

УДК 531/534:620.22-419.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОКООРИНАТНОГО СПУСКА НА ЕДИНИЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ДЛЯ ВЕСОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. И. Бутырин, В. Н. Максименко, Л. В. Павшок, Е. Г. Подружин

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск
E-mail: kimt@ngs.ru

Решаются задачи весовой оптимизации анизотропных конструкций при ограничениях по прочности, устойчивости и т. д. с использованием метода покоординатного спуска на единичном интервале в сочетании с эффективными методами нелинейного программирования (метода деления отрезка пополам и метода золотого сечения).

Ключевые слова: весовая оптимизация, покоординатный спуск, нелинейное программирование, метод граничных интегральных уравнений, композитные материалы, панель с отверстием, комбинированные нагрузки.

Введение. Необходимость разработки методов рационального проектирования конструкций из слоистых композитных материалов объясняется постоянным расширением сферы их применения в различных областях техники, в частности в авиастроении. Существует значительное количество работ, посвященных исследованию элементов таких конструкций [1, 2]. Однако в настоящее время внедрение результатов научных исследований в практику проектирования конструкций из композитов существенно отстает от потребностей расчетчиков. Это объясняется сложностью структуры самих композитов, спецификой их деформационных свойств, нестабильностью характеристик, чувствительностью к концентраторам напряжений.

В данной работе методом покоординатного спуска на единичном интервале решаются задачи весовой оптимизации анизотропных конструкций при ограничениях по прочности, устойчивости и т. д. Напряженно-деформированное состояние пластин определяется с использованием аппарата граничных интегральных уравнений [3], наиболее эффективного в задачах с большими градиентами напряжений, обусловленными наличием отверстий и других концентраторов. В качестве примеров оптимизации рассмотрены консольная балка при изгибе; плоская панель, нагруженная в своей плоскости; панель, ослабленная эллиптическим отверстием и нагруженная изгибающими и крутящими моментами.

1. Метод покоординатного спуска на единичном интервале. При проектировании конструкций необходимо обеспечить выполнение значительного количества противоречивых требований, например обеспечить минимум веса при выполнении ограничений по прочности, устойчивости, ресурсу и т. д. Для решения поставленной задачи используются методы оптимального проектирования (градиентные методы, метод случайного поиска и т. д. [4, 5]), в которых жесткостные параметры элементов варьируются таким образом, чтобы при выполнении заданных ограничений обеспечивался минимум веса. При этом параметры варьируются на интервале $[0; \infty)$. В данной работе для этой цели предлагается применить метод покоординатного спуска на единичном интервале, предложенный

в работах [6–8]. Это позволяет использовать методы оптимизации на конечном интервале (метод деления отрезка пополам и метод золотого сечения) [9].

Рассмотрим элемент конструкции, представляющий собой панель (пакет n слоев из различных материалов), нагруженную спектром нагрузок N^p (N — вектор нагрузок; $p = 1, \dots, P$ — порядковый номер варианта нагружения). Каждый слой имеет толщину h_k , удельный вес γ_k , заданные упругие, прочностные и геометрические характеристики (например, угол укладки φ_k). Для каждого слоя $k = 1, \dots, n$ и каждого варианта нагружения p должен выполняться набор ограничений по прочности, устойчивости и т. д.: $(\Phi_k^i)_p(h_1, \dots, h_n) \leq 1, i = 1, \dots, I$ (I — количество учитываемых ограничений). Вес панели пропорционален величине $V = \sum_{k=1}^n \gamma_k h_k$. Уравнение огибающей функций ограничений имеет вид

$$\Phi(h_1, \dots, h_n) = \max_{i,k,p} \{(\Phi_k^i)_p(h_1, \dots, h_n)\} = 1.$$

Задача оптимизации заключается в нахождении величины $\min_{h_1, \dots, h_n} V$ при заданных нагрузках N^p ($p = 1, \dots, P$) и выполнении ограничений $\Phi(h_1, \dots, h_n) = 1$, т. е. является многопараметрической.

Введем новые параметры оптимизации, областью изменения которых является конечный интервал. Относительный вес слоя равен $\omega_k = h_k \gamma_k / V$ ($k = 1, \dots, n$). Значения ω_k принадлежат отрезку $[0; 1]$. Зафиксируем произвольно некоторый номер j , такой что $1 \leq j \leq n$. Пусть $\omega^* = \max_{k \neq j} (\omega_k)$. Введем соотношения между весами слоев $\bar{\omega}_k = \omega_k / \omega^*, k = 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n, \bar{\omega}_k \in (0; 1]$. Как показано в работе [7], для фиксированных значений $V, j, \omega_j, \bar{\omega}_k$ ($k \neq j$) однозначно определяется толщина каждого слоя.

Минимизация веса конструкции проводится последовательно. На первом шаге принимается $j = 1$. Фиксируется соотношение между толщинами остальных слоев $\bar{\omega}_k = 1$ ($k \neq 1$), затем строится зависимость $V_j = V_j(\omega_j)$ перебором значений ω_j (рис. 1). Минимальное значение $V_j = V_{j\text{opt}}$ определяет значение $\omega_{j\text{opt}}$. На втором шаге принимается значение $j = 2$ и т. д.

Рассмотрим случай, когда зависимость $V_j = V_j(\omega_j)$ есть вогнутая функция [7]. Это позволяет применить при оптимизации метод золотого сечения [9], значительно ускоряющий процесс оптимизации (рис. 2). На рис. 2 $\omega_{j1} = 0,38, \omega_{j2} = 0,62$.

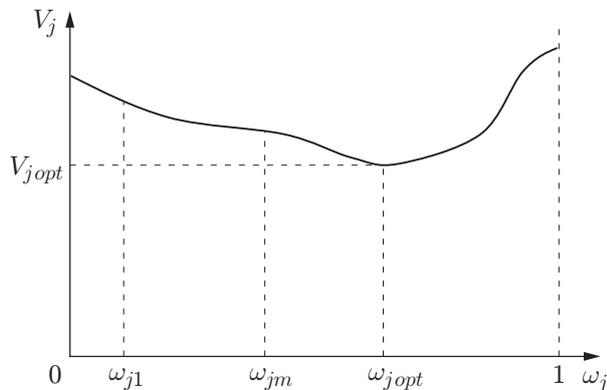


Рис. 1

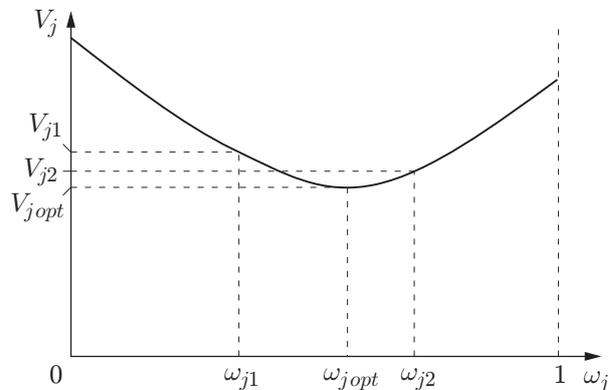


Рис. 2

Рис. 1. К методу покоординатного спуска

Рис. 2. К алгоритму оптимизации, основанному на методе золотого сечения

2. Постановка задачи весовой оптимизации конструкций из композитных материалов. Композитная конструкция представляет собой пакет слоев $k = 1, \dots, n$ из различных материалов (например, армированных однонаправленными волокнами) и подвергается воздействию P различных вариантов статических нагрузок. Определим минимальный вес композитной конструкции

$$V = \sum_{k=1}^n h_k \gamma_k \rightarrow \min, \quad h = \sum_{k=1}^n h_k$$

при условии обеспечения прочности одновременно для всех P вариантов статического нагружения и заданных критериях разрушения для каждого слоя. Варьируемыми параметрами являются толщины слоев h_k . В качестве критической нагрузки для конструкции в целом примем величину нагрузки, при которой происходит разрушение наиболее слабого слоя.

При решении задачи оптимизации конструкции в качестве ограничения будем использовать деформационный критерий прочности типа критерия Цая — Ву, который для k -го слоя запишем в деформациях [10]:

$$\Phi_p^k = G_{ij}^k \varepsilon_i^p \varepsilon_j^p + G_i^k \varepsilon_i^p \leq 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad p = 1, \dots, P, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь $\varepsilon_1^p = \varepsilon_x^p$, $\varepsilon_2^p = \varepsilon_y^p$, $\varepsilon_3^p = \gamma_{xy}^p$ — деформации пакета при p -м варианте нагружения. Постоянные G_{ij}^k , G_i^k вычисляются через упругие и прочностные характеристики материала k -го слоя.

Введем обозначение $\Phi = \max_{k,p} \{\Phi_p^k\}$. Задачу оптимизации многослойной панели сформулируем следующим образом: при заданных статических нагрузках, упругих характеристиках материалов, углах укладки слоев найти значения толщин слоев h_k , так чтобы обеспечивался минимум веса пластины

$$\min V = \min \sum_{k=1}^n V_k = \min \sum_{k=1}^n \gamma_k h_k$$

при выполнении ограничения $\Phi(h_1, \dots, h_n) = 1$. Отработка ограничения Φ и определение оптимальных значений ω_j проводятся с погрешностью 0,05 %. Оптимизация прекращается при изменении веса менее чем на 0,01 % по сравнению с предыдущей итерацией.

3. Оптимальное проектирование консольной балки. Консольная многослойная балка нагружена системой независимых нагрузок: распределенной нагрузкой синусоидального типа L_0 , равномерно распределенной нагрузкой L_1 , сосредоточенной силой L_2 и моментом L_3 на свободном крае. Внешние несущие слои выполнены из композитных материалов, срединный слой представляет собой легкий наполнитель.

Для балки известны упругие характеристики ортотропного композитного материала (модули упругости E_1 , E_2 , G_{12} и коэффициенты Пуассона ν_1 , ν_2), пределы прочности при растяжении и сжатии в направлении армирования X_t , X_c и в трансверсальном направлении Y_t , Y_c , предел прочности на сдвиг в плоскости слоя S для однонаправленно-армированного слоя.

Будем считать, что на балку могут действовать P различных вариантов статических нагрузок: $L^p = (L_0^p, L_1^p, L_2^p, L_3^p)$ ($p = 1, \dots, P$). Основные соотношения и метод расчета напряженно-деформированного состояния данной конструкции приведены в работах [11–13].

Ниже приведены результаты оптимизации для консольного стержня длиной $l = 10$ м, нагруженного на свободном торце сосредоточенной силой $L_2 = 10^6$ Н. Стержень сформирован из трех слоев. Внешние слои изготовлены из материала HMS/3002M со следующими упругими и прочностными характеристиками: $E_1 = 185$ ГПа, $E_2 = 6,76$ ГПа,

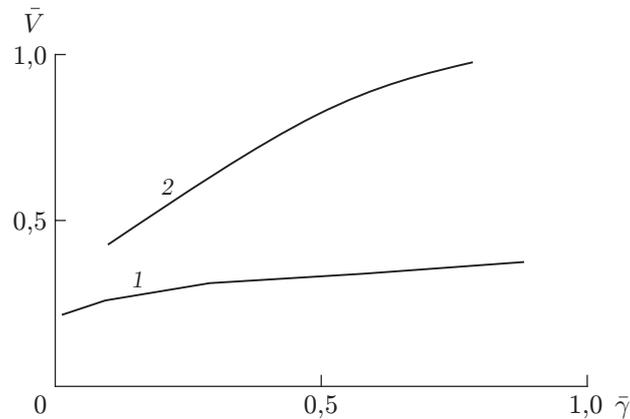


Рис. 3. Зависимость веса оптимальной конструкции от относительного удельного веса заполнителя:

1 — модель слоистой балки; 2 — балочная модель Тимошенко

$G_{12} = 5,86$ ГПа, $\nu_1 = 0,2$, $X_t = 680$ МПа, $X_c = 690$ МПа, $Y_t = 16$ МПа, $Y_c = 186$ МПа, $S = 72$ МПа. Волокна расположены вдоль продольной оси балки. Средний слой выполнен из легкого заполнителя, имеющего малые упругие характеристики: $E_1 = E_2 = 0,76$ ГПа, $G_{12} = 0,86$ ГПа, $\nu_1 = 0,2$, $X_t = X_c = Y_t = Y_c = 7$ МПа, $S = 2$ МПа. Исследуем влияние на вес оптимальной конструкции относительного удельного веса заполнителя $\bar{\gamma}$, равного отношению удельного веса заполнителя к удельному весу несущих слоев (кривая 1 на рис. 3). Для сравнения приведены результаты оптимизации, полученные с использованием балочной теории Тимошенко (кривая 2). В этом случае оптимальный вес определяется формулой

$$\bar{V} = 2\sqrt{\bar{\gamma}} \sqrt{L_2 l (X_t + X_c) / (X_t X_c)}.$$

4. Оптимальное проектирование плоских композитных панелей, нагруженных в своей плоскости. Плоская композитная панель симметричного относительно срединной плоскости строения состоит из n слоев различных материалов и находится в плоском напряженном состоянии при воздействии P различных вариантов нагрузки. Связь между усилиями и деформациями определяется формулами [14]

$$N^p = A\varepsilon^p, \quad p = 1, \dots, P,$$

где $N^p = (N_x, N_y, N_{xy})_p^T$ — вектор усилий, действующих на пакет; $\varepsilon^p = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12})_p^T$ — вектор деформаций пакета; A — квадратная матрица коэффициентов, зависящая от толщин h_k и упругих модулей всех материалов.

Отработка ограничений Φ и определение оптимальных значений ω_j проводятся с точностью до 0,1 %. Оптимизация прекращается при изменении веса менее чем на 1 % по сравнению с предыдущей итерацией.

Ниже приведены результаты оптимизации для композитной панели, изготовленной из материала AS4/3502 со следующими упругими и прочностными характеристиками: $E_1 = 139,97$ ГПа, $E_2 = 10,27$ ГПа, $G = 5,72$ ГПа, $\nu_{12} = 0,3$, $X_t = 1862$ МПа, $X_c = 1482$ МПа, $Y_t = 52$ МПа, $Y_c = 206$ МПа, $S = 81$ МПа. Панель состоит из слоев (под слоем понимается набор всех монослоев с одинаковой ориентацией) с углами укладки $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = -45^\circ$, $\varphi_3 = 90^\circ$, $\varphi_4 = 0^\circ$. Рассматриваются два варианта нагружения при различных значениях компонент вектора нагрузок:

- 1) $\bar{N}^1 = (3 \text{ МН/м}; 1 \text{ МН/м}; 1 \text{ МН/м})$, $\bar{N}^2 = (0; 4 \text{ МН/м}; 0,5 \text{ МН/м})$;
- 2) $\bar{N}^1 = (1 \text{ МН/м}; 3 \text{ МН/м}; 0)$, $\bar{N}^2 = (0; 1 \text{ МН/м}; 2 \text{ МН/м})$.

Таблица 1

Значения оптимальных толщин панели из материала AS4/3502, полученные методом покоординатного спуска

Тип нагружения	h , мм	h_k , мм			
		$\varphi_1 = 45^\circ$	$\varphi_2 = -45^\circ$	$\varphi_3 = 90^\circ$	$\varphi_4 = 0^\circ$
1	10,125	2,375	0	4,625	3,125
2	8,000	3,500	2	2,500	0

Таблица 2

Значения оптимальных толщин панели из материала AS4/3502, полученные градиентным методом

Тип нагружения	h , мм	h_k , мм			
		$\varphi_1 = 45^\circ$	$\varphi_2 = -45^\circ$	$\varphi_3 = 90^\circ$	$\varphi_4 = 0^\circ$
1	10,10	2,54	0	4,71	2,85
2	7,65	3,75	2,03	1,87	0

Результаты оптимизации приведены в табл. 1. Видно, что при нагружении первого типа вырождается слой с укладкой под углом -45° , при нагружении второго типа — слой с укладкой под углом 0° . Для сравнения в табл. 2 приведены результаты решения той же задачи с использованием градиентного метода [14].

Хорошее соответствие суммарных толщин пакета показывает, что оба метода позволяют достичь окрестности точки, в которой вес конструкции минимален. Некоторое различие распределений толщин отдельных слоев объясняется тем, что целевая функция является достаточно пологой.

5. Оптимальное проектирование композитных панелей, ослабленных эллиптическим отверстием, при изгибе моментами. Рассматривается пластина симметричной структуры, в которой слои с идентичными характеристиками располагаются симметрично относительно срединной плоскости (рис. 4). В пластинах с симметричным расположением слоев каждая пара слоев (такую пару составляют одинаковые слои, расположенные выше и ниже срединной плоскости на одинаковом расстоянии от нее) может иметь любую ориентацию (рис. 5).

На практике для всех известных слоистых материалов, армированных как тканями, так и произвольно ориентированными волокнами, армированные слои являются ортотропными. Для этого случая известны соотношения, позволяющие получить изгибные жесткости слоистого материала [15]. Напряженно-деформированное состояние многослойной панели определяется на основе классической теории изгиба Кирхгофа с использованием комплексных потенциалов Лехницкого [16], задаваемых в виде интегралов типа Коши с неизвестной функцией подынтегральной плотности по контурам L , ограничивающим пластину. С использованием формул Сохоцкого — Племеля краевая задача для аналитических функций, описывающих напряженно-деформированное состояние пластины:

$$a(t)\Phi_1^+(t) + b(t)\overline{\Phi_1^+(t)} + \Phi_2^+(t) = F(t),$$

сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестных функций подынтегральной плотности

$$\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau_1 - t_1} \frac{d\tau_1}{ds} ds + \int_L [K_1(t, \tau)\omega(\tau) + K_2(t, \tau)\overline{\omega(\tau)}] ds = f(t), \quad t \in L$$

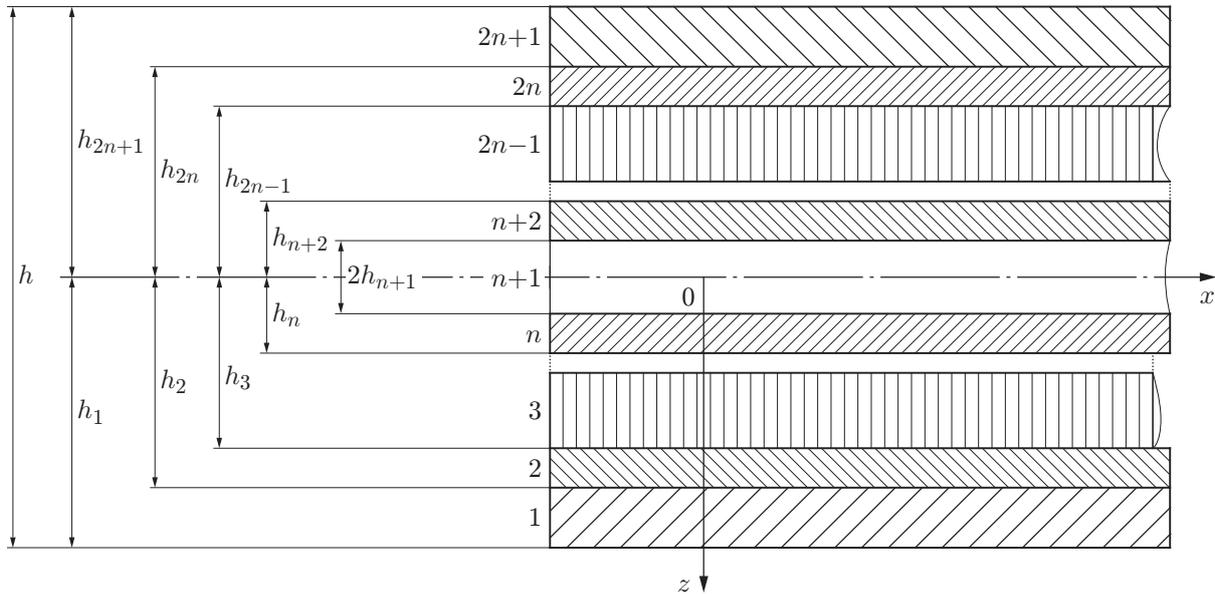


Рис. 4. Структура композитной панели

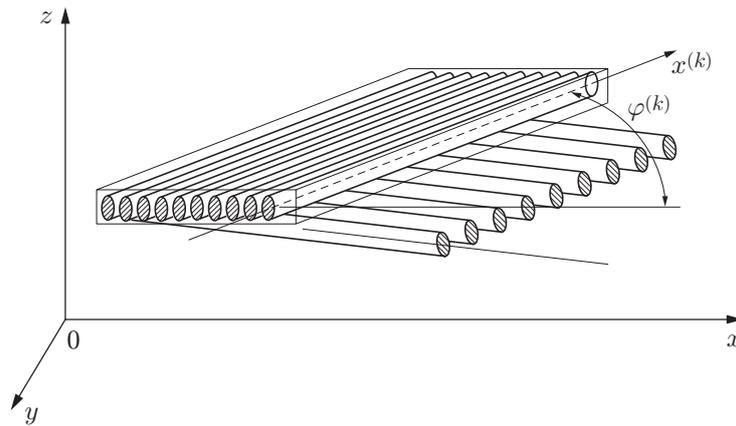


Рис. 5. Ориентация слоев панели

с дополнительными условиями однозначности перемещений в пластине

$$\int_L \omega(\tau) d\tau_1 = 0, \quad \int_L \omega(\tau) \left(\tau_1 - \frac{\alpha}{\gamma} \tau_2 - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\gamma}} \bar{\tau}_2 \right) d\tau_1 = 0.$$

Для решения сингулярных уравнений применяется метод квадратур, основанный на использовании интерполяционного полинома для аппроксимации функций подынтегральной плотности и квадратурных формул Гаусса — Чебышева. При этом решение системы сингулярных уравнений сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций подынтегральной плотности в точках коллокаций.

В качестве примера приведем решение задачи изгиба неограниченной анизотропной многослойной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием и нагруженной изгибающими и крутящими моментами на бесконечности ($M_x^\infty; M_y^\infty; H_{xy}^\infty$). Напряженно-деформированное состояние в пластине можно получить, суммируя напряженно-деформированное состояние в пластине без отверстия и возмущения напряженно-деформированного состояния, вносимые отверстием [17].

Необходимо найти минимум веса конструкции, варьируя толщины и порядок расположения слоев.

В табл. 3, 4 представлены результаты оптимизации для панели, состоящей из семи слоев материала HMS/3002М (упругие и прочностные характеристики приведены в п. 3) с углами укладки $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_3 = -45^\circ$, $\varphi_4 = 45^\circ$ (порядок расположения слоев может меняться) и ослабленную эллиптическим отверстием с полуосями a и b .

В табл. 3 приведены оптимальная толщина, порядок расположения слоев и процентное соотношение толщин слоев панели по отношению к суммарной оптимальной толщине панели h (h_1, h_2, h_3, h_4), изгибаемой моментом $M_x = 10^4$ Н, в зависимости от количества точек коллокации на контуре отверстия T . Номера слоев соответствуют порядку их расположения в панели от внешнего края к срединной плоскости. Из табл. 3 следует, что хорошую аппроксимацию точного решения можно получить, используя 40 точек на контуре отверстия.

В табл. 4 приведены результаты вычислений для различных значений a/b при действии на панель моментов $M_x = 10^4$ Н, $M_y = 0$ и при различных значениях крутящего момента H_{xy} .

Таблица 3

Значения оптимальных толщин панели, ослабленной эллиптическим отверстием, в зависимости от количества точек T на контуре отверстия ($a/b = 1/2$)

T	h_{opt} , мм	φ , град (h , %)			
10	8,460	0 (36)	-45 (3)	90 (29)	45 (32)
30	8,900	0 (29)	-45 (5)	45 (5)	90 (61)
40	8,920	0 (30)	-45 (5)	45 (5)	90 (60)
180	8,897	0 (32)	45 (3)	-45 (3)	90 (62)

Таблица 4

Значения оптимальных толщин панели, ослабленной эллиптическим отверстием, в зависимости от отношения полуосей при изгибе моментами M_x, H_{xy}

$N^p, 10^{-4}$ Н	h_{opt} , мм	φ , град (h , %)			
$a/b = 1/2$					
(1; 0; 0)	11,1	-45 (8)	45 (10)	0 (36)	90 (46)
(1; 0; 0,5)	12,3	45 (23)	-45 (34)	0 (43)	90 (0)
(1; 0; 1)	13,2	45 (22)	-45 (27)	0 (25)	90 (26)
(1; 0; 1,5)	14,8	45 (21)	-45 (28)	0 (25)	90 (26)
(1; 0; 2)	16,4	45 (20)	-45 (29)	0 (25)	90 (26)
$a/b = 1$					
(1; 0; 0)	8,89	0 (30)	-45 (4)	45 (5)	90 (61)
(1; 0; 0,5)	10,8	0 (18)	90 (24)	45 (27)	-45 (31)
(1; 0; 1)	12,1	45 (26)	-45 (26)	90 (24)	0 (24)
(1; 0; 1,5)	14,1	45 (23)	-45 (26)	90 (25)	0 (26)
(1; 0; 2)	16,0	45 (19)	90 (4)	0 (3)	-45 (74)
$a/b = 2$					
(1; 0; 0)	7,4	0 (34)	90 (22)	45 (21)	-45 (23)
(1; 0; 0,5)	9,7	45 (20)	-45 (9)	90 (8)	0 (63)
(1; 0; 1)	11,3	45 (25)	-45 (25)	90 (25)	0 (25)
(1; 0; 1,5)	13,8	45 (22)	-45 (27)	90 (26)	0 (25)
(1; 0; 2)	15,6	90 (5)	0 (4)	45 (21)	-45 (70)

Таблица 5

Значения оптимальных толщин панели, ослабленной эллиптическим отверстием, полученные методом покоординатного спуска и градиентным методом

b/a	Градиентный метод					Метод покоординатного спуска				
	h_{opt} , мм	φ , град (h , %)				h_{opt} , мм	φ , град (h , %)			
$M_y = 10^4$ Н, $M_x = H_{xy} = 0$										
0,2	15,3	45 (6)	90 (39)	0 (19)	-45 (36)	15,46	-45 (6)	45 (12)	90 (31)	0 (51)
0,6	10,6	-45 (6)	90 (29)	45 (17)	0 (48)	10,26	45 (7)	-45 (8)	90 (31)	0 (54)
1,0	8,89	90 (31)	-45 (3)	45 (4)	0 (62)	8,68	90 (33)	-45 (21)	45 (1)	0 (45)
1,6	7,79	90 (38)	-45 (2)	0 (60)	—	7,57	90 (39)	-45 (23)	45 (1)	0 (37)
2,0	7,30	90 (35)	45 (3)	0 (28)	-45 (34)	7,10	90 (42)	-45 (26)	0 (32)	—
$H_{xy} = 10^4$ Н, $M_x = M_y = 0$										
0,2	9,85	45 (16)	-45 (84)	—	—	9,72	45 (17)	-45 (83)	—	—
0,6	10,5	-45 (16)	45 (84)	—	—	10,42	45 (16)	-45 (84)	—	—
1,0	10,6	45 (16)	-45 (84)	—	—	10,54	45 (16)	-45 (60)	90 (3)	0 (21)
1,6	10,5	-45 (16)	45 (84)	—	—	10,46	45 (16)	-45 (84)	—	—
2,0	10,4	45 (16)	-45 (84)	—	—	10,34	45 (16)	-45 (84)	—	—

Примечание. Прочерк означает вырождение слоя.

В табл. 5 представлены результаты расчетов, полученные с использованием метода покоординатного спуска на конечном интервале и градиентного метода [17]. Вычисления проводились для двух вариантов внешнего воздействия при различных значениях b/a . При достаточно близких значениях оптимальной толщины наблюдается значительное различие соотношений толщин слоев для некоторых видов нагружения и значений отношения полуосей эллипса. При этом, как правило, указанные различия наблюдаются для внутренних, менее нагруженных слоев, а толщина и ориентация несущих, внешних слоев удовлетворительно согласуются.

Заключение. Предложенные в работе методики, алгоритмы и составленные на их основе компьютерные программы позволяют рассчитывать напряженно-деформированное состояние, оценивать прочность и получать оптимальные проекты изделий из композитов. Решены задачи весовой оптимизации для консольной балки при изгибе; плоской панели, нагруженной в своей плоскости; панели, ослабленной эллиптическим отверстием и нагруженной изгибающими моментами. Показана эффективность использования предложенного метода оптимизации в сочетании с методом граничных интегральных уравнений при решении задач оптимального проектирования конструкций из композитов. Быстродействие и универсальность оптимизационных процедур позволяют применять их при решении широкого класса задач для конструкций из композитных материалов.

Авторы выражают благодарность Б. С. Резникову за предоставленные соотношения для расчета напряженно-деформированного состояния многослойных балок при комбинированном нагружении и за обсуждение результатов данной работы, а также П. Е. Рябчикову за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bannister M.** Challenges for composite into the next millennium — a reinforcement, perspective // Composites. A. 2001. V. 32, N 7. P. 901–910.
2. **Немировский Ю. В.** Рациональное проектирование армированных конструкций / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2002.
3. **Максименко В. Н.** Теоретические основы методов расчета прочности элементов конструкций из композитов / В. Н. Максименко, И. П. Олегин. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2006.
4. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1982.
5. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
6. **Бутырин В. И.** Оптимальное проектирование подкрепленных цилиндрических оболочек открытого профиля // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. науч. тр. Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1989. С. 62–66.
7. **Бутырин В. И.** Оптимальное проектирование крыльев из композиционных материалов // Динамика и прочность элементов авиационных конструкций: Межвуз. сб. науч. тр. Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1990. С. 17–22.
8. **Бутырин В. И.** Оптимизация конструкций из анизотропных материалов при варьировании приведенных толщин на единичном интервале // Докл. АН высш. шк. РФ. 2007. № 2. С. 84–89.
9. **Зангвилл У. И.** Нелинейное программирование. М.: Сов. радио, 1973.
10. **Tsai S. W., Wu E. M.** A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. 1971. V. 5. P. 58–80.
11. **Резников Б. С.** Рациональное проектирование по начальному разрушению ребристых армированных оболочек // Пробл. прочности. 1980. № 1. С. 108–113.
12. **Резников Б. С.** К теории изгиба осесимметричных оболочек, неоднородных по толщине // Изв. вузов. Стр-во. 1998. № 6. С. 27–31.
13. **Reznikov V. S.** The equations of bending of multilayer axisymmetrical shells taking into account continuous heterogeneity on thickness of each layer // Proc. of the 6th Russian-Korean intern. symp. sci. and technol., Novosibirsk, June 24–30, 2002. Novosibirsk: Novosibirsk State Tech. Univ., 2002. V. 1. P. 193–196.
14. **Максименко В. Н., Павшук Л. В.** Оптимальное проектирование плоских композиционных панелей // Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. науч. тр. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 1994. С. 10–20.
15. **Чамис К.** Композиционные материалы. Анализ и проектирование конструкций. М.: Машиностроение, 1978. Т. 7, ч. 1.
16. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
17. **Максименко В. Н., Бутырин В. И., Подружин Е. Г. и др.** Весовое проектирование композитных панелей, ослабленных эллиптическим отверстием, при изгибе моментами // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. 19-й Всерос. конф., Бийск, 28–31 авг. 2005 г. / Под ред. В. М. Фомина. Новосибирск: Параллель, 2005. С. 172–176.

Поступила в редакцию 26/V 2008 г.