

Ф и г. 5

При $x \rightarrow 1$ первый член в правой части уравнения (16) неограниченно возрастает, поэтому оно справедливо до тех пор, пока выполняется условие тонкости пленки: $H/(1-x) \ll 1/\epsilon$ (для приведенных экспериментальных данных это условие выполнено).

Таким образом, двумерная модель гравитационного пленочного течения жидкости по конфузурной поверхности, полученная на основе уравнений пограничного слоя, удовлетворительно описывает течение на основном участке конфузора и может быть использована для расчета процессов тепло- и массообмена в конфузурно-пленочных аппаратах.

Авторы благодарят В. Е. Накорякова за внимание к работе и стимулирующие замечания, П. И. Гешева — за помощь в постановке задачи и в обсуждении результатов.

Поступила 13 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Тё А. М., Сень Л. И., Подсушный А. М. Высокотемпературный нагрев морской воды в конфузурно-пленочном аппарате. — В кн.: Судовые энергетические установки. Межвузовский сборник. Владивосток: изд. ДВГУ, 1981.
2. Тё А. М., Сень Л. И. Пленочное течение жидкости по конфузурной поверхности. — Изв. СО АН СССР, 1983, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.

УДК 532.516.5

УПРУГОТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СМАЗКИ

М. А. Галахов, В. Н. Голубкин

(Москва)

Предложены постановки стационарных тепловых упругогидродинамических задач для упруговязкой максвелловской жидкости. Выделены основные безразмерные параметры. Показано, что задачи сводятся к уравнениям с конечномерно-операторными коэффициентами. Дано численное решение тепловой задачи для ньютоновской жидкости и изотермической задачи для нелинейно-вязкой жидкости. Найдены распределения скорости, температуры, тепловых потоков, давления, профиля зазора в контакте. Приведено сравнение с экспериментом.

1. Рассмотрим стационарную задачу о качении со скольжением двух упругих тел, прижатых одно к другому некоторой нагрузкой q . Окрестность контакта тел заполнена смазкой, которую будем считать несжимаемой нелинейно-вязкой жидкостью. Пусть оси x_1, x_2 прямоугольной системы координат лежат в плоскости контакта, ось z перпендикулярна к ней,

$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{k}$ — соответствующие орты. Тогда при выполнении обычных для упругогидродинамического контакта предположений [1] имеем следующую задачу, описывающую течение смазки, деформацию контактирующих тел и распространение в телах тепла, выделяющегося в контакте:

$$(1.1) \quad \partial p / \partial x_i = \partial \tau_i / \partial z, \quad \partial p / \partial z = 0, \quad \tau_i = GC_{i3};$$

$$(1.2) \quad 2\theta' [(\mathbf{u}, \nabla_{12}C) - (\Omega C)^T - \Omega C] + C^2 - \delta' + \frac{1}{3}(I_2 - I_1)C = 0;$$

$$(1.3) \quad \det C = 1, \quad I_1 = \text{Sp}(C), \quad I_2 = \frac{1}{2} \left(I_1^2 - \sum_{k,j=1}^3 C_{kj}^2 \right),$$

$$\theta' = \mu/G, \quad \nabla_{12} = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$\Omega_{i3} = \frac{\partial u_i}{\partial z}$ ($i = 1, 2$), остальные компоненты Ω равны нулю;

$$(1.4) \quad \rho c (\mathbf{u}, \nabla_{12}T) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{G^2}{12\mu} (2I_1^2 + I_1 I_2 - 6I_2 - 9);$$

$$(1.5) \quad \nabla_{12} \int_{-h_1}^{h_2} \mathbf{u} dz = 0, \quad \mu = \mu_0 \exp \left[\frac{\alpha p}{1 + \beta p} - \left(\delta + \frac{\kappa p}{1 + \beta p} \right) (T - T_0) \right];$$

$$(1.6) \quad h_j = \frac{h_c}{2} + f_j + \frac{1}{E'_j} \iint_{\omega} [K_j(\xi - \mathbf{x}) - K_j(\xi)] p(\xi) d\xi;$$

$$(1.7) \quad \rho_j c_j (\mathbf{u}_j, \nabla T_j) = k_j \nabla^2 T_j, \quad \nabla = \nabla_{12} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z};$$

$$(1.8) \quad \iint_{\omega} p(\xi) d\xi = q, \quad p|_{\partial\omega} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\partial\omega} = 0;$$

$$(1.9) \quad u_i [\mathbf{x}, (-1)^j h_j] = U_j;$$

$$(1.10) \quad \left(\left[\int_{-h_1}^{h_2} \mathbf{u} dz - \mathbf{q}_0 \right], \mathbf{n} \right) \Big|_{\partial_{+\omega}} = 0, \quad C|_{\partial_{+\omega}} = \delta', \quad T|_{\partial_{+\omega}} = T_0;$$

$$(1.11) \quad k_j \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\gamma_{0j}} = -\lambda_j (T_j - T_0), \quad k \frac{\partial T}{\partial z} [\mathbf{x}, (-1)^j h_j] = k_j \frac{\partial T_j}{\partial z} [\mathbf{x}, (-1)^j h_j],$$

$$T [\mathbf{x}, (-1)^j h_j] = T_j [\mathbf{x}, (-1)^j h_j].$$

Здесь p — давление; τ_1, τ_2 — компоненты вектора касательного напряжения; C — тензор конечных деформаций, $C = (\delta' - 2\varepsilon)^{-1}$, где δ' — единичный тензор, ε — полуразность метрических тензоров в деформированном и недеформированном состояниях; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $z = h_j(x_1, x_2)$, $z = f_j(x_1, x_2)$ — деформированные и исходные геометрические формы контактирующих поверхностей; h_c — толщина пленки в центре; \mathbf{u} , T , ρ , c , k , μ — скорость, температура, плотность, теплоемкость, теплопроводность и вязкость (величины без индекса относятся к смазке, с индексом $j = 1, 2$ — к телам); G — высокочастотный модуль сдвига смазки; $E'_j = E_j(1 - \nu_j^2)$, E_j , ν_j — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов тел; K_j — функция Грина, определяющая нормальное упругое перемещение поверхности j -го тела; U_j — скорости поверхностей без учета касательных перемещений; λ_j — коэффициенты теплоотдачи; μ_0 , α , β , κ , δ — постоянные, характеризующие свойства смазки; ω — область контакта, для которой входная ($\partial_{+\omega}$) и выходная ($\partial_{-\omega}$) границы заранее неизвестны и должны определяться из решения задачи; γ_{0j} — границы тел с окружающей средой, которая имеет температуру T_0 ; \mathbf{n} — внешняя нормаль; \mathbf{q}_0 — заданный поток смазки на входе в контакт.

Расчет параметров трехмерного упругогидродинамического контакта в указанной постановке представляет весьма сложную и трудоемкую за-

дачу. Поэтому исследуем ряд случаев, когда введение естественных упрощений делает проблему более обозримой и доступной для анализа и численного решения на современных ЭВМ.

2. Рассмотрим контакт цилиндров из одинакового материала, оси которых параллельны направлению x_2 . Такую задачу можно считать двумерной ($\partial/\partial x_2 = 0$, $C_{22} = 1$, $C_{12} = C_{32} = 0$). Будем полагать, что характерное время установления равновесных значений напряжений в смазке θ' существенно меньше времени пребывания частицы в контакте, и пренебрежем конвективными членами в уравнениях (1.2) для C_{ij} . В этом случае аналогично [1]

$$C_{11} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{1+4\Gamma^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1+4\Gamma^2}}}, \quad C_{13} = \frac{2\Gamma}{1+\sqrt{1+4\Gamma^2}}, \quad \Gamma = \theta' \frac{\partial u_1}{\partial z}$$

и упруговязкие свойства проявляются только в нелинейной зависимости касательного напряжения от скорости сдвига

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{G}{\mu} f\left(\frac{\tau_1}{G}\right),$$

причем для рассматриваемой максвелловской среды $f(x) = x(1-x^2)^{-1}$. Воспользуемся также решением задачи о прогреве цилиндров при достаточно больших числах Пекле и учтем изменение температуры на входе за счет тепловыделения в контакте [1, 2]. Обозначим $x = x_1$, $\tau = \tau_1$, $u = u_1$, область контакта $a \leq x \leq d$. Перейдем к безразмерным переменным $x' = x/b$, $z' = z/h_0 - (h_2 - h_1)/2h_0$, $h' = (h_1 + h_2)/h_0$, $p' = p/p_0$, $\tau' = \tau h_0/\mu_0 U$, $u' = u/U - 1$, $\theta = \delta(T - T_0)$, где $p_0 = \sqrt{qE'/2\pi R}$ — максимальное герцево давление, $b = \sqrt{8qR/\pi E'}$ — полуширина контакта по Герцу, h_0 — толщина пленки при $x = d$, $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, R_j — радиусы цилиндров, $U = (U_1 + U_2)/2$. Функция Грина для цилиндров, замененных в окрестности контакта на полупространства, равна $K(\eta) = -(4/\pi) \ln |\eta|$. Поскольку давление постоянно поперек зоны контакта, проинтегрируем уравнение импульсов. В результате задача принимает следующий вид (штрихи опущены):

$$(2.1) \quad \tau = 12 \frac{H_0^2}{V} \frac{dp}{dx} z + \tau_0;$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \exp\left[-\frac{Qp}{1+Np} + \Theta\left(1 + \frac{Ap}{1+Np}\right)\right] \frac{\tau}{1 - (F\tau/6)^2};$$

$$(2.3) \quad B(u+1) \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Delta(x^2 - d^2) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + H \exp\left[-\frac{Qp}{1+Np} + \Theta\left(1 + \frac{Ap}{1+Np}\right)\right] \frac{\tau^2}{[1 - (F\tau/6)^2]^2};$$

$$(2.4) \quad \frac{d}{dx} \left(h + \int_{-h/2}^{h/2} u dz \right) = 0;$$

$$(2.5) \quad H_0(h-1) = x^2 - d^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^d p(\xi) \ln \left| \frac{d-\xi}{\xi-x} \right| d\xi;$$

$$(2.6) \quad p(a) = p(d) = \frac{dp}{dx}(d) = 0, \quad \int_a^d p(\xi) d\xi = \pi/2;$$

$$(2.7) \quad u(\pm h/2) = \pm \Phi, \quad h(a) + \int_{-h/2}^{h/2} u dz|_{x=a} = M;$$

$$(2.8) \quad \Theta(\pm h/2) = \mp \text{Pk}_j \int_a^x \frac{\partial \Theta}{\partial z}(\xi, \pm h/2) \frac{z\xi}{\sqrt{x-\xi}} \mp \text{Bk}_j \int_a^d \frac{\partial \Theta}{\partial z}(\xi, \pm h/2) d\xi,$$

где $\tau_0 = \tau(x, 0)$. Формулировка задачи содержит следующие безразмерные параметры (совокупность их обозначим Π_i):

$$V = \frac{3\pi\mu_0 U E' R}{q^2}, \quad Q = \alpha \sqrt{\frac{q E'}{2\pi R}},$$

$$\bar{N} = \frac{Q}{\alpha} \bar{\rho}, \quad \bar{A} = \frac{Q}{\delta\alpha} \bar{\alpha}, \quad \bar{F} = \frac{6\mu_0 U}{\bar{G}h_0}, \quad \bar{B} = \frac{\rho c U h_0^2}{bk},$$

$$\Delta = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{2H_0}, \quad M = \frac{q_0}{U h_0}, \quad H = \frac{\mu_0 \delta U^2}{k}, \quad \Phi = \frac{U_2 - U_1}{2U},$$

$$Pk_j = \frac{\bar{v}}{k_j} \frac{\bar{v}}{h_0} Re_j^{-1/2}, \quad Re_j = \frac{\rho_j c_j U_j b}{k_j} \text{ — числа Пекле,}$$

$$Bk_j = \frac{\bar{v}}{k_j} \frac{\bar{v}}{2\pi h_0} Bi_j^{-1}, \quad Bi_j = \frac{R_j \lambda_j}{k_j} \text{ — числа Био.}$$

Последнее из условий (2.6) служит для определения зависимости $H_0 = H_0(\Pi_i)$, после чего для заданных значений физических параметров задачи находится неизвестная заранее величина $h_0 = H_0 b^2 / 2R$. Основные характеристики упругогидродинамического контакта представимы в виде следующих зависимостей: минимальная и средняя толщины смазочной пленки

$$(2.9) \quad h_{\min} = h_0 h'_{\min}(\Pi_i), \quad h_* = h_0 h'_*(\Pi_i);$$

границы области контакта

$$(2.10) \quad a = ba'(\Pi_i), \quad d = bd'(\Pi_i);$$

касательная сила, действующая на j -й цилиндр

$$(2.11) \quad X_j = (-1)^{j+1} K_f q,$$

где коэффициент трения K_f имеет значение

$$(2.12) \quad K_f = \frac{R}{b} \left[\frac{R_2 - R_1}{\pi(R_2 + R_1)} \int_{a'}^{a'} p' x' dx' + \frac{V}{2H_0} \int_{a'}^{a'} \tau_0' dx' \right];$$

тепловой поток из смазки в цилиндр и максимальная температура смазки

$$(2.13) \quad q_{Wj} = (-1)^{j+1} \frac{kb}{\delta h_0} \dot{q}'_j(\Pi_i), \quad \dot{q}'_j = \int_{a'}^{d'} \frac{\partial \Theta'}{\partial z'} \left[x', (-1)^j \frac{h'}{2} \right] dx',$$

$$T_{\max} = \delta^{-1} \Theta'_{\max}(\Pi_i).$$

Отмеченные штрихом безразмерные функции, содержащиеся в правых частях (2.9)–(2.13), определяются на основе решения задачи (2.1)–(2.8).

3. Пусть температуры поверхностей заданы и постоянны $\Theta[x', (-1)^j \times h/2] = \Theta_j$ и $N = 0$. Введем переменные $t = \Theta - \vartheta$, $y = z/(h/2)$, $\zeta(x, y) = t[x, (h/2)y](1 + Ap)$, $\xi_0 = \tau_0/2h$, $\vartheta = (\Theta_1 + \Theta_2)/2$, $S = (\Theta_2 - \Theta_1)/2$. При этом в параметры Π_i вместо μ_0 войдет $\mu_0 = \mu_0 e^{-\vartheta}$. Проинтегрируем (2.2) поперек слоя и с учетом граничных условий (2.7) получим соотношение

$$2\Phi = e^{-Q\vartheta h^2} \int_{-1}^1 f(\xi_0, p, \frac{dp}{dx}, h, y; H_0, V, F) e^{\xi_0 dy},$$

$$\text{где } f = 3 \left(\frac{H_0^2}{V} \frac{dp}{dx} y + \frac{\xi_0}{3} \right) \left[1 - F^2 h^2 \left(\frac{H_0^2}{V} \frac{dp}{dx} y + \frac{\xi_0}{3} \right)^2 \right]^{-1},$$

определяющее ξ_0 в виде функционала

$$(3.4) \quad \xi_0 = 3\varphi \left(\zeta; h, p, \frac{dp}{dx}, H_0, V, F, \Phi \right).$$

Найдя скорость u из (2.2), получим уравнения

$$(3.2) \quad B \left[1 - \Phi + h^2 e^{-Qp} \int_{-1}^y f(3\varphi) e^{\zeta} dy \right] \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2\Delta(x^2 - d^2)}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{A\zeta}{1 + Ap} \frac{dp}{dx} \right] = \\ = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 4H(1 + Ap) e^{-Qp + \zeta} h^2 \left(\frac{H_0^2}{V} \frac{dp}{dx} y + \varphi \right) f(3\varphi);$$

$$(3.3) \quad \zeta(\pm 1) = \pm S(1 + Ap), \quad \zeta(a) = -\vartheta;$$

$$(3.4) \quad \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left[e^{-Qph^2} \int_{-1}^1 f(3\varphi) y e^{\zeta} dy \right] = 0.$$

Уравнение (3.2) и условия (3.3) определяют температуру $\zeta(x, y)$, а уравнение (3.4), являющееся аналогом уравнения Рейнольдса для неизотермической нелинейно-вязкой жидкости, вместе с условиями (2.6) и вторым условием (2.7) служит для нахождения давления $p(x)$ и постоянных a, d, H_0 . Толщина пленки $h(x)$ вычисляется по (2.5).

4. В предельном случае ньютоновской жидкости ($F = 0$) имеем явные выражения

$$(4.1) \quad \xi_0 = \left(2\Phi h^{-2} e^{Qp} - 3 \frac{H_0^2}{V} \frac{dp}{dx} Q_1 \right) Q_0^{-1} - \frac{6\Delta(x^2 - d^2)}{h} \frac{dp}{dx};$$

$$(4.2) \quad u(x, y) = -\Phi + \frac{2\Phi}{Q_0} \int_{-1}^y e^{\zeta} dy + \frac{2\Phi}{Q_0 Q_2 - Q_1^2} \Psi \left(Q_0 \int_{-1}^y y e^{\zeta} dy - Q_1 \int_{-1}^y e^{\zeta} dy \right),$$

$$\text{где } \Psi = \left(\frac{1}{\Phi} - \frac{Q_1}{Q_0} \right) - \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\Phi} - \frac{Q_1^*}{Q_0^*} \right),$$

$$Q_j = \int_{-1}^1 y^j e^{\zeta} dy, \quad Q_j^* = Q_j|_{x=d}.$$

С учетом (4.1), (4.2) уравнения (3.2), (3.4) можно записать в виде

$$(4.3) \quad B \left[1 - \Phi + \frac{2\Phi}{Q_0} \int_{-1}^y e^{\zeta} dy + \frac{2\Phi}{Q_0 Q_2 - Q_1^2} \Psi \left(Q_0 \int_{-1}^y y e^{\zeta} dy - Q_1 \int_{-1}^y e^{\zeta} dy \right) \right] \times \\ \times \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2\Delta(x^2 - d^2)}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{A\zeta}{1 + Ap} - \frac{2}{3} \frac{V}{H_0^2} \frac{e^{(Q-A\vartheta)p}}{h^2} \frac{Q_0 \Phi}{Q_0 Q_2 - Q_1^2} \Psi \right] = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \\ + 4H\Phi^2 (1 + Ap) \frac{e^{(Q-A\vartheta)p + \zeta}}{Q_0^2} (1 + \Psi) \left(\frac{y - Q_1 Q_0^{-1}}{Q_2 Q_0^{-1} - Q_1^2 Q_0^{-2}} \right)^2;$$

$$(4.4) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{2}{3} \frac{V}{H_0^2} \frac{e^{(Q-A\vartheta)p}}{h^2} \frac{Q_0 \Phi}{Q_0 Q_2 - Q_1^2} \Psi.$$

Аналогичные уравнения при $A = B = 0$ получены в [3]. При больших скоростях качения становится существенным [4] тепловыделение за счет сжатия смазки. Оно может быть учтено добавлением в правую часть (4.3) члена $\chi(1 + u) \left(\frac{\zeta}{1 + Ap} + \vartheta + \delta T_0 \right) \frac{dp}{dx}$, где параметр $\chi = \frac{\rho U E'}{4\delta R}$, $\varepsilon_0 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$ — коэффициент теплового расширения. Однако при умеренных скоростях качения влиянием этого фактора можно пренебречь [4]. Если, кроме того, значительна скорость скольжения (т. е. параметр Φ), то можно опустить член, связанный с конвективным переносом тепла, т. е. положить в (4.3) $B = 0$, опуская одновременно последнее условие в (3.3).

5. Для удобства численного решения системы (4.3), (4.4), (3.3), (2.6) при $A = B = 0$ и фиксированном a проинтегрируем (4.4) по x , а так-

же используем иной способ обезразмеривания p , x , избавляющий от необходимости выполнения последнего условия (2.6). Для этого отнесем давление и продольную координату соответственно к $12\mu_0 U \sqrt{2Rh_0}/h_0^2$ и $\sqrt{2Rh_0}$ и обозначим $L = 12\mu_0 \alpha U \sqrt{2Rh_0}/h_0^2$, $D = 96\mu_0 UR/(\pi E' h_0^2)$. Тогда получим

$$(5.1) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = -4H^2 \Phi^2 \frac{e^{Lp+\zeta}}{Q_0^2} (1 + \Psi)(y - Q_1 Q_0^{-1})^2 (Q_2 Q_0^{-1} - Q_1^2 Q_0^{-2})^{-2};$$

$$(5.2) \quad \frac{d}{dx} \left[h^3 e^{-Lp} \Gamma(\zeta; p, h) \frac{dp}{dx} + \omega(\zeta; p, h) \right] = 2x + D \int_a^d \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi;$$

$$(5.3) \quad h = 1 + x^2 - d^2 + D \int_a^d p(\xi) \ln \frac{d - \xi}{|\xi - x|} d\xi;$$

$$(5.4) \quad p(a) = p(d) = \frac{dp}{dx}(d) = 0, \quad \zeta(\pm 1) = \pm S,$$

$$\Gamma(\zeta; p, h) = \frac{3}{2} \frac{Q_0 Q_2 - Q_1^2}{Q_0 - Q_1}, \quad \omega(\zeta; p, h) = \frac{Q_0^* - \Phi Q_1^*}{Q_0 - \Phi Q_1} \frac{Q_0}{Q_0^*}.$$

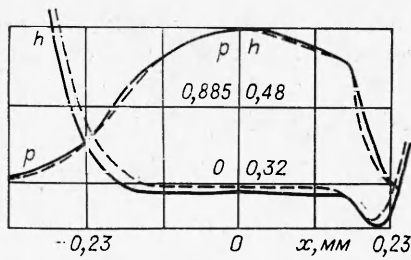
Для численного решения (5.1) — (5.4) введем неравномерную по x сетку $\{x_n, y_m\}$, $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, M$, $x_1 = a$, $y_1 = -1$, $x_M = d$, $y_M = 1$. При заданном в виде кусочно-линейной функции давления в каждом сечении $x = x_n$ распределение $\zeta(y)$ находилось путем численного решения краевой задачи для уравнения (5.1) методом Рунге — Кутты и пристрелкой первой производной при $y = -1$. Определенные затем величины $Q_j(x_n)$ использовались при решении методом Ньютона системы нелинейных разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение (5.2). Значение h дается конечной суммой, заменяющей интеграл в (5.3). Разностная схема представляет собой обобщение схемы [5] и имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1}) e^{Lp_{i/2}}} \left\{ p_{i-1} \frac{h_{i-1/2}^3 \Gamma_{i-1/2}}{(x_i - x_{i-1}) e^{Lp_{i-1/2}}} - p_i \left[\frac{h_{i-1/2}^3 \Gamma_{i-1/2}}{(x_i - x_{i-1}) e^{Lp_{i-1/2}}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{h_{i+1/2}^3 \Gamma_{i+1/2}}{(x_{i+1} - x_i) e^{Lp_{i+1/2}}} \right] + p_{i+1} \frac{h_{i+1/2}^3 \Gamma_{i+1/2}}{(x_{i+1} - x_i) e^{Lp_{i+1/2}}} + (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) \right\} - \\ & - D \sum_{\substack{h=2 \\ h \neq i, i+1}}^N \left[p_{h-1} \left(\frac{x_h - x_i}{x_h - x_{h-1}} \ln \frac{x_h - x_i}{x_{h-1} - x_i} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + p_h \left(\frac{x_i - x_{h-1}}{x_h - x_{h-1}} \ln \frac{x_h - x_i}{x_{h-1} - x_i} + 1 \right) \right] - D \left(p_{i+1} - p_{i-1} + p_i \ln \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}} \right) = 2x_i, \\ & p_1 = p_N = 0, \quad p_{i \pm 1/2} = \frac{p_i + p_{i+1}}{2}, \quad x_{i \pm 1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \\ & h_{i \pm 1/2} = h(x_{i \pm 1/2}, p_2, \dots, p_{N-1}), \quad \Gamma_{i \pm 1/2} = \Gamma(p_{i \pm 1/2}, h_{i \pm 1/2}), \\ & i = 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

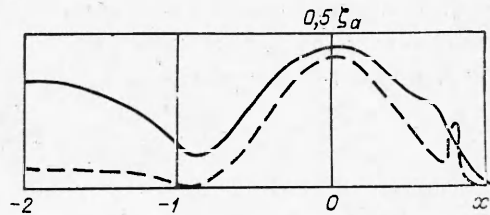
Определив по результатам решения величину $P = \int_a^d p dx$, можно перейти к исходным параметрам

$$Q = \frac{2L}{\pi} \sqrt{\frac{P}{D}}, \quad V = \frac{\pi}{2} \frac{1}{DP^2}, \quad H_0 = \frac{1}{DP}.$$

Результаты численных расчетов приведены на фиг. 1—4. На фиг. 1 сплошными линиями даны графики величин $p \cdot 10^{-8}$ ($\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$) и h (мкм) из решения тепловой задачи при $L = 5$, $D = 1,6$, $H = 0,5$, $\Phi = 0,25$, $S = -0,1$. Из сравнения с известным [5] изотермическим решением при тех же L ,

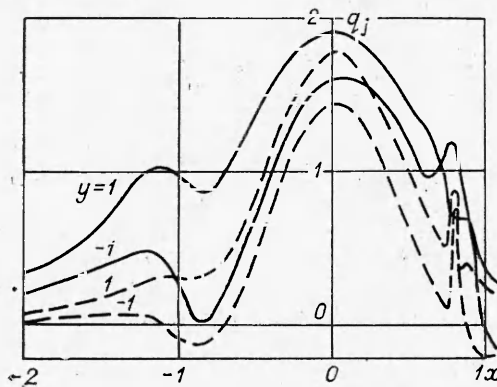


Ф и г. 1



Ф и г. 2

D (штриховая линия) видно, что влияние тепловых эффектов на распределение давления в контакте несущественно. В то же время заметно тепловое утоньшение смазочной пленки, особенно значительное на участке входа. Физические параметры при этом имеют значения: $q = 2 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $U = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $R = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $h = 0,32 \text{ мкм}$, $E' = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $\mu_0 = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$, $\alpha = 6,6 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2 \text{ Н}^{-1}$. На фиг. 2, 3 показаны распределения безразмерной температуры ζ_α вдоль средней линии пленки и безразмерного теплового потока $q_j = (\partial \zeta / \partial z)_j$ на верхней ($y = 1$) и нижней ($y = -1$) границах контакта для случаев $L = 5$, $D = 1,6$, $H = 0,5$, $\Phi = 0,25$, $S = -0,1$ (сплошная линия) и $L = 6$, $D = 1,1$, $H = \Phi = 0,1$, $S = -0,1$ (штриховая линия). Соответствующие функции немонотонны. Характерны резкие пики теплового потока вблизи входной зоны. Почти на всем протяжении зоны контакта поток тепла в менее нагретое тело превосходит тепловой поток в более нагретое тело, что находится в соответствии с приближенным аналитическим решением задачи [1]. Величина q_j считается положительной, если поток тепла направлен из смазки в тело. Согласно фиг. 3, в пределах небольшого участка вблизи зоны выхода, а для штриховой кривой и на входном участке тепло от более нагретого тела переходит в смазку. Профили температуры $\zeta(y)$ и приведенной продольной скорости $u(y)$ в различных сечениях $x = \text{const}$ показаны на фиг. 4 (кривая I — $x = -2,17$, II — $x = -1,67$, III — $x = -1,11$, IV — $x = 0$, V — $x = 0,57$). Интересно отметить, что на входном участке имеется область, где $u < -1$, т. е. скорость вблизи оси контакта отрицательна,



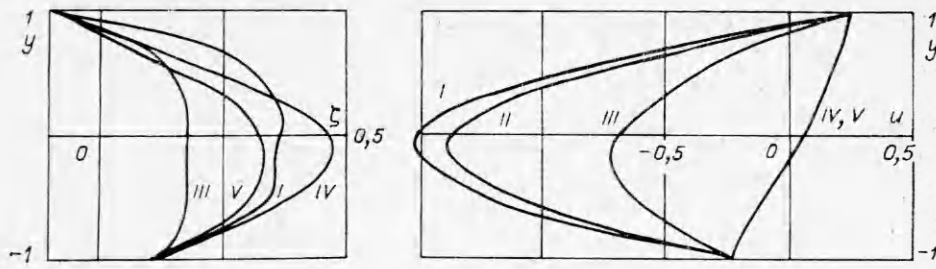
Ф и г. 3

и существует возвратное течение, в котором смазка движется в направлении, обратном качению. Сравнение рассчитанных значений минимальной толщины пленки с экспериментальными данными [6] для дизфирного масла ($\alpha = 8,2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2 \cdot \text{Н}^{-1}$, $\mu_0 = 9,08 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$) показывает удовлетворительное соответствие тепловой теории и эксперимента (фиг. 5). Для сравнения на фиг. 5 штриховой линией показан результат расчета толщины пленки по формуле Грубина. Укажем, что в [7] проведено численное решение тепло-

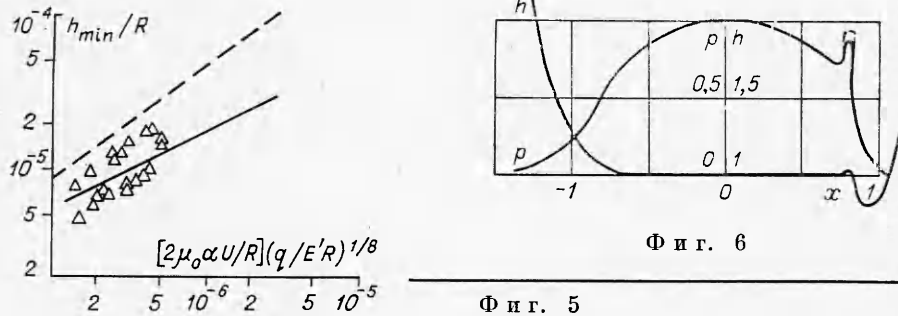
вой УГД — задачи с введением ряда упрощающих предположений (например, в [7] считалось, что вязкость смазки постоянна поперек слоя).

6. Рассмотрим двумерную изотермическую задачу для нелинейно-вязкой смазки. В этом случае функционал (3.1) дает выражение

$$(6.1) \quad \xi_0 = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{Fh} \sqrt{1 + \left(\frac{Fhp_x}{\text{sh} \left[\frac{1}{3} SF \right]} \right)^2} - p_x \text{cth} \left(\frac{1}{3} SF \right) \right], \quad S = 2\Phi F e^{Lp} p_x.$$



Ф и г. 4



Ф и г. 5

Ф и г. 6

Соотношения (6.1), (3.4) позволяют в явном виде выписать уравнение типа Рейнольдса

$$(6.2) \quad -\frac{F^2}{3} \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ h e^{-Lp} p_x^{-1} \left[1 - \frac{1}{3} FS \operatorname{cth} \left(\frac{1}{3} FS \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{F^{-1}}{4} e^{Lp} p_x^{-2} \ln \left| \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{1}{3} FS \right) \sqrt{1 + (Fp_x h)^2 \operatorname{sh}^{-2} S} + \operatorname{sh} S - Fp_x h \operatorname{sh}^{-1} S}{\operatorname{ch} \left(\frac{1}{3} FS \right) \sqrt{1 + (Fp_x h)^2 \operatorname{sh}^{-2} S} - \operatorname{sh} S - Fp_x h \operatorname{sh}^{-1} S} \right| + \right. \\ \left. + \frac{F\Phi}{3p_x} \sqrt{1 + (Fp_x h)^2 \operatorname{sh}^{-2} S} \right\}.$$

В случае чистого качения ($\Phi = 0$) из (6.2) находим

$$(6.3) \quad \frac{1}{3} F^2 \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ e^{-Lp} p_x^{-1} \left[0,5 (p_x F)^{-1} \ln \frac{1 + Fh p_x}{1 - Fh p_x} - h \right] \right\}.$$

Численное решение (6.3), (5.3), (5.4) выполнено методом, разработанным на основе [5]. Полученные в результате распределения давления и толщины пленки при $L = 6,5$, $D = 1,1$ представлены на фиг. 6 для $F = 0,122$ (сплошная линия). Сравнение с решением для ньютоновской жидкости ($F = 0$) показывает, что при выбранных значениях параметров нелинейно-вязкие эффекты существенны лишь для распределения давления в области с наибольшими его градиентами и приводят к уменьшению второго максимума давления. Разумеется, влияние нелинейной вязкости на трение очень велико. На фиг. 2—4, 6, давление отнесено к p_0 , продольная координата — к b , толщина пленки — к h_0 .

7. Получим тепловой аналог уравнения Рейнольдса для ньютоновской смазки в контакте трехмерных упругих тел. В этом случае имеем ($i = 1,2$)

$$\tau_i = \mu(p, T) \frac{\partial u_i}{\partial z}, \quad \rho c(\mathbf{u}, \nabla_{12} T) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \left(\boldsymbol{\tau}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right), \\ h_j(x_1, x_2) = \frac{h_c}{2} + f_j + \frac{1}{\pi E_j'} \iint_{\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right] p(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Так как компоненты вектора касательного напряжения равны

$$\tau_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} z + \tau_{0i},$$

составляющие скорости можно вычислить по формулам

$$(7.1) \quad u_i = U_1^i + \int_{h_1}^z \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} z_1 + \tau_{0i} \right) \frac{dz_1}{\mu(p, T)}.$$

Удовлетворяя условию прилипания при $z = h_2$, получим выражения

$$U_2^i - U_1^i = \int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} z + \tau_{0i} \right) \frac{dz}{\mu(p, T)},$$

из которых величины τ_{0i} определяются в виде функционалов

$$(7.2) \quad \tau_{0i} = \Phi_i \left(T, p, \frac{\partial p}{\partial x_i}, h_1, h_2 \right).$$

Подстановка (7.1), (7.2) в уравнение неразрывности приводит к уравнению типа Рейнольдса для давления

$$\sum_{i=1}^2 \left[U_2^i \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + U_1^i \frac{\partial h_1}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} z + \Phi_i \right) \frac{dz}{\mu(p, T)} \right] = 0.$$

Распределение температуры должно определяться из уравнения

$$\rho c \sum_{i=1}^2 \left\{ \left[U_1^i + \int_{-h_1}^z \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} z_1 + \Phi_i \right) \frac{dz_1}{\mu(p, T)} \right] \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\mu(p, T)} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} z + \Phi_i \right)^2 \right\} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Все соотношения в данном пункте записаны в размерных переменных. При переходе к безразмерным величинам нужно использовать максимальное давление p_0 в контакте и характерные размеры a, b области контакта ω , которые в каждом конкретном случае определяются из решения соответствующей контактной задачи теории упругости. Например, для герцева контакта ω — эллипс с полуосями a, b , максимальное давление $p_0 = 3q/2\pi ab$.

Полученный тепловой аналог уравнения Рейнольдса применим к контактным взаимодействиям в шариковых и роликовых подшипниках, подшипниках скольжения, зубчатых передачах, а также к контакту поршневого кольца с цилиндром двигателя.

Поступила 25 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Галахов М. А. Физико-математические основы упругогидродинамической теории смазки. Препринт Ин-та проблем мех. АН СССР № 94, 1977.
2. Галахов М. А., Голубкин В. Н., Ширококов В. В. Реологические модели жидкости в экстремальных условиях и упругогидродинамика. — ЧММСС, 1976, т. 7, № 3.
3. Галахов М. А., Карпов В. Я. Математические модели теории смазки упругих цилиндров. Препринт Ин-та прикл. мат. АН СССР № 176, 1979.
4. Айнбиндер С. Б., Цируле К. И., Дзенис А. А. Исследования изменения температуры при адиабатическом сжатии полиэтилена высокой плотности. — Механика полимеров, 1976, № 3.
5. Галахов М. А., Запсаров К. И. Распределение давления в упругогидродинамическом контакте цилиндров. — ДАН СССР, 1977, т. 232, № 1.
6. Sibley L. B., Orcutt F. K. Elasto-hydrodynamic lubrication of rolling contact surfaces. — ASLE Transactions, 1961, vol. 4, N 2.
7. Cheng H. S., Sternlicht B. A numerical solution for the pressure, temperature and film thickness between two infinitely long, lubricated rolling and sliding cylinders, under heavy loads. — Trans. of the ASME, ser. D. J. Basic Engineering, 1965, vol. 87, N 3. Рус. пер. Ченг, Штернлихт. Численное решение для давления, температуры и толщины пленки между двумя бесконечно длинными, смазанными, вращающимися и скользящими цилиндрами при больших нагрузках. — Теор. основы инж. расчетов, 1965, т. 87, № 3.