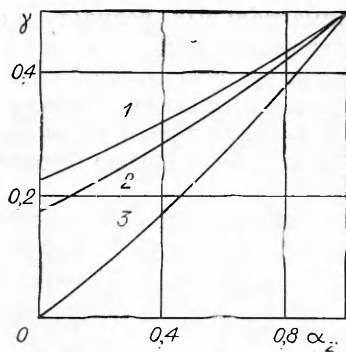
$$(6.5) \quad \begin{aligned} L_{NN} &= \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left\{ 1 + \frac{3\pi}{8} \frac{1 - \alpha_z}{\alpha_z} \right\}, \quad L_{Nq} = L_{qN} = -2\pi/3, \\ L_{qq} &= 3\sqrt{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{4} \frac{(1 - \alpha_z)^3}{1 - (1 - \alpha_z)^3} \right\}. \end{aligned}$$

Из выражений (6.3) и (6.4) видно, что коэффициенты  $L_{Nq}$  и  $L_{qq}$  более слабо по сравнению с  $L_{NN}$  зависят от параметров модели ядра рассеяния Черчиньяни — Лэмпис. Согласно (6.3)—(6.5), решающую роль в зависимости течения Пуазейля, теплового крипа, теплопроводности от характера взаимодействия газа с поверхностью играет аккомодация тангенциальной составляющей импульса в направлении оси  $z$ . При неизотермическом движении газа роль всех трех коэффициентов аккомодации сравнима. Так,  $L_{Nq}$  принимает диффузное значение не только при  $\alpha_z = 1$ , но и при  $\alpha_n = \alpha_\varphi = 1$ .

Интересно с точки зрения апробации полученных результатов рассмотреть эффект термомолекулярной разности давлений (ТРД) [13], т. е. явление возникновения разности давлений между двумя объемами с газом, соединенными капилляром, если в объемах поддерживаются определенные, не равные между собой значения температуры газа, а давление газа в сосудах изначально одинаково. Эффект ТРД в стационарном состоянии характеризуется отсутствием потока частиц через поперечное сечение капилляра, соединяющего объемы. В [14] показано, что эффект ТРД при любых значениях числа Кнудсена описывается выражением

$$(6.6) \quad p_1/p_2 = (T_1/T_2)^{\nu},$$





Р и с. 2

где  $\gamma$  — показатель эффекта ТРД;  $p_i$  и  $T_i$  — давления и температуры газа в объемах после установления стационарного состояния. Показатель ТРД определяется отношением  $\gamma = -(L_{Nq}/L_{NN})$ . Используя данное соотношение и выражения (6.3)—(6.5), можно рассчитать  $\gamma$  и определить зависимость показателя ТРД от параметров модели ядра рассеяния. На рис. 2 представлена зависимость  $\gamma$  от коэффициента  $\alpha_z$  при некоторых значениях коэффициентов  $\alpha_n$ ,  $\alpha_\phi$ . Кривая 1 соответствует  $\alpha_n = 0$ ,  $\alpha_\phi = 1$ ; 2 —  $\alpha_n = 1$ ,  $\alpha_\phi = 0$ , а 3 —  $\alpha_n = \alpha_\phi = 1$ . Видно, что вариация трех параметров  $\alpha_n$ ,  $\alpha_\phi$  и  $\alpha_z$  от 0 до 1 приводит к изменению показателя ТРД от 0

до 1/2. Важно отметить, что при  $\alpha_z = 0$  эффект ТРД имеет место, если  $\alpha_n$  или  $\alpha_\phi$  отличны от нуля, и отсутствует, если  $\alpha_n = \alpha_\phi = 1$ . Таким образом, модель ядра рассеяния Черчиньяни — Лэмпис в отличие от диффузной и диффузно-зеркальной позволяет описать экспериментально наблюдаемую зависимость эффекта ТРД от характера взаимодействия молекул газа с поверхностью канала. Этот факт уже отмечался в [15].

При детальном рассмотрении свойств модели ядра рассеяния Черчиньяни — Лэмпис нетрудно увидеть, что она качественно верно описывает экспериментально наблюдаемую зависимость направления максимальной интенсивности рассеяния молекул от отношения температур поверхности и молекулярного пучка. Молекулы, излучаемые источником с большой температурой, рассеиваются более касательно к поверхности твердого тела. Следовательно, если рассеяние газа на поверхности отличается от диффузного, то вероятность прохождения канала, соединяющего две колбы с газом, у молекул, летящих из «горячей» колбы, выше, чем у молекул, летящих из «холодной» колбы. В результате перепад давлений в колбах уменьшается по сравнению со случаем диффузного рассеяния молекул газа на стенках канала. Это соответствует, согласно формуле (6.6), уменьшению показателя ТРД  $\gamma$ , о чем и свидетельствует рис. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир, 1978.
2. Cercignani C., Lampis M. Kinetic models for gas — surface interactions // *Transp. Theory and Statist. Phys.* — 1971. — V. 1, N 2.
3. Шахов Е. М. Метод исследования движений разреженного газа. — М.: Наука, 1974.
4. Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А. Прикладная динамика разреженного газа. — М.: Машиностроение, 1977.
5. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. — М.: Госатомиздат, 1961.
6. Loualka S. K. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. 1 // *J. Chem. Phys.* — 1971. — V. 55, N 9.
7. Черняк В. Г., Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Термомолекулярная разность давлений при произвольной аккомодации тангенциального импульса // *ИФЖ.* — 1973. — Т. 24, № 2.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
9. Черняк В. Г., Маргилевский А. Е. и др. К вопросу о влиянии взаимодействия газов с поверхностью на тепловой крип в плоском канале // *ИФЖ.* — 1975. — Т. 28, № 4.
10. Суетин П. Е., Черняк В. Г. О зависимости пуазейлевского скольжения и теплового крипа от закона взаимодействия молекул газа с граничной поверхностью // *Изв. АН СССР. МЖГ.* — 1977. — № 6.
11. Porodnov B. T., Kulev A. N., Tuchvetov F. T. Thermal transpirations in circular capillary with a small temperature difference // *J. Fluid Mech.* — 1978. — V. 88, pt 4.
12. Акиншин В. Д., Борисов С. Ф. и др. Экспериментальное исследование течения разреженных газов в капиллярном сите при различных температурах // *ПМТФ.* — 1974. — № 2.
13. Edmonds T. S., Hobson J. P. A study of thermal transpiration using ultrahigh-vacuum techniques // *J. Vac. Sci. Techn.* — 1965. — V. 2, N 1.

14. Суетин П. Е., Скакун С. Г., Черняк В. Г. Теория термомолекулярной разности давлений для двух статистических моделей // ЖТФ.— 1971.— Т. 41, № 8.  
 15. Маркелов Ю. И., Породнов Б. Т. и др. Течение Пуазейля и тепловой крип для различных ядер рассеяния газа на поверхности канала // ПМТФ.— 1981.— № 6.

Поступила 2/IX 1986 г.

УДК 533.6.011.8

## ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ КНУДСЕНА

В. Д. Акинъшин, А. И. Макаров, В. Д. Селезнев,  
 Ф. М. Шарипов

(Свердловск)

Течение разреженного газа в бесконечном канале изучено достаточно подробно (см., например, [1—3]). Но в реальном случае длина канала ограничена и влияние конечных эффектов может быть существенным. В [4—13] рассматривается канал конечной длины.

В [4] решено уравнение Клаузинга, справедливое только в свободномолекулярном режиме. В [5] найдена концевая поправка в режиме сплошной среды. В [6] на основе результатов [5] и учета скольжения получена формула для всего диапазона чисел Кнудсена. В свободномолекулярном режиме предложенная формула существенно расходится с данными [4]. В [7] получена эмпирическая формула для расхода газа в круглом конечном капилляре во всем диапазоне чисел Кнудсена и длин канала. В [8, 9] рассматривается режим, близкий к свободномолекулярному. В [10] задача решена на основе БГК-уравнения моментным методом, при этом функция распределения представлена в виде линейной комбинации четырех максвеллианов. Для расхода газа получена простая аналитическая формула, которая согласуется с результатами, найденными в [10] численным методом дискретных скоростей с погрешностью 10% в диапазонах отношения длины канала к высоте от 6 до 0,5, числа Кнудсена от 5 до 0,5 и отношения давлений на концах канала от 0,8 до 0,1. К сожалению, результаты численных расчетов в [10] не приведены.

В [11, 12] рассматривается течение соответственно в плоском и круглом каналах конечной длины. При этом делаются следующие упрощающие предположения: градиент плотности вдоль всего канала постоянный, скорость в канале имеет только продольную составляющую, зависящую от поперечной координаты. Эти предположения справедливы только для достаточно длинных каналов. В [13] в тех же предположениях исследовано неизотермическое движение газа в плоском канале. Таким образом, течение газа в конечном канале рассматривалось либо в узком диапазоне чисел Кнудсена, либо в предположениях, справедливых только для длинных каналов.

В данной работе задача о течении газа в плоском канале конечной длины решена на основе линеаризованного БГК-уравнения интегрально-моментным методом. В отличие от [11, 12] не делаются предположения о поле течения, что позволяет учесть изменения профиля скорости и нелинейную зависимость плотности от продольной координаты на концевых участках канала. Интегральные уравнения решаются численно методом Крылова — Боголюбова. В случае, когда длина канала много больше длины свободного пробега молекулы, найдена простая связь расхода газа в конечном канале с расходом в бесконечном канале при том же числе Кнудсена.

1. Рассмотрим стационарное течение газа между двумя параллельными бесконечно широкими пластинами, расположенными в плоскостях  $y = \pm a$  и имеющими длину  $l$  вдоль потока. В сосудах, которые соединяет этот канал, содержится один и тот же газ при одинаковой температуре  $T$  и разных плотностях  $n_1$  и  $n_2$ , как показано на рис. 1. Под действием перепада плотности газ движется в направлении  $x$ .

Введем следующие масштабы:  $a$ ,  $n_1$ ,  $\beta = (2RT)^{1/2}$ ,  $n_1\beta^{-3/2}$ ,  $\eta_1 = n_1 m v \lambda_1 / 2$  соответственно для длины, плотности  $n$ , скоростей  $c$  и  $u$ , функции распределения  $f$  и коэффициента вязкости  $\eta$ . Здесь  $R$  — газовая постоянная;  $m$  — масса молекулы;  $v = (8RT/\pi)^{1/2}$  — тепловая скорость молекулы;  $\lambda_1$  — длина свободного пробега

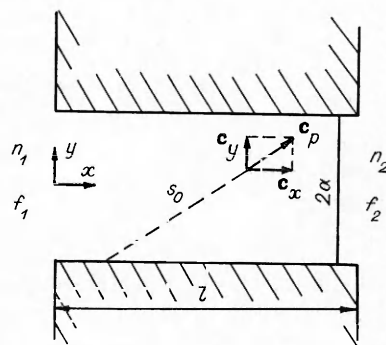


Рис. 1