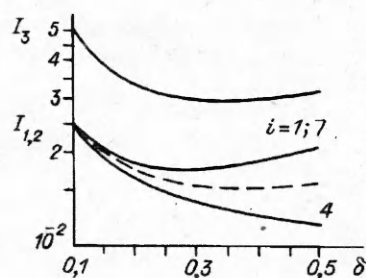


Рис. 7



лера моды  $n = 2$  определяется ее собственной динамикой, на которую практически не влияют сдвиговые волны маховой моды. Для последних наличие на начальном участке стационарной продольной завихренности создает условия для некоторого роста, осуществляемого в режиме параметрического резонанса при благоприятных фазовых соотношениях между рассмотренными волнами.

Обнаруженные взаимные фазы, при которых происходит значительное понижение амплитуд и интенсивностей бегущих волн, позволяют считать наличие продольных вихрей стабилизирующим фактором, в определенных условиях препятствующим продольному нарастанию возмущений широкополосного спектра струи.

Часть работы выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93—013—16577).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Morrison G.L. Flow instability and acoustic radiation measurement of low Reynolds number supersonic jet — Ph. D. Dissertation, Oklahoma St. Un. — Stillwater, Okla., 1977.
2. Моррисон Г.Л., Маклафлин Д.К. Неустойчивость сверхзвуковых струй при небольших числах Рейнольдса // РТК. — 1980. — Т. 18, № 7.
3. Терехова Н.М. Характеристики устойчивости сверхзвуковых струй в спутном потоке // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1986. — Вып. 1.
4. Гиневской А.С., Власов Е.В., Колесников А.В. Аэроакустические взаимодействия. — М.: Машиностроение, 1978.
5. Кудрявцев А.Н. Устойчивость и нелинейное развитие возмущений в сжимаемом слое сдвига: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1993.
6. Терехова Н.М. Резонансные развития возмущений в сверхзвуковой струе. — Новосибирск, 1991. — (Препр./ СО РАН, ИТПМ; № 12—91).
7. Желтухин Н.А., Терехова Н.М. Резонансное развитие возмущений в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1993. — № 2.
8. Запрягаев В.И., Миронов С.Г., Солотчин А.В. Спектральный состав волновых чисел продольных вихрей и особенности структуры течения в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1993. — № 5.
9. Желтухин Н.А., Терехова Н.М. Неустойчивость Тейлора — Гёртлера в сверхзвуковой струе // ПМТФ. — 1993. — № 5.

г. Новосибирск

Поступила 10/XII 1993 г.

УДК 532.591+517.958

В.М. Тешуков

#### ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В ЗАВИХРЕННОЙ БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются интегродифференциальные уравнения теории длинных волн, описывающие в эйлерово-лагранжевой системе координат завихренные течения баротропной жидкости со свободной границей. Для течений с монотонным по глубине профилем скорости получены необходимые и достаточные условия гиперболичности системы уравнений движения, являющиеся необходимыми условиями корректности задачи Коши, определены скорости характеристик, вычислена характеристическая форма системы. Построен пример начальных данных, для которых задача Коши некорректна.

© В.М. Тешуков, 1994

В [1] исследовались стационарные решения системы, описывающие течения с критическим слоем, в [2] рассмотрены частные решения типа простых волн.

1. Модель длинных волн. Решение начально-краевой задачи

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_T + uu_X + vu_Y + \rho^{-1}p_X &= 0, \\ \varepsilon^2(v_T + uv_X + vv_Y) + \rho^{-1}p_Y &= -1, \quad 0 \leq Y \leq h(X, T), \\ \rho_T + u\rho_X + v\rho_Y + \rho(u_X + v_Y) &= 0, \quad -\infty < X < \infty, \\ \rho &= \rho(p), \quad \rho'(p) > 0, \\ \rho(X, Y, 0) &= \rho_0(X, Y), \quad u(X, Y, 0) = u_0(X, Y), \\ v(X, Y, 0) &= v_0(X, Y), \quad h(X, 0) = h_0(X), \quad \alpha(X, 0, T) = 0, \\ h_T + u(X, h, T)h_X &= \alpha(X, h, T), \quad p(X, h, T) = p_0 = \text{const} \end{aligned}$$

описывает плоскопараллельное движение слоя баротропной жидкости со свободной границей  $Y = h(X, T)$  над ровным дном в поле силы тяжести. Здесь

$$\begin{aligned} u_1 &= (gH_0)^{1/2}u, \quad v_1 = (g\bar{H}_0)^{1/2}\bar{H}_0\bar{L}_0^{-1}v, \quad p_1 = R_0gH_0p, \\ p_1 &= R_0\rho, \quad X_1 = L_0X, \quad Y_1 = H_0Y, \quad T_1 = L_0(gH_0)^{-1/2}T \end{aligned}$$

— размерные компоненты вектора скорости, давление, плотность, декартовы координаты на плоскости и время;  $u, v, p, \rho, X, Y, T$  — соответствующие безразмерные величины;  $H_0, L_0$  — характерные вертикальный и горизонтальный масштабы;  $g$  — ускорение свободного падения;  $R_0$  имеет размерность плотности. Заданные функции  $u_0, v_0, \rho_0, h_0$  определены при  $0 \leq Y \leq h_0(X), X \in (-\infty, \infty)$ .

Теория длинных волн (теория мелкой воды) возникает при предельном переходе  $\varepsilon = H_0L_0^{-1} \rightarrow 0$ . При этом второе уравнение системы (1.1) переходит в гидростатический закон распределения давления по глубине:

$$(1.2) \quad p_Y = -\rho(p) \quad (p(X, h, T) = p_0).$$

Интегрирование уравнения (1.2) и уравнения неразрывности дает соотношения

$$(1.3) \quad \begin{aligned} p &= f(h - Y) \quad \left( f \left( \int_{p_0}^p \rho^{-1}(\xi) d\xi \right) = p \right), \\ \rho &= f'(h - Y), \quad v = -\rho^{-1} \int_0^Y (\rho_T + (u\rho)_X) dY. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований возникает задача для нахождения  $u(X, Y, T), h(X, T)$ :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} u_T + uu_X + vu_Y + h_X &= 0, \quad 0 \leq Y \leq h(X, T), \\ f'(h)h_T + \left( \int_0^h f'(h - Y)u(X, Y, T) dY \right)_X &= 0, \\ u(X, Y, 0) &= u_0(X, Y), \quad h(X, 0) = h_0(X) \end{aligned}$$

( $p, \rho, v$  определяются формулами (1.3)).

Для частного класса безвихревых движений (в приближении длинных волн отсутствие завихренности эквивалентно условию  $u_Y = 0$ ) уравнения (1.4) сводятся к аналогу одномерной газовой динамики:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \eta(u_T + uu_X) + P_X &= 0, \quad \eta_T + (u\eta)_X = 0 \\ (\eta = f(h) - p_0, \quad P &= \int_0^h (f(\xi) - p_0) d\xi). \end{aligned}$$

При этом уравнение состояния «газа» имеет вид

$$P = P(\eta) = \int_{p_0}^{\eta+p_0} (\xi - p_0)(\rho(\xi))^{-1} d\xi$$

( $P'(\eta) > 0$  при  $\eta > 0$ ). Система (1.5), описывающая распространение длинных волн в безвихревом потоке, является гиперболической системой дифференциальных уравнений.

В общем случае завихренного течения, когда  $u_y \neq 0$ , интегродифференциальные уравнения (1.4) можно свести к бесконечной системе дифференциальных уравнений для моментов:

$$(1.6) \quad A_{nT} + A_{n+1X} + nA_{n-1} \left( \int_{p_0}^{\lambda_0+p_0} \rho^{-1}(\xi) d\xi \right)_X = 0$$

$$(A_n = \int_0^h \rho u^n dY, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Выяснение условий гиперболичности бесконечной системы уравнений вида (1.6) затруднительно, так как общая теория таких систем не разработана. С другой стороны, задачу со свободной границей (1.4) можно преобразовать к задаче Коши для интегродифференциальных уравнений специального вида в фиксированной области и воспользоваться методом анализа характеристических свойств интегродифференциальных уравнений [3].

С помощью замены переменных [3]

$$(1.7) \quad X = x, T = t, Y = \Phi(x, t, \lambda) \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

где  $\Phi(x, t, \lambda)$  — решение задачи Коши:

$$(1.8) \quad \Phi_t + u(x, \Phi, t)\Phi_x = v(x, \Phi, t), \quad \Phi(x, 0, \lambda) = \lambda h_0(x),$$

область течения отображается на полосу  $0 \leq \lambda \leq 1, -\infty \leq x \leq \infty$ . В силу (1.4), (1.8) для функций

$$u(x, t, \lambda), H(x, t, \lambda) = \rho(x, t, \lambda)\Phi_\lambda(x, t, \lambda) \quad (H > 0),$$

определенных в указанной полосе, возникает задача Коши:

$$(1.9) \quad u_t + uu_x + (\rho(p^0))^{-1} \int_0^1 H_x dv = 0, \quad H_t + (uH)_x = 0,$$

$$u(x, 0, \lambda) = u_0(x, \lambda h_0(x)), \quad H(x, 0, \lambda) = \rho_0(x, \lambda h_0(x))h_0(x).$$

При этом давление  $p(x, t, \lambda)$  находится по формуле

$$p(x, t, \lambda) = p_0 + \int_\lambda^1 H(x, t, v) dv.$$

Через  $p^0$  в (1.9) обозначено давление на дне ( $p^0 = p(x, t, 0)$ ). Если функции  $u, H, p$  определены, то уравнение состояния  $\rho = \rho(p)$  позволяет найти плотность, а соотношения

$$\Phi_\lambda = \rho^{-1}H, \quad \Phi(x, t, 0) = 0, \quad \Phi_t + u\Phi_x = v$$

определяют функцию  $\Phi$  и вертикальную компоненту скорости. При условии  $\Phi_\lambda \neq 0$  замена переменных (1.7) обратима, что позволяет найти решение  $u(X, Y, T), h(X, T) = \Phi(X, T, 1)$  задачи (1.4). Таким образом, задача о завихренных течениях со свободной границей (1.1) сведена к задаче (1.9) в фиксированной области.

2. Условие гиперболичности системы уравнений (1.9). Вопрос о корректности задачи Коши для системы (1.9) при произвольных начальных данных открыт. Неизвестно также, обладают ли уравнения (1.9) таким важным качественным свойством, характеризующим волновые процессы, как конечность скорости распространения возмущений. Возникает вопрос о

корректной постановке граничных условий при моделировании течений в ограниченных областях. Для системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка решение этих вопросов связано с исследованием свойств гиперболичности системы и поведения ее характеристик. В этом пункте будут выяснены условия гиперболичности уравнений (1.9). Основа анализа — обобщение понятия гиперболичности и определения характеристик, предложенное для систем уравнений с операторными коэффициентами в [3].

Система уравнений (1.9) имеет вид

$$(2.1) \quad U_t + AU_x = 0, \quad U = \begin{pmatrix} u(x, t, \lambda) \\ H(x, t, \lambda) \end{pmatrix},$$

где  $A$  — оператор, действующий на вектор-функцию  $f = (f_1, f_2)^T$  по правилу

$$Af = \begin{pmatrix} uf_1 + \sigma \int_0^1 f_2 d\lambda \\ hf_1 + uf_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = [\rho(p_0 + \int_0^1 H dv)]^{-1}.$$

Согласно [3], характеристическая кривая системы уравнений (2.1)  $x = x(t)$  определяется дифференциальным уравнением  $x'(t) = k(x, t)$  ( $k$  — собственное значение оператора  $A^*$ ). При этом уравнение

$$(2.2) \quad (F, (A - kI)\varphi) = 0$$

относительно линейного вектор-функционала  $F = (F_1, F_2)$ , действующего на произвольную бесконечно дифференцируемую вектор-функцию переменного  $\lambda$  (зависящую от  $x, t$  как от параметров), имеет нетривиальное решение в классе локально интегрируемых либо обобщенных функций (функции  $u, H$  считаем бесконечно дифференцируемыми,  $(F, \varphi)$  обозначает результат действия функционала  $F$  на пробную функцию  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ ). Действием  $F$  на уравнения (2.1) получаем соотношение на характеристике:

$$(2.3) \quad (F, U_t + kU_x) = 0.$$

Система (2.1) будет гиперболической, если все собственные числа  $k$  действительны и совокупность соотношений на характеристиках (2.3) эквивалентна уравнениям (2.1).

Из уравнения (2.2) с учетом независимости пробных функций  $\varphi_1, \varphi_2$  получаются следующие равенства:

$$(F_1, (u - k)\varphi_1) + (F_2, H\varphi_1) = 0, \quad (F_2, (u - k)\varphi_2) + \sigma \int_0^1 \varphi_2 dv (F_1, 1) = 0.$$

В силу этих равенств действие  $F_2$  на пробную функцию  $\varphi$  определено, если задано действие  $F_1$ :

$$(2.4) \quad (F_2, \varphi) = - (F_1, (u - k)H^{-1}\varphi).$$

Функционал  $F_1$  и значение  $k$  находятся в результате решения задачи на собственные значения:

$$(2.5) \quad (F_1, (u - k)^2 H^{-1}\psi) - \sigma \int_0^1 \psi dv (F_1, 1) = 0$$

( $\psi$  — произвольная пробная функция). Для построения решений уравнения (2.5) рассмотрим множество чисел  $k$  комплексной плоскости вне отрезка значений функции  $u$ :  $k \neq u(x, t, \lambda)$  ( $x, t$  фиксированы),  $\lambda \in [0, 1]$ . Из (2.5) вытекает

$$(2.6) \quad (F_1, \psi) = \sigma \int_0^1 \frac{\psi H dv}{(u - k)^2} (F_1, 1).$$

Нетривиальные решения уравнения (2.5) существуют для  $k = k'$ , удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$(2.7) \quad \chi(k') = 1 - \sigma \int_0^1 \frac{Hdv}{(u-k)^2} = 0.$$

Для  $k = k'$  действие функционала  $F_1^i$  на пробную функцию  $\psi$  задано формулой (2.6), где следует положить  $(F_1^i, 1) = 1$  ( $F_1^i$  определяется с точностью до множителя, зависящего от  $x, t$ ). В дальнейшем будут рассматриваться течения с монотонным профилем скорости:  $u_\lambda \neq 0$ . Для гладкого течения достаточно потребовать условие  $u_\lambda \neq 0$  в начальный момент времени.

Пусть  $k = k^i$  — одно из значений горизонтальной скорости: для некоторого  $\lambda$   $k^i(x, t) = u(x, t, \lambda)$ . Для каждого  $k^i$  определим действия функционалов  $F_1^{\lambda 1}, F_1^{\lambda 2}$  на  $\psi(v)$ :

$$(2.8) \quad (F_1^{\lambda i}, \psi) = -\psi'(\lambda), \quad (F_1^{\lambda 2}, \psi) = \psi(\lambda) + \sigma \int_0^1 \frac{H(v)(\psi(v) - \psi(\lambda))dv}{(u(v) - u(\lambda))^2}.$$

Здесь интеграл вычисляется в смысле главного значения; в обозначениях для краткости записи опущена зависимость функций от переменных  $x, t$ . Непосредственное вычисление показывает, что (2.5) выполнено, если  $k = k^\lambda(x, t)$ , а  $F_1 = F_1^{\lambda 1}$  либо  $F_1 = F_1^{\lambda 2}$ . Характеристическое уравнение (2.7) имеет два корня ( $k = k^3, k = k^4$ ) на действительной оси вне интервала изменения  $u(x, t, \lambda)$ . Для определенности будем считать, что  $u_\lambda > 0$  (случай  $u_\lambda < 0$  полностью аналогичен). Так как  $\chi(k) \rightarrow 1$  при  $|k| \rightarrow \infty$ ,  $\chi(k) \rightarrow -\infty$  при  $k \rightarrow u_0 = u(x, t, 0)$  и  $k \rightarrow u_1 = u(x, t, 1)$ , то корни  $k = k^3 < u_0$ ,  $k = k^4 > u_1$  найдутся. Неравенство  $\chi'(k) \neq 0$  выполнено при  $k > u_1$  и  $k < u_0$ , поэтому других действительных корней вне отрезка  $[u_0, u_1]$  нет.

Согласно (2.4), функционалы  $F_2^{\lambda 1}, F_2^{\lambda 2}, F_2^i$  ( $i = 3, 4$ ) действуют на пробную функцию  $\varphi(v)$  по правилу

$$(F_2^{\lambda 1}, \varphi) = u_\lambda(\lambda)H^{-1}(\lambda)\varphi(\lambda), \quad (F_2^i, \varphi) = -\sigma \int_0^1 \frac{\varphi(v)dv}{u(v) - k^i},$$

$$(F_2^{\lambda 2}, \varphi) = -\sigma \int_0^1 \frac{\varphi(v)dv}{u(v) - u(\lambda)}.$$

Условия гиперболичности системы уравнений (1.9) будут сформулированы в терминах  $\chi^\pm(x, t, \lambda) = \chi^\pm(u(\lambda))$  — предельных значений аналитической функции  $\chi(z)$  из верхней и нижней полуплоскости на отрезке  $[u(x, t, 0), u(x, t, 1)]$ :

$$\chi^\pm(u(\lambda)) = 1 + \sigma\omega_1^{-1}(u_1 - u(\lambda))^{-1} - \sigma\omega_0^{-1}(u_0 - u(\lambda))^{-1} - \sigma \int_0^1 \left( \frac{1}{\omega} \right)_v \frac{dv}{u(v) - u(\lambda)} \pm \pi i \left( \frac{1}{\omega} \right)_{\lambda u_\lambda} \sigma.$$

Здесь  $\omega = u_\lambda H^{-1}$ ; индексы 0 и 1 соответствуют значениям функций при  $\lambda = 0$  и 1;  $i$  — мнимая единица (при вычислении предельных значений использованы (2.7) и формула Сохоцкого — Племеля [4]).

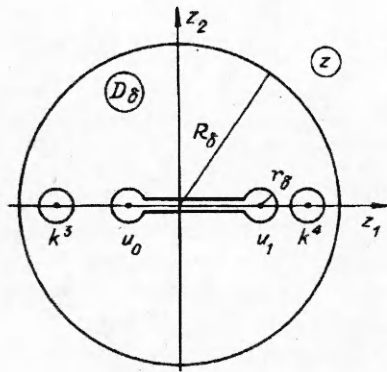
Для течения с монотонным профилем скорости справедлива

**Лемма 2.1.** Пусть функции  $u(x, t, \lambda), H(x, t, \lambda)$  удовлетворяют условиям

$$(2.9) \quad \chi^+ \neq 0, \quad k = \Delta \arg \chi^+(u) (\chi^-(u))^{-1} = 0.$$

Тогда уравнение (2.7) имеет только действительные корни (в (2.9)  $\arg f(u)$  — приращение аргумента комплекснозначной функции  $f$  при изменении  $\lambda$  от 0 до 1).

**Доказательство.** В плоскости комплексного переменного  $z$  рассмотрим область  $D_\delta$ , ограниченную окружностью радиуса  $R_\delta$  с центром в



начале координат, окружностями радиусов  $r_\delta$  с центрами в точках  $k^3, k^4, u_0, u_1$  и отрезками параллельных прямых, отстоящих от вещественной оси на расстоянии  $\delta$  ( $r_\delta \rightarrow 0, R_\delta \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ , см. рисунок). Согласно принципу аргумента [4], приращение аргумента функции  $\chi(z)$  вдоль границы области  $D_\delta$ , нормированное на  $2\pi$ , равно числу нулей функции  $\chi(z)$  в области  $D_\delta$  ( $\chi(z)$  не имеет полюсов в области  $D_\delta$ ). Так как  $\chi(z)$  имеет нули первого порядка в точках  $z = k^i$  ( $i = 3, 4$ ) и полюсы первого порядка в точках  $z = u_0, z = u_1$ , приращения аргумента на малых окружностях

в сумме равны нулю и условие отсутствия корней в области  $D_\delta$  при  $\delta \rightarrow 0$  дает второе условие (2.9). Первое условие (2.9) гарантирует отсутствие корней и на отрезке  $[u_0, u_1]$ .

**З а м е ч а н и е 2.1.** Любой комплексный корень  $k = k_1 + ik_2$  ( $k_2 \neq 0$ ) уравнения (2.7) принадлежит подобласти

$$(k_1 - r_0)^2 + k_2^2(1 + \sigma^{-1}(f(h) - p_0)^{-1}k_2^2) < r^2$$

$$(r = 2^{-1}(u_1 - u_0), r_0 = 2^{-1}(u_1 + u_0))$$

круга  $|\tilde{k} - r_0| < r$  (аналог теоремы Ховарда). Кроме того,  $u_0 < k_1 < u_1$ .

Указанные неравенства являются следствием соотношений, возникающих из (2.7) при выделении мнимой и действительной части,

$$\int_0^1 \frac{(u - k_1)Hdv}{|u - k|^4} = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{((u - k_1)^2 - k_2^2 - \sigma^{-1}(f(h) - p_2)^{-1}|u - k|^4)Hdv}{|u - k|^4} =$$

$$= \int_0^1 \frac{((u - r_0)^2 - (k_1 - r_0)^2 - k_2^2 - \sigma^{-1}(f(h) - p_0)^{-1}|u - k|^4)Hdv}{|u - k|^4} = 0$$

и очевидных неравенств  $(u - r_0)^2 \leq r^2, |u - k|^4 \geq k_2^4$ . Поэтому, если в процессе эволюции течения впервые появляются комплексные корни у уравнения  $\chi(z) = 0$ , они ответвляются от тех точек отрезка действительной оси  $[u_0, u_1]$ , где выполнено равенство  $\chi^\pm = 0$ . Условие  $\chi^\pm \neq 0$  в (2.9) исключает нейтральный случай и тем самым обеспечивает действительность корней уравнений (2.7) не только при заданных профилях  $u, H$ , но и при достаточно малых гладких возмущениях указанных профилей.

Система соотношений на характеристиках, получаемая действием функционалов  $F^{\lambda 1}, F^{\lambda 2}, F^i$  на уравнения (1.9), имеет вид

$$(2.10) \quad u_{\lambda t} + uu_{\lambda x} - u_\lambda H^{-1}(H_t + uH_x) = 0,$$

$$u_t + uu_x + \sigma \int_0^1 \frac{H(v)(u_t(v) + u(\lambda)u_x(v) - u_t(\lambda) - u(\lambda)u_x(\lambda))}{(u(v) - u(\lambda))^2} dv -$$

$$- \sigma \int_0^1 \frac{H_t(v) + u(\lambda)H_x(v)}{u(v) - u(\lambda)} dv = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{H(v)(u_\lambda(v) + k^i u_x(v)) dv}{(u(v) - k^i)^2} - \int_0^1 \frac{(H_i(v) + k^i H_x(v)) dv}{(u(v) - k^i)} = 0 \quad (i = 3, 4).$$

**Лемма 2.2.** Пусть функции  $S_1, S_{1\lambda}, S_2$  удовлетворяют условию Гельдера по переменной  $\lambda$  и для вектор-функции  $S = (S_1, S_2)^T$  выполнены соотношения  $(F^{31}, S) = 0, (F^{32}, S) = 0, (F^4, S) = 0$  ( $i = 3, 4$ ). Тогда  $S = 0$ .

**Доказательство.** С учетом первого равенства  $S_{1\lambda} = u_\lambda H^{-1} S_2$  уравнение  $(F^{32}, S) = 0$  преобразуется к виду

$$(2.11) \quad S_1(\lambda) - \sigma \int_0^1 \frac{1}{\omega(v)} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{S_1(v) - S_1(\lambda)}{u(v) - u(\lambda)} \right) dv = 0.$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что  $\varphi = \alpha_1(u - k^3)^{-1} + \alpha_2(u - k^4)^{-1}$  удовлетворяет уравнению (2.11) ( $\alpha_1, \alpha_2$  — параметры, не зависящие от  $\lambda$ ). Поэтому функция  $S_0 = S_1 - \varphi$  также является решением уравнения (2.11) и при соответствующем выборе  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  обращается в нуль, когда  $\lambda = 0$  и  $1$ . Интегрирование по частям в (2.11) дает следующее уравнение для определения  $S_0(\lambda)$ :

$$(2.12) \quad S_0 \{ \text{Re} \chi^+ \} - \sigma \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\omega(v)} (u^{-1}) \frac{S_0(v) du(v)}{u(v) - u(\lambda)} = 0.$$

Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений [4], уравнение (2.12) однозначно разрешимо в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера по переменной  $v$  (или  $u(v)$ ) и обращающихся в нуль на концах интервала  $[u_0, u_1]$ , если  $\chi^+ \neq 0$  и

$$\kappa = \Delta \arg \chi^+(u) (\chi^-(u))^{-1} = 0.$$

Тогда  $S_0(\lambda) = 0$ .

Соотношения  $(F^i, S) = 0$  ( $i = 3, 4$ ) дают два уравнения для определения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1 \Gamma_{33} + \alpha_2 \Gamma_{34} = \hat{0}, \quad \alpha_1 \Gamma_{34} + \alpha_2 \Gamma_{44} = 0.$$

Здесь

$$\Gamma_{ij} = \int_0^1 \omega^{-1} \frac{\partial}{\partial v} ((u - k^i)^{-1} (u - k^j)^{-1}) dv.$$

Можно проверить, что  $\Gamma_{ij} = 0, i \neq j$ , если  $k^i, k^j$  — корни уравнения (2.7). Так как  $\Gamma_{ii} \neq 0$ , то  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, S_1 = S_0 + \varphi = 0, S_2 = (u_\lambda)^{-1} H S_{1\lambda} = 0$ . Лемма доказана.

Для течений с монотонным профилем скорости, удовлетворяющих условию  $\chi^+ \neq 0$ , справедлива

**Теорема 2.1.** Условия (2.9) необходимы и достаточны для гиперболичности уравнений (1.9).

Действительно, согласно лемме 2.1, условия (2.9) достаточны для действительности корней характеристического уравнения. Условия на характеристиках (2.10) имеют вид соотношений леммы 2.2, где в качестве  $S_i$  взяты левые части уравнений (1.9). При выполнении условий леммы 2.2 из (2.10) следуют равенства  $S_i = 0$ , что доказывает эквивалентность систем (1.9) и (2.10). Необходимость второго условия (2.9) в классе функций, удовлетворяющих условию  $\chi^+ \neq 0$ , вытекает из принципа аргумента [4] теории аналитических функций.

**З а м е ч а н и е 2.1.** Условия гладкости функций  $u, H$  можно ослабить, при этом доказанное утверждение остается в силе. Заключение теоремы 2.1 верно, если  $u, \omega$  — дифференцируемые функции, а  $u_\lambda, \omega_\lambda, H$  удовлетворяют условию Гельдера по переменной  $\lambda$ .



Гиперболичность системы уравнений на начальных данных  $u(x, 0, \lambda)$ ,  $H(x, 0, \lambda)$  необходима для локальной корректности задачи Коши. Для уравнений (1.9), линеаризованных на стационарном решении  $u = u^0(\lambda)$ ,  $H = H^0(\lambda)$ , можно построить пример некорректности постановки задачи Коши, если для рассматриваемых  $u^0, H^0$  уравнение (2.7) имеет комплексные корни. Данное решение описывает сдвиговое течение слоя глубины  $h_0$ , при этом  $u = u^0(yh_0^{-1})$ ,  $v = 0$ ,  $\rho = f'(h_0 - y)$ ,  $y = \lambda h_0$ ,  $H^0(\lambda) = f'(h_0(1 - \lambda))h_0$ . Система для возмущений

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u_t + u^0 u_x + \sigma^0 \int_0^1 H_x dv &= 0, \\ H_t + u^0 H_x + H^0 u_x &= 0 \end{aligned}$$

имеет решение в виде растущих со временем экспонент

$$(2.14) \quad U = (u, H)^T = e^{-l}(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda))^T \exp(i l(x - kt))$$

( $l$  — произвольное действительное число,  $k$  — комплексный корень ( $\text{Im}k > 0$ ) уравнения (2.7) при  $u = u^0, H = H^0$ ). При  $l \rightarrow \infty$   $U(x, 0, \lambda) \rightarrow 0$ , но  $U(x, t, \lambda)$  не стремится к нулю, что указывает на некорректность задачи Коши при нарушении условий (2.9).

Отметим, что в гиперболическом случае уравнения (2.13) можно свести к характеристической форме, аналогичной (2.10), что позволяет проинтегрировать линеаризованную систему в явном виде.

3. Анализ условий гиперболичности. Как показано выше, проведенный анализ гиперболичности уравнений длинных волн имеет непосредственное отношение к исследованию устойчивости стационарных течений с «замороженным» относительно  $x, t$  профилем скорости (профиль скорости стационарного течения совпадает с профилем скорости нестационарного при выбранных фиксированных значениях  $x, t$ ). Для ряда известных критериев устойчивости стационарных сдвиговых течений несжимаемой жидкости в слое с заданной верхней границей из (2.9) получаются соответствующие аналоги (при этом жидкость в общем случае сжимаема, верхняя граница свободна).

С учетом равенств

$$\omega = - (du/dp), \Delta \arg \chi^+ (\chi^-)^{-1} = 2 \Delta \arg \chi^+$$

условия (2.9) представляются в виде

$$(3.1) \quad Z = A + iB \neq 0, \kappa = \Delta \arg(A + iB) = 0,$$

$$\begin{aligned} A &= m \left( 1 - \sigma \left( \frac{du}{dp} \right)_1^{-1} (u_1 - u)^{-1} + \right. \\ &+ \left. \sigma \left( \frac{du}{dp} \right)_0^{-1} (u_0 - u)^{-1} + \sigma \int_{u_0}^{u_1} \frac{d}{du} \left( \left( \frac{du}{dp} \right)^{-1} \right) \frac{dU}{U - u} \right), \end{aligned}$$

$$B = m \sigma \pi i \frac{d}{du} \left( \left( \frac{du}{dp} \right)^{-1} \right), m = (u_1 - u)(u - u_0)$$

(дифференцирование и интегрирование выполняются при фиксированных  $x, t$ ). Контур  $\Gamma$ , описываемый точкой  $Z$  при изменении  $u$  от  $u_0$  до  $u_1$ , начинается и оканчивается на действительной полуоси (при  $u_1 > 0$   $Z(u_1) > 0$ ,  $Z(u_0) > 0$ , при  $u_1 < 0$   $Z(u_1) < 0$ ,  $Z(u_0) < 0$ ).

Приращение аргумента определяется числом оборотов точки  $Z$  вокруг нуля, умноженным на  $2\pi$ , при движении  $Z$  вдоль  $\Gamma$ . Если  $d^2u/dp^2 \neq 0$ , то  $\Gamma$  целиком лежит в верхней или нижней полуплоскости и  $Z$  не совершает оборотов вокруг нуля. Тогда  $\kappa = 0$  и условия гиперболичности выполнены (аналог классического критерия устойчивости Рэлея). Если  $du/dp < 0$ , а



$d^2u/dp^2$  обращается в нуль в единственной точке  $u = u_* \in (u_0, u_1)$ , то условие  $\kappa = 0$  выполнено, если  $A(u_*) > 0$  (аналог критерия Розенблюта и Симона [5]). При выполнении этого условия нуль не попадает во внутренность  $\Gamma$ . Отметим, что если в точке  $u_*$  знак  $d^2u/dp^2$  меняется с отрицательного на положительный, то неравенство  $A(u_*) > 0$  автоматически выполнено. Действительно, первые члены в выражении (3.1) для  $A$  положительны, а интегральный член можно представить в виде двух положительных слагаемых:

$$-\int_{u_0}^{u_*} \left(\frac{du}{dp}\right)^{-3} \frac{d^2u}{dp^2} \frac{dU}{U - u_*} - \int_{u_*}^{u_1} \left(\frac{du}{dp}\right)^{-3} \frac{d^2u}{dp^2} \frac{dU}{U - u_*}$$

(интегралы сходятся, так как  $d^2u/dp^2 = 0$  при  $u = u_*$ ). Условие  $A \neq 0$  также обеспечивает гиперболичность (1.9).

Приведем пример однопараметрического семейства стационарных решений, на котором происходит смена типа системы уравнений (1.9) при изменении параметра.

Пусть уравнение состояния баротропной среды имеет вид  $\rho = \rho(p) = bp^{1/3}$  ( $b = \text{const}$ ), течение происходит в слое глубины  $h = 9(2b)^{-1}p_0^{2/3}$ , давление  $p$  в слое и горизонтальная скорость определены формулами

$$p = (4p_0^{2/3} - 2 \cdot 3^{-1}by)^{3/2}, \quad u = 4p_0^{1/3}av(y) \quad (a > 0),$$

где функция  $v(y)$  является корнем уравнения

$$y = 6b^{-1}p_0^{2/3}(1 - (1 - 2(6^{-1}(2v - 1)^3 + 6^{-1} + 5(48)^{-1}v))^{2/3}),$$

обращающимся в нуль при  $y = 0$ . На этом решении выполнено равенство

$$(3.2) \quad dp/dv = -16p_0((2v - 1)^2 - 5(48)^{-1})$$

( $d^2p/dv^2 = 0$  при  $v = 2^{-1}$ ). Интеграл в (3.1) можно вычислить в виде

$$A = 16p_0^{2/3}a^2(1 - v)v[1 + (32a^2b)^{-1}(53(3(1 - v))^{-1} + 53(3v)^{-1} - 128 - 64(2v - 1)\ln(v^{-1} - 1))].$$

При  $v = 2^{-1}$   $A > 0$ , когда  $a > a_k$ , и  $A < 0$ , когда  $a < a_k$ , где критическое значение  $a_k = (331/96)^{1/2} \cdot b^{-1}$ . Поэтому при  $a < a_k$  уравнение (2.7) имеет комплексные корни. Этот пример показывает, что неустойчивость стационарного течения возможна при как угодно малых скоростях потока. (Критерий устойчивости формулируется в терминах функции  $dp/du$ , а она стремится к бесконечности при  $a \rightarrow 0$ .) Если в приведенных выше формулах считать  $a$  функцией  $x$ , то имеем пример начальных данных для системы уравнений (1.9), принадлежащих области гиперболичности при  $a(x) < a_k$ , либо пример некорректности постановки задачи Коши, если неравенство  $a(x) < a_k$  нарушается при некоторых  $x$ .

Отметим, что при  $\rho(p) \equiv \text{const}$  приведенный анализ дает условия гиперболичности системы уравнений длинных волн в несжимаемой жидкости. В области гиперболичности длинноволновые процессы характеризуются конечной скоростью распространения возмущений, причем скорость распространения возмущения, согласно (2.7), нелокально зависит от параметров потока, она определяется интегралами от параметров потока по глубине. Условия (2.9) описывают область применимости модели длинных волн в случае монотонного профиля скорости, вне этой области необходимо привлекать более полные модели. На основе проведенного анализа естественно ввести понятия сверхкритических и докритических стационарных течений. В сверхкритическом течении, согласно (2.7),

$$1 - \sigma \int_{p_0}^p \frac{dp}{u^2} > 0,$$

в докритическом потоке выполняется обратное неравенство. На постановку граничных условий, как и в случае дифференциальных уравнений, влияет поведение характеристик на границе. В частности, на границе втекания жидкости нужно ставить разное количество граничных условий для докритического и сверхкритического потоков. Контроль за выполнением условий гиперболичности важен и при численном расчете течений. При этом если условия гиперболичности выполнены при  $t = 0$ , а гладкое решение системы (1.9) удовлетворяет условию  $Z \neq 0$  в полосе  $0 \leq t \leq t_0$ , то данные при  $t = t_0$  тоже соответствуют области гиперболичности уравнений (1.9) (гомотопные векторные поля имеют одинаковое вращение [6]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-013-17621).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Varley E., Blythe P.A. Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. — 1983. — V. 68. — P. 103.
2. Sachdev P.L., Varughese Philip. Exact simple waves on shear flows in a compressible barotropic medium // Stud. Appl. Math. — 1988. — V. 79. — P. 193.
3. Тешуков В.М. О гиперболичности уравнений длинных волн // ДАН СССР. — 1985. — Т. 284, № 3. — С. 555.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
5. Rosenbluth M., Simon A. Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow // Phys. Fluids. — 1964. — V. 7, N 4. — P. 557.
6. Красносельский М.А., Перов А.И., Павловский А.И. и др. Векторные поля на плоскости. — М.: Физматгиз, 1963.

г. Новосибирск

Поступила 22/II 1994 г.

УДК 532.529

В.Ф. Волков, А.В. Федоров, В.М. Фомин

### ПРОБЛЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА С ОБЛАКОМ ЧАСТИЦ

Волновая картина, возникающая при взаимодействии ударных волн (УВ) с облаками частиц, имеет важное значение при изучении процессов инициирования реагирующих газовзвесей, подъема пыли за фронтом лидирующей УВ, демпфирования ударных волн пылевыми завесами и т.д. В зависимости от начальных параметров эти течения в грубом приближении могут сводиться к следующим [1—3]:

- движение с коллективной УВ, которая стоит (движется) перед облаком частиц или присоединена к его передней кромке (режим 1),
- течение газозвеси, каждая частица которой обладает индивидуальной УВ (режим 2).

В [4, 5] приведена простая количественная оценка максимального числа Маха  $M_2$  непрерывной фазы за фронтом УВ, которая прошла через частицу (скорость ее в начальный момент равна нулю):

$$M_2 = 2(M_0^2 - 1) \{ [M_0^2(\gamma - 1) + 2] [2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1)] \}^{-1/2}.$$

Результаты расчетов по этой формуле, приведенные в таблице, показывают, что при  $M_0 > M_0(\gamma)$  абсолютная скорость за фронтом УВ будет сверхзвуковой и вблизи каждой частицы образуется индивидуальная УВ ( $M_0$  — число Маха набегающей УВ,  $\gamma$  — показатель адиабаты газа).

© В.Ф. Волков, А.В. Федоров, В.М. Фомин, 1994