

поверхности жидкости и считать температуру поверхности равной равновесной температуре кипения топлива всюду за скачком уплотнения. В этом случае параметр массообмена удовлетворяет условию

$$B [h_L + c_T(T_K - T_1)] = c_p(T_e - T_K) + \frac{u_e^2}{2} + c_{1e} \Phi_N \Delta H$$

и (см. (11)) поток тепла, идущий на прогрев пленки топлива, равен нулю.

Таким образом, за ударной волной при наличии горения в турбулентном пограничном слое температура поверхности жидкого топлива практически скачком изменяется до температуры равновесного кипения, в то время как температура топлива во всей толщине пленки остается равной начальной температуре.

*Поступила в редакцию  
25/X 1976*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Регланд, Я. Николс. РТК, 1969, 7, 5.
2. В. М. Гендугов. ФГВ, 1972, 9, 4.
3. К. Регланд. РТК, 1970, 8, 3.
4. В. М. Гендугов. ФГВ, 1973, 9, 2.
5. В. Ф. Комов, Я. К. Трошин. Докл. АН СССР, 1965, 162, 1.
6. С. А. Лесняк, М. А. Назаров и др. Докл. АН СССР, 1968, 182, 5.
7. У. Х. Доренс. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М., «Мир», 1969.
8. Г. Майрлс.— В сб.: Ударные трубы. М., ИЛ, 1962.

#### ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНТУРОВ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ

*Г. А. Доррер*

*(Красноярск)*

Контур низового (наземного) лесного пожара, определяемый фронтом пламени, распространяющимся по плоскому слою горючего, может рассматриваться как линия разрыва температуры горючего. Феноменологическое описание движения контура при сделанном предположении требует задания нормальной скорости распространения пламени как функции времени и пространственных координат и положения контура в начальный момент времени.

Величина нормальной скорости распространения огня зависит от большого числа факторов [1—3]: теплоты сгорания сухого горючего, относительной пористости материала, его влажности, толщины слоя горючего, скорости ветра и угла, образованного направлением ветра с нормалью к фронту пламени, уклона местности и т. д.

В естественных лесных условиях многие из перечисленных факторов носят случайный характер, в результате чего нормальная скорость также изменяется случайно во времени и пространстве. При этом конфигурация кромки имеет, вообще говоря, вероятностный характер. Случайный характер процесса распространения огня в лесу отмечался неоднократно, предпринимались также попытки моделирования его по методу Монте-Карло [4, 5], однако количественного описания вероятностных характе-

ристик этого процесса до сих пор не получено. В то же время в прикладных задачах [1] необходимо уметь рассчитывать заранее статистические характеристики контура пожара, так как при этом определяется принципиально достижимая точность моделирования и, следовательно, необходимые параметры расчетной сетки для численного построения контуров. Кроме того, в силу нелинейности уравнения, описывающего движение фронта горения, локальные флуктуации нормальной скорости приводят к изменению средней скорости движения фронта пламени, что также необходимо учитывать при моделировании.

В настоящей работе исследуются отмеченные эффекты на основе изучения уравнений распространения огня по плоскому слою горючего материала со случайной скоростью. Флуктуации нормальной скорости предполагаются стационарным случайным процессом второго порядка с заданной корреляционной функцией.

Полученные результаты могут быть применены при расчете статистических характеристик пламени и в других случаях, когда применима феноменологическая модель распространения огня, например при горении плоского слоя полимерных материалов.

**Уравнение движения фронта пламени.** Пусть  $\varphi(x, y, t) = 0$  — уравнение контура пожара на плоскости  $x, y$  в момент времени  $t$ . В предположении, что фронт гладкий и непрерывный, уравнение его движения, как известно (см., например, [6]), имеет вид

$$\partial\varphi/\partial t + v|\nabla\varphi| = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)^T$  — вектор-градиент на плоскости;  $v$  — величина нормальной скорости движения фронта пламени;  $t$  — транспонирование.

В общем случае  $v = v(x, y, t, \alpha, \lambda/R_\varphi)$ , где  $\alpha = \arccos(\omega \times \nabla\varphi / |\omega| \cdot |\nabla\varphi|)$  — угол между нормалью к контуру и вектором ветра  $\omega$ ;  $\lambda$  — характерная толщина зоны горения;  $R_\varphi$  — радиус кривизны фронта.

Однако в рассматриваемой здесь крупномасштабной модели всегда  $\lambda/R_\varphi \ll 1$ , и поэтому в дальнейшем полагаем, что  $v = v(x, y, t, \alpha)$ .

Уравнение (1) должно рассматриваться при начальном условии  $\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$ , где  $\varphi_0(x, y) = 0$  — уравнение контура в начальный момент времени. В некоторых случаях фронт удобно описывать в явном виде  $y = \hat{f}(x, t)$ . Нетрудно показать, что из (1) следует

$$\partial y/\partial t = v\sqrt{1 + (\partial y/\partial x)^2} \quad (2)$$

с начальным условием  $y|_{t=0} = \hat{f}(x, 0) = f_0(x)$ .

Если продифференцировать (2) по  $x$  и ввести новую переменную  $u$ , представляющую собой угол между касательной к фронту и осью  $x$ , ( $\operatorname{tg} u = y_x$ ), то получим описание линии фронта в виде неоднородного квазилинейного уравнения

$$\partial u/\partial t - v \sin u \cdot \partial u/\partial x = \partial v/\partial x \cdot \cos u \quad (3)$$

с начальным условием  $u|_{t=0} = \operatorname{arctg}(\partial f_0/\partial x)$ .

**Статистические свойства фронта.** Для упрощения выкладок рассмотрим фронт пламени, который в начальный момент времени представлял собой прямую, совпадающую с осью  $x$ :  $y|_{t=0} \equiv 0$ . Это соответствует достаточно развитому пожару, линия фронта которого имеет малую кривизну по сравнению с характерным размером корреляционной функции возмущений. Будем предполагать также, что движение происходит с нормальной скоростью  $v = v_0 + \tilde{v}$ , где  $v_0 = \text{const}$ , а  $\tilde{v} = \tilde{v}(x, t)$  — стационарный случайный процесс второго порядка с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной функцией. Вследствие флуктуации нормальной скорости прямолинейный в начальный момент

фронт начнет искривляться и в каждый последующий момент времени будет представлять собой некоторую, вообще говоря, случайную линию  $y(x, t)$ .

Рассмотрим уравнение (3) с начальным условием  $u|_{t=0}=0$ . Уравнения характеристик для (3) имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -v \sin u, \quad \frac{du}{dt} = v_x \cos u \quad (4)$$

и должны рассматриваться при следующих начальных условиях:

$$u(x, 0) = 0, \quad x(x_0, 0) = x_0. \quad (5)$$

Для упрощения анализа рассмотрим вначале случай малых  $u$ . Линеаризуя правые части уравнений (4), получим систему

$$\frac{dx}{dt} = -vu, \quad \frac{du}{dt} = v_x. \quad (6)$$

Из второго уравнения системы (6) с учетом (5) следует, что

$$u(x, t) = u[x(x_0, t), t] = \int_0^t v_x[x(x_0, t), t] dt, \quad (7)$$

где интеграл понимается как стохастический, а производная  $\tilde{v}_x$  — в среднеквадратичном смысле [7].

Математическое ожидание этой функции  $m_u(x, t) = Eu(x, t) = 0$ , а ее корреляционная функция

$$r_u(x - \xi, t, s) = E\{u(x, t) \cdot u(\xi, s)\} = \int_0^t \int_0^s r_{\tilde{v}_x}(x - \xi, \tau, \eta) d\tau d\eta. \quad (8)$$

Воспользовавшись формулой для корреляционной функции производной случайного процесса [7]

$$r_{v_x}(x - \xi, \tau, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} r_v(x - \xi, \tau, \eta)$$

и положив в (8)  $t=s$ ,  $x=\xi$ , получим выражение для дисперсии

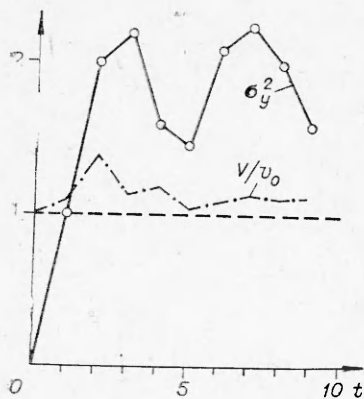
$$D_u(t) = r_u(0, t, t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} r_v(x - \xi, \tau, \eta)|_{x=\xi} d\tau d\eta. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) вытекают требования, которым должна удовлетворять корреляционная функция нормальной скорости  $r_v(x - \xi, \tau, \eta)$  для существования непрерывных и дифференцируемых касательных к контуру  $u(x, t)$ .

1)  $r_v(x, \tau, \eta)$  должна быть дважды дифференцируема по первому аргументу при  $x=0$ . Если это не так, то функция  $u(x, t)$  не является дифференцируемой в среднеквадратичном ни в одной точке.

2) Функция  $r_v(x, \tau, \eta)$  должна быть непрерывной по  $\tau, \eta$  на  $[0, \max(\tau, \eta)] \times [0, \max(\tau, \eta)]$ . Это условие требуется для существования стохастического интеграла в (7).

Для стационарных случайных процессов  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \cdot r_v(0, \tau, \eta) \geq 0$ . В том случае, когда эта производная равна нулю тождественно для всех  $0 \leq \tau, \eta < \infty$ , дисперсия угла наклона касательной к фронту также равна нулю для всех  $t$ . Этот случай соответствует равенству флуктуаций скорости в соседних точках фронта: фронт пламени движется со случайной во времени скоростью, однако сохраняет прямолинейность и параллельность своему начальному положению. При  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \cdot r_v(0,$



$\tau, \eta) > 0$ , т. е. при наличии статистической связи между флуктуациями скорости в соседних точках фронта, как видно из (9), дисперсия  $D_u(t)$  неограниченно возрастает с ростом  $t$ . Этот факт говорит о неустойчивости фронта пламени в линейном приближении и соответствует известному результату в теории горения [8].

Однако экспериментальные данные и результаты проведенного статистического моделирования движения фронта пламени путем численного решения уравнения (1) со случайно изменяющейся нормальной скоростью показывают, что после некоторого переходного периода дисперсия кромки устанавливается на определенном уровне и в дальнейшем изменяется мало (см. рисунок, линия  $\sigma_y^2$ ). Геометрически это объясняется взаимодействием двух процессов, имеющих противоположные тенденции: флуктуации нормальной скорости искривляют контур, в то же время сам процесс, описываемый уравнением (1), асимптотически устойчив, т. е. стремится выпрямить линию фронта. Статистическое моделирование показало также увеличение средней скорости движения возмущенного фронта по сравнению со средним значением нормальной скорости (линия  $V/v_0$  на рисунке). Для количественной оценки этих эффектов рассмотрим вторые (квадратичные) приближения уравнений движения фронта. При этом будем предполагать, что переходный процесс установления статистических характеристик закончился, и уравнение фронта можно представить в виде

$$y(x, t) = V \cdot t + \tilde{y}(x, t),$$

где  $V$  — средняя скорость движения фронта, т. е. скорость движения линии  $E_x\{y(x, t)\}$ ;  $\tilde{y}(x, t)$  — стационарный центрированный случайный процесс.

Воспользуемся каноническим разложением (спектральным представлением) процессов  $\tilde{v}(x, t)$  и  $\tilde{y}(x, t)$  на прямоугольнике  $[-L, L] \times [-T, T]$ , где  $L$  и  $T$  — характерные размер и время соответственно [9].

Пусть

$$v(x, t) = v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (k_i \sin ip + l_i \cos ip), \quad (10)$$

$$y(x, t) = Vt + \sum_{i=1}^{\infty} (c_i \sin ip + d_i \cos ip), \quad (11)$$

где  $p = \omega_1 x + \omega_2 t$ ;  $k_i$  и  $l_i$ ,  $c_i$  и  $d_i$  — некоррелированные центрированные величины.

Запишем уравнение (2) в виде

$$v = y_t / \sqrt{1 + y_x^2} = y_t \left( 1 - \frac{1}{2} y_x^2 + O(y_x^4) \right). \quad (12)$$

Подставим в полученное выражение разложения (10) и (11), приравняем коэффициенты при одинаковых координатных функциях и вычислим математическое ожидание и дисперсию обеих частей выражения (12). После преобразований получим

$$D_y = E\tilde{y}^2 = \frac{1}{\omega_2^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{i^2}, \quad (13)$$

$$V = \frac{v_0}{1 - \frac{\omega_1^2}{2\omega_2^2} \sum_{i=1}^{\infty} D_i}. \quad (14)$$

Здесь  $D_i = D_{k_i} = D_{l_i}$  — дисперсия  $i$ -го коэффициента в каноническом разложении (10). Из формулы (14) видно, что средняя скорость фронта равна средней нормальной скорости только в том случае, когда дисперсия всех коэффициентов в спектральном представлении равна нулю, т. е. когда флуктуации нормальной скорости отсутствуют.

Пример. Известно, что одним из важнейших факторов, определяющих скорость распространения огня, является скорость ветра  $w$  [2, 3]. Оценим на конкретном примере возможную дисперсию линии фронта и изменение средней скорости движения фронта, вызванные турбулентностью атмосферы.

Исходя из общих положений теории однородной турбулентности [10], будем считать, что случайные колебания нормальной скорости, вызванные колебаниями скорости ветра, описываются корреляционной функцией

$$r_v(x, t) = \sigma_v^2 \cdot \exp \left\{ -\frac{|x|}{L_n} - v_0 \frac{|t|}{L_r} \right\}, \quad (15)$$

$$x > 0, t > 0,$$

где  $\sigma_v^2$  — дисперсия случайной составляющей нормальной скорости. Эту величину можно оценить из соотношения  $\sigma_v^2 = k^2 \sigma_w^2$ , где  $\sigma_w$  — дисперсия переменной составляющей скорости ветра. Коэффициент  $k$  может быть вычислен путем линеаризации зависимости  $v = f(w)$ . Величины  $L_n$  и  $L_r$  представляют собой продольный и поперечный масштаб турбулентности соответственно.

Вычислим дисперсии  $D_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) коэффициентов канонического разложения (10). Разлагая процесс  $y(x, t)$  на прямоугольнике  $[-L_n, L_n] \times [-L_r/v_0, L_r/v_0]$ , получим [9]

$$D_k = \frac{v_0}{L_n L_r} \int_{-L_r/v_0}^{L_r/v_0} \int_{-L_n}^{L_n} r_v(x, t) \cos k(\omega_1 x + \omega_2 t) dx dt, \quad (16)$$

где  $\omega_1 = \pi/L_r$ ,  $\omega_2 = \pi v_0/L_n$ .

Подставляя в (16) выражение (15), получим

$$D_k = 4\sigma_v^2 \left( \frac{(-1)^k \cdot 0.368 + 1}{1 + (k\pi)^2} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k = \sigma_v^2 \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{k^2} = \sigma_v^2 \cdot 1,48 \cdot 10^{-2}. \quad (18)$$

С учетом (17), (18) формулы (13), (14) примут вид

$$V = \frac{v_0}{1 - \frac{L_n^2 \sigma_v^2}{(L_r \cdot v_0)^2} \cdot 1,82 \cdot 10^{-2}}, \quad (19)$$

$$D_y = 1,48 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma_v^2 \frac{L_n^2}{(v_0 \pi)^2}. \quad (20)$$

Зададимся теперь конкретными числовыми данными. Масштабы турбулентности атмосферы возьмем  $L_n=100$  м,  $L_r=2 L_n$  [11]. Рассмотрим два случая:  $\sigma_w=2$  м/с (ясная погода) и  $\sigma_w=20$  м/с (грозовые условия). Зависимость  $v=f(\omega)$  по данным, опубликованным в работе [12], может быть аппроксимирована выражением  $v=0,0875 \omega - 1$  (м/с). Формулы (19), (20) дают для первого случая  $V=1,004 v_0$ ,  $\sqrt{D_y}=5,1$  м, а для второго —  $V=1,3 v_0$ ,  $\sqrt{D_y}=39,3$  м.

Как видно из приведенных оценок, дисперсия линии фронта развившегося пожара может достигнуть нескольких десятков метров, а средняя скорость движения фронта может существенно увеличиться по сравнению с величиной локальной нормальной скорости только за счет турбулентности атмосферы. При учете случайного распределения других параметров, например свойств горючего, подобный эффект будет выражен еще сильнее.

Подведем итоги проведенного исследования.

Формулы для вычисления нормальных скоростей распространения огня, полученные при изучении малых (по сравнению с характерными размерами неоднородностей) участков фронта, требуют коррекции при расчете достаточно развитых пожаров, т. е. учета временного и пространственного спектра неоднородностей. В связи с этим следует обратить внимание на сбор соответствующих экспериментальных данных.

*Поступила в редакцию  
30/XI 1976,  
после доработки — 17/II 1977*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. E. Stevenson, D. A. Shermerhorn, S. C. Miller. 15-th International Symposium on Combust., Tokyo, 1974.
2. R. S. Rothermel. USDA Forest Service Res. Paper INT—115, 1972, 40 p., Intermountain Forest and Range Exp. Stn., Ogden, Utah.
3. Э. В. Конев, А. И. Сухинин, Н. П. Курбатский. ФГВ, 1975, 11, 5, 743.
4. P. H. Kourtz, W. G. O'Regan. Forest Science, 1971, 17, 2, 163.
5. О. Ю. Воробьев, Г. А. Доррер.— В сб.: Вопросы лесной пирологии. Красноярск, 1974.
6. Нестационарное распространение пламени. Под ред. Дж. Г. Маркштейна. М., «Мир», 1968.
7. К. Ю. Острем. Введение в стохастическую теорию управления. М., «Мир», 1973.
8. Л. Д. Ландау. Собр. трудов. Т. I. М., «Наука», 1969.
9. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
10. Д. Бетчелор. Теория однородной турбулентности. М., ИЛ, 1955.
11. Ю. П. Доброленский. Динамика полета в неспокойной атмосфере. М., «Машиностроение», 1969.
12. Н. П. Курбатский, Г. П. Телицын.— В сб.: Вопросы лесной пирологии. Красноярск, 1977.

### ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРОЦЕССОВ В РЕАКТОРЕ ВЫТЕСНЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕНОСА И БОКОВЫХ ТЕПЛОПТЕРЬ

*Э. И. Максимов*

*(Черноголовка)*

Постановка задачи в общем случае должна учитывать двумерную структуру потока. Однако в ряде случаев оправдано рассмотрение одномерной задачи, в которой усреднены по сечению потока температура