

УДК 523.31-6/-7, 622.01

**УСИЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДИСПЕРСИОННЫМИ ЯВЛЕНИЯМИ
В СРЕДАХ СО СТРУКТУРОЙ И ФОРМИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ
ПРЕОБЛАДАЮЩИХ ЧАСТОТ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН**

Б. П. Сибиряков¹, Е. Б. Сибиряков²

¹*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН,
E-mail: sibiryakovbp@ipgg.sbras.ru, просп. Академика Коптюга, 3, 630090, г. Новосибирск, Россия*

²*Новосибирский государственный университет, E-mail: sibiryakoveb@ipgg.sbras.ru,
ул. Пирогова, 1, 630090, г. Новосибирск, Россия*

Предложена модель континуума со структурой, которая описывается уравнениями движения бесконечного порядка. В случае большой длины волны в сравнении с размером структуры уравнения редуцированы к уравнениям четвертого порядка. Получено замкнутое уравнение движения, содержащее нелинейный, дисперсионный, а также волновые члены. Показано, что решения в форме солитонов существуют лишь в средах, где скорость волн растет с ростом давления. В тех средах, где солитоны не существуют, имеют место квазистационарные решения, содержащие кратные частоты. Установлено, что нелинейный эффект кратных частот неожиданно велик даже для малых деформаций, так как дисперсия резко усиливает нелинейные явления. Кроме того, в области малых деформаций имеются решения для продольных и поперечных волн с одинаковыми длинами волн, но с разными частотами. Решения, соответствующие одинаковым длинам упомянутых волн, но существенно разным частотам, чаще всего встречаются в сейсмологии и сейсморазведке.

Оператор сплошности, микроструктура, солитоны, различие частот P- и S-волн

ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения континуума, обладающего внутренней структурой, возникла после появления работ М. А. Садовского [1], где была установлена определенная иерархия горных пород. Развитие идей М. А. Садовского привело к появлению дискретных моделей динамического деформирования металлов [2] и горных пород [3, 4]. Однако наличие характерных размеров неоднородностей не всегда является препятствием для описания субструктур методами механики сплошных сред. Если соединяются материалы одного класса, у которых физико-механические характеристики различаются в разы, но не на многие порядки, то модель сплошного тела может служить достаточно хорошим первым приближением. Если же соединяются материалы, упругие модули которых (хотя бы один из них) отличаются на многие порядки, например, твердый скелет и поры, заполненные флюидом, то приближение сплошной среды перестает быть адекватным. В механике сплошной среды существует предположение о том, что близость точек влечет за собой близость всех свойств среды, напряжений, деформаций и т. д.

Иначе производные любого поля потеряют смысл. Опыт показывает, что модель сплошной среды адекватно описывает микронеоднородные среды с невысокой контрастностью компонентов, т. е. когда усреднение прямых и обратных параметров (например, упругих модулей и податливостей) дает сопоставимые результаты. В контрастных микронеоднородных средах, содержащих флюиды, эти условия не выполняются.

Для описания подобных сред используются методы интегральной геометрии, которая оперирует коллективными свойствами горных пород, такими как пористость, удельная поверхность, средняя и гауссова кривизна порового пространства. При этом реальная среда не предполагается сплошной, ее сплошной аналог строится методом переноса поля во все точки порового пространства.

К настоящему времени накопилось достаточное количество фактов, которые противоречат линейной теории упругости даже при малых деформациях. Из решения уравнений упругих стационарных колебаний следует, что как продольные, так и поперечные волны должны иметь одинаковую доминирующую частоту. Данные сейсмологии [5–9] и сейсморазведки [10] показывают, что в реальных средах доминирующие частоты продольных и поперечных волн существенно различаются. Зачастую частоты этих волн относятся как их скорости, так что оказываются близкими длины волн, но не частоты. Опыты с двумя вибраторами показали, что возникают комбинационные частоты помимо двух, возбуждаемых вибраторами [11–15]. Это явление было оценено как появление нелинейности при слабых колебаниях. Однако, с точки зрения механики сплошной среды, этот эффект пропорционален квадрату деформаций и для малых колебаний должен быть пренебрежимо малым. Кроме того, закон Гутенберга–Рихтера распределения землетрясений по энергиям неожиданно оказался применим и к катастрофам, не связанным с землетрясениями. Построение новой модели континуума, содержащего структуру, позволит объяснить указанные явления.

Характерный размер структуры означает, что среднее расстояние между трещиной и ее ближайшей соседкой или среднее расстояние от поры до поры l_0 выражается через удельную поверхность образца σ_0 . На рис. 1 показан представительный объем среды, состоящей из отдельных зерен. Имеет место теорема интегральной геометрии, которая связывает удельную поверхность σ_0 , средний размер микроструктуры l_0 и пористость f [16–18]:

$$\sigma_0 l_0 = 4(1 - f). \quad (1)$$

Как следует из (1), можно вычислить линейный размер структуры, если измерена удельная поверхность образца и его пористость. Очевидно, что характерный размер представительного объема среды не может быть меньше, чем l_0 .

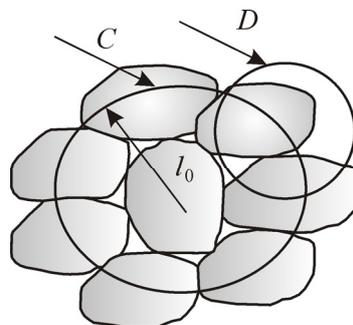


Рис. 1. Представительный объем среды, состоящей из отдельных зерен

Из рис. 1 можно увидеть главное различие между классическим и структурированным континуумами. Дело в том, что в объеме, ограниченном поверхностью C , существует компенсация всех внешних сил, а в объеме, ограниченном поверхностью D , этого нет, так как часть поверхности нагружена, а другая часть свободна. Другими словами, состояние равновесия может иметь место в сравнительно больших масштабах, и не иметь в малых. Это стирает грань между квазистатикой и динамикой в средах со структурой. Рассмотрим конечный объем, ограниченный сферой радиуса l_0 . Поверхностные силы действуют на поверхность элемента, отстоящего на расстоянии l_0 от точки приложения сил инерции (от центра микроструктуры). Возможности устремить элементарный объем к нулю и совместить точки приложения поверхностных сил и сил инерции нет, так как произвольно малый объем перестает быть представительным. Перенесем поле в центр тяжести структуры с поверхности и приравняем силам инерции. Конечные расстояния не позволяют разностные отношения автоматически заменить дифференциальными, что приводит к необходимости использования высших производных уравнения движения.

Перенос поля с поверхности, на которой выполняется уравнение равновесия, в центр тяжести создает новую модель непрерывного континуума, содержащего микроструктуру. Фактически эта операция есть размазывание силового поля по объему микроструктуры с тем, чтобы применять законы сохранения не к реальному телу, а к его непрерывному образу. Некоторые результаты, вытекающие из рассматриваемой модели, были опубликованы ранее [17–26]. Одномерный оператор переноса поля из точки x в точку $x \pm l_0$ есть

$$u(x \pm l_0) = u(x) \exp(\pm l_0 D_x); D_x = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2)$$

Формальное разложение выражения (2) в ряд Тейлора дает известную формулу для конечных приращений. Может быть построен аналогичный оператор переноса в трехмерном пространстве для сферы:

$$P(D_x, D_y, D_z; l_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp[l_0(D_x n_x + D_y n_y + D_z n_z)] \sin \theta d\theta d\varphi; \quad (3)$$

$$n_x = \sin \theta \cos \varphi; n_y = \sin \theta \sin \varphi; n_z = \cos \theta.$$

Интеграл (3) с символическими переменными D_x, D_y, D_z может быть вычислен формально с помощью интеграла Пуассона [27], обоснование таких вычислений дано в [28]:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\alpha n_x + \beta n_y + \gamma n_z) \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}) \sin p dp. \quad (4)$$

Вычисление оператора P достаточно просто:

$$P(D_x, D_y, D_z; l_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp(l_0 \sqrt{\Delta} t) dt = \frac{\sinh(l_0 \sqrt{\Delta})}{l_0 \sqrt{\Delta}} = E + \frac{l_0^2}{3!} \Delta + \frac{l_0^4}{5!} \Delta \Delta + \dots \quad (5)$$

Интересно, что оператор P в (5) как функция символических переменных $p_1 = \partial/\partial x$; $p_2 = \partial/\partial y$; $p_3 = \partial/\partial z$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца с чисто мнимой частотой:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial p_2^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial p_3^2} = l_0^2 P. \quad (6)$$

Одно из решений (6), которое стремится к единичному оператору при $l_0 \rightarrow 0$, имеет вид

$$P = \frac{\sinh(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2})}{l_0 \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} = \frac{\sinh(l_0 \sqrt{\Delta})}{l_0 \sqrt{\Delta}}. \quad (7)$$

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ

Используя оператор P , можно написать уравнение движения микронеоднородного тела, если на поле напряжений подействовать упомянутым оператором:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(E + \frac{l_0^2}{3!} \Delta + \frac{l_0^4}{5!} \Delta \Delta + \dots \right) \sigma_{ik} \right] = \rho \ddot{u}_i. \quad (8)$$

Здесь σ_{ik} — тензор напряжений; u_i — компонента вектора перемещений; ρ — плотность породы. Уравнение (8) эквивалентно следующему:

$$\left[\left(E + \frac{l_0^2}{3!} \Delta + \frac{l_0^4}{5!} \Delta \Delta + \dots \right) \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right] = \rho \ddot{u}_i, \quad (9)$$

где E — единичный оператор.

Если средний размер структуры $l_0 \rightarrow 0$, то $P \rightarrow E$, а уравнение (8) совпадает с уравнением движения обычной линейно-упругой сплошной среды. Классический континуум Коши и Пуассона соответствует случаю $P = E$. В случае стационарных колебаний и одномерного пространства уравнение (9) превращается в обыкновенное уравнение бесконечного порядка:

$$u_{xx} \left(E + \frac{l_0^2}{3!} \Delta + \frac{l_0^4}{5!} \Delta \Delta + \dots \right) + k_s^2 u = 0. \quad (10)$$

Подстановка $u = A \exp(ikx)$ в (10) дает дисперсионное соотношение для определения неизвестного волнового числа k :

$$\frac{\sin(kl_0)}{kl_0} = \frac{k_s^2}{k^2}. \quad (11)$$

В соотношении (11) k — волновое число в микронеоднородной среде. При этом $k_s = \omega / (\sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho})$ или $k_s = \omega / (\sqrt{\mu / \rho})$ — обычное волновое число для продольной или поперечной волны. Величина k зависит от размера структуры l_0 или удельной поверхности образца σ_0 в соответствии с (1). В случае $l_0 \rightarrow 0$ волновое число $k \rightarrow k_s$, а скорость волн совпадает с обычной скоростью упругих волн в сплошной среде. Однако, если l_0 мало, но конечно, то скорость волн уменьшится вплоть до 0, когда $kl_0 \rightarrow m\pi$, где m — достаточно большое целое число.

Таким образом, модель описывает, наряду с обычными сейсмическими волнами, другие волны со скоростями, меньшими, чем в сплошной среде, не ограниченными снизу. Этот эффект уменьшения скорости с ростом размера структуры в большей степени снижает скорость продольных волн, чем поперечных. Подобное может привести к аномально низким отношениям скоростей поперечных и продольных волн, что формально будет соответствовать отрицательным значениям коэффициента Пуассона. Бесконечно большое число скоростей, соответствующее уравнению (11), связано с бесконечным числом степеней свободы в средах, обладающих структурой [19]. Другая важная черта уравнения (11) — существование комплексных корней (а значит, и неустойчивых решений), соответствующих катастрофам в форме параметрических резонансов.

СЕЙМОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАКОН ГУТЕНБЕРГА–РИХТЕРА

Уравнение (11) содержит бесконечное (счетное) множество как вещественных, так и комплексных корней. Вещественные корни соответствуют устойчивым решениям, а комплексные описывают неустойчивые состояния. Число комплексных корней увеличивается при уменьшении безразмерной удельной поверхности тела, т. е. произведения удельной поверхности на длину сейсмической волны:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0 \lambda_s}{8\pi(1-f)}. \quad (12)$$

Символом λ_s в (12) обозначена длина обычной поперечной волны, в то время как $\varepsilon = kl_0$. Теоретическая зависимость числа комплексных корней как функции удельной поверхности в двойном логарифмическом масштабе показана на рис. 2 и представляет собой множество точек, группирующихся в окрестности прямой линии. Очевидно, что выделяющаяся при акте разрушения кинетическая энергия в точности равна дефициту потенциальной энергии, возникшему благодаря появлению свободной поверхности трещины. А это выражение есть произведение нагрузки, существовавшей до появления трещины на этой плоскости, на перемещение ее берегов. Иными словами, дефицит потенциальной энергии, появившийся при возникновении трещины, есть

$$\bar{E} = \iint_S p_i u_i dS. \quad (13)$$

Значение интеграла \bar{E} в (13) равно кинетической энергии акта разрушения, которая пропорциональна удельной поверхности трещин. Следовательно, можно сопоставить теоретический график “удельная поверхность – число неустойчивых решений” с экспериментальным графиком распределения числа землетрясений по энергиям. Эта связь известна как закон Гутенберга–Рихтера. На рис. 2, 3 представлены теоретические и экспериментальные графики упомянутых зависимостей. На рис. 2 видны прямолинейные сегменты (множества отдельных точек), которые показывают некоторую неединственность упомянутых связей, особенно в области больших энергий. Экспериментальная зависимость энергии от числа событий (землетрясений) заимствована из работы [29]. Тангенс угла наклона с вертикалью в опыте изменяется от 0.5 до 0.52 и зависит от способа обработки материала (рис. 3).

На рис. 2 видны прямолинейные сегменты (множества отдельных точек), которые показывают некоторую неединственность упомянутых связей, особенно в области больших энергий. Экспериментальная зависимость энергии от числа событий (землетрясений) заимствована из работы [29]. Тангенс угла наклона с вертикалью в опыте изменяется от 0.5 до 0.52 и зависит от способа обработки материала (рис. 3).

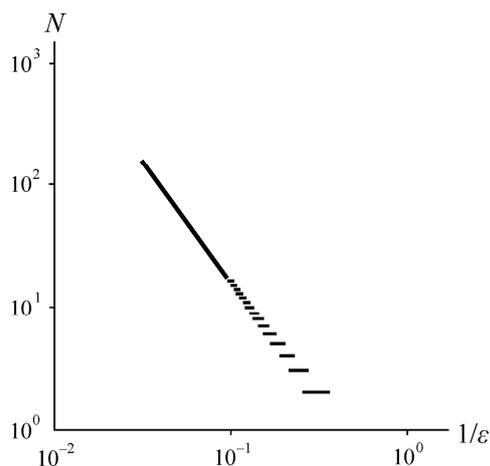


Рис. 2. Теоретическая зависимость числа неустойчивых решений от удельной поверхности трещин. Тангенс угла наклона $\gamma=0.5$. Видна неединственность решений в форме горизонтальных линий (плотного множества отдельных точек)

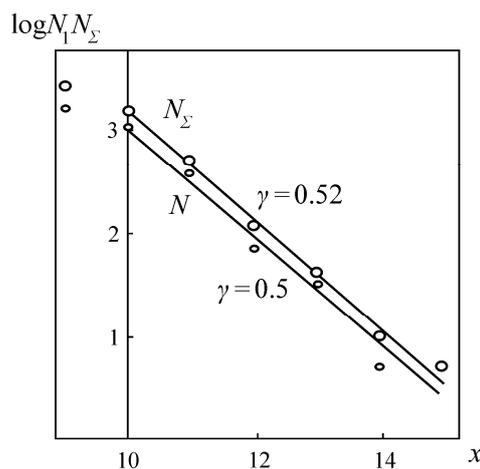


Рис. 3. Экспериментальная зависимость числа землетрясений от энергии (класса землетрясений), которая пропорциональна удельной поверхности трещин. Тангенс угла наклона $\gamma=0.5-0.52$

ДЛИННОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ СОЛИТОНЫ

Для малых значений l_0 , в сравнении с длиной волны, имеется возможность редуцировать уравнение движения бесконечного порядка к уравнению движения четвертого порядка, пренебрегая членами, содержащими l_0^4 и выше. В этом приближении можно рассмотреть случай квадратичной нелинейности диаграммы “напряжение – деформация” (рис. 4). Для горных пород и грунтов обычно имеем уменьшение углов наклона этой зависимости с ростом деформаций. Редуцированное уравнение движения, полученное из (9), принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(E + \frac{l_0^2}{3!} \Delta \right) (\sigma_{ik}) \right] = \rho \ddot{u}_i. \tag{14}$$

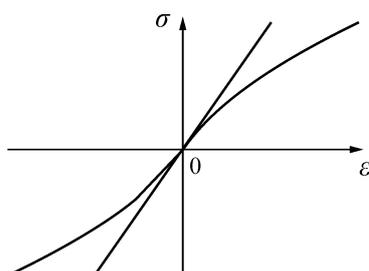


Рис. 4. Диаграмма “напряжение – деформация”. По горизонтали — деформация, по вертикали — напряжение. Диаграмма с положительной кривизной. Скорость возмущений падает с ростом давления

Предполагается зависимость между напряжениями и деформациями в форме

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)(u_x - bu_x^2 \text{sign}(u_x)).$$

Обратный оператор $P^{-1} = \frac{l_0 \sqrt{\Delta}}{\sinh(l_0 \sqrt{\Delta})}$ существует при условии $l_0 \sqrt{\Delta} < \pi E$. Это операторное равенство означает, что $kl_0 < \pi$, т. е. обратный оператор заведомо существует при достаточно малых размерах структур в сравнении с длиной волны. Обратный оператор P^{-1} имеет вид

$$P^{-1} = E - \frac{l_0^2}{3!} \Delta + \frac{7l_0^4}{360} \Delta \Delta - \dots \approx E - \frac{l_0^2}{3!} \Delta. \tag{15}$$

Используя результат (15), можно получить нелинейное уравнение четвертого порядка, близкое к уравнению Буссинеска:

$$u_{xx} (1 - 2b|u_x|) = \frac{1}{c_0^2} \left(\ddot{u} - \frac{l_0^2}{3!} \ddot{u}_{xx} \right). \tag{16}$$

Уравнение (16) содержит нелинейный и дисперсионный члены, соответствующие четвертой смешанной производной \ddot{u}_{xx} . Уравнение Буссинеска имеет четвертую производную по координате. Наличие нелинейного и дисперсионного членов наталкивает на мысль о существовании решений в виде солитонов. Ищем решение в виде бегущей волны:

$$u = u(z) = c_0 TF(z); \quad z = \frac{t - \frac{x}{c_0}}{T}. \tag{17}$$

В формуле (17) $\xi = \text{const}$ есть отношение скорости волны в структурированной среде к скорости волны в сплошной среде. Назовем его дефектом скорости. Этот параметр среды — положительная величина, которая может быть как больше, так и меньше единицы, и зависит от параметров микроструктуры. Если значение данного параметра больше единицы, то он соответствует отрицательной кривизне диаграммы “напряжение–деформация”, т. е. увеличению скорости волны с ростом давления. Он может быть разным для P - и S -волн. Для обычной упругой среды $\xi = 1$. В этой же формуле $c_0 T = L$ — некоторая эффективная длина волны, а T — характерное время импульса; F — безразмерная функция от безразмерного аргумента $z = (t - x/c_0\xi)/T$, а b — постоянная, определяющая нелинейность. Подставляя выражение (17) в (16), получаем обыкновенное нелинейное уравнение четвертого порядка:

$$F_{zz}(1 - \xi^2) + \varepsilon^2 F_{zzzz} + \frac{b}{\xi}(F_z^2) = 0; \quad \varepsilon^2 = \frac{l_0^2}{3!L^2}. \quad (18)$$

Оно может быть легко проинтегрировано. Подстановка $\theta = F_z$ дает уравнение второго порядка

$$\theta(1 - \xi^2) + \frac{b}{\xi}\theta^2 \text{sign}\theta + \varepsilon^2 \theta_{zz} = 0. \quad (19)$$

Для S -волны имеет место аналогичное уравнение

$$\theta(1 - \xi^2) + \frac{b}{\xi}\theta^2 \text{sign}\theta + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2} \theta_{zz} = 0. \quad (20)$$

Если u_x монотонно и положительно, то (16) имеет вид

$$u_{xx}(1 - 2bu_x) = \frac{1}{c_0^2} \left(\ddot{u} - \frac{l_0^2}{3!} \ddot{u}_{xx} \right), \quad (21)$$

соответственно уравнение волны (19) принимает форму $\theta(1 - \xi^2) + \frac{b}{\xi}\theta^2 + \varepsilon^2 \theta_{zz} = 0$ и имеет солитонные решения:

$$\theta = \frac{A}{ch^2(\beta z)}, \quad (22)$$

где постоянные A, β должны быть выбраны таким образом, чтобы уравнение (21) удовлетворялось. Это достигается при значениях постоянных

$$\xi^2 = 1 + 4\beta^2 \varepsilon^2; \quad A = \frac{6\xi}{b} \beta^2 \varepsilon^2. \quad (23)$$

Из (23) следует, что солитоны существуют только при $\xi > 1$. Следовательно, они устойчивы лишь в случае роста скорости волн с увеличением давления. Большинство горных пород этими свойствами не обладают, особенно если поровое пространство насыщено газом. Но если поры насыщены жидкостью, то существование солитонов возможно. Солитоны не могут существовать при отсутствии дисперсии, что следует из формулы (23).

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ И КОМБИНАЦИОННЫЕ ЧАСТОТЫ

В случае $\xi < 1$ уравнение (21) имеет колебательные решения. Отсутствие в (19), (20) явной зависимости от аргумента z дает возможность понизить порядок нелинейного уравнения до первого и получить точное решение в неявной форме:

$$\int_0^\theta \frac{dG}{\sqrt{D - G^2 \left(\frac{1 - \xi^2}{\varepsilon^2} + \frac{2G}{3\varepsilon^2} \right)}} = \frac{t - \frac{x}{c_0 \xi}}{T} = z, \quad (24)$$

где D — произвольная постоянная, а отношение $(1 - \xi^2)/\varepsilon^2$ — порядка единицы; $2G/3\varepsilon^2$ может быть очень малым при достаточно малой деформации G , однако при не очень малых деформациях, благодаря малости знаменателя ε^2 , влияние члена высшего порядка малости становится неожиданно большим. Тем самым наличие дисперсии резко обостряет нелинейные явления. Они гораздо больше, чем просто квадратичные эффекты при малых деформациях.

На рис. 5 показано затухание синусоидального импульса, обусловленного взаимодействием нелинейности и дисперсии при деформациях порядка 10^{-6} . Нелинейный параметр имеет порядок 0.1 (благодаря множителю $1/\varepsilon^2$). Логарифмический декремент близок к постоянной величине. В сплошной среде без дисперсии этот эффект пренебрежимо мал. Дисперсия в данном случае на несколько порядков увеличивает влияние нелинейности. Когда нелинейность отсутствует, нет и затухания синусоидального импульса, а значит, и других частот, отличных от основной. Для большего значения нелинейного параметра логарифмический декремент отличается от постоянной. Уравнение (24) также содержит в себе и растущие решения при соответствующем выборе произвольных постоянных.

Экспериментальные наблюдения [30] проводились на образце искусственного песчаника длиной 1 м, диаметром 0.076 м, пористостью 0.3 и плотностью 2000 кг/м^3 , подверженного действию вибрационных источников двух различных частот 6100 и 7720 Гц (рис. 6а).

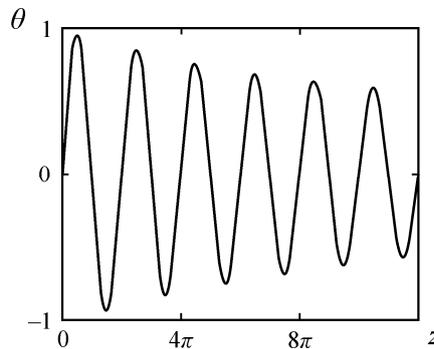


Рис. 5. Затухание квазисинусоидального импульса с увеличением расстояния. Логарифмический декремент почти постоянный. Амплитуда деформации 10^{-6}

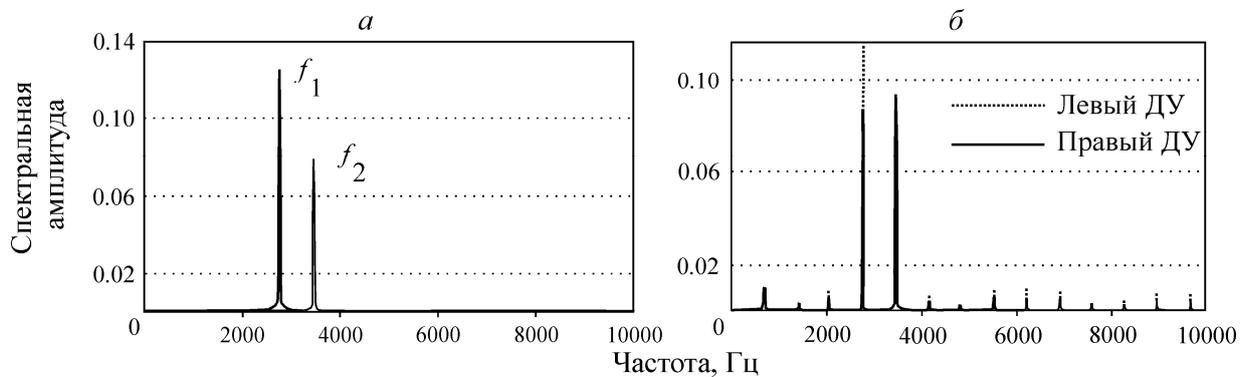


Рис. 6. Спектры: а — сигналов поперечных волн с частотами f_1 и f_2 на правом и левом торцах образца; б — комбинационных частот в точках образца благодаря нелинейности и дисперсии (ДУ — датчики ускорений) [30]

Спектры комбинационных сигналов для приемника, расположенного на расстоянии 75 см от источника, приведены на рис. 6б. Комбинационные спектры оказываются заметными на фоне основных спектров двух источников и достигают 10% от амплитуды основных сигналов. Этот эффект был обнаружен еще в 80-х годах XX в. при полевых испытаниях вибраторов, однако в лабораторных условиях получен сравнительно недавно. Причина появления комбинационных частот до последнего времени была неясна.

Это дает возможность использовать двухчастотное зондирование среды в сейсморазведке. Нелинейные явления лучше всего наблюдаются именно в квазистационарном режиме, в то время как в обычной сейсморазведке стремятся к созданию коротких импульсов. Резюмируя, отметим, что малая нелинейность и малая дисперсия порождают вполне заметный эффект появления комбинационных частот при взаимодействии двух вибраторов, излучающих разные частоты даже в случае слабых колебаний.

РЕШЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОДИНАКОВЫМ ДЛИНАМ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

Скрытая нелинейность порождает некоторые асимптотические решения уравнения (19) с одинаковыми длинами продольных и поперечных волн. Классические решения уравнений динамической теории упругости дают решения с одной и той же частотой для всего волнового поля, т. е. для любых волн в достаточно большой области. Однако уравнение (19) в асимптотическом случае сверхмалых деформаций, т. е. $b/\xi\varepsilon^2 \ll 1$, содержит два независимых параметра ξ^2 и ε^2 . Для плоских P - и S -волн уравнения (19), (20) при условии $b/\xi\varepsilon^2 \ll 1$ имеют вид

$$\theta(1 - \xi_P^2) + \varepsilon^2 \theta_{zz} = 0; \quad \theta(1 - \xi_S^2) + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2} \theta_{zz} = 0; \quad \gamma = \frac{V_S}{V_P}. \quad (25)$$

Дефекты скорости ξ_P, ξ_S могут быть различными для волн разных типов. В случае одинаковых дефектов скоростей $\xi_P = \xi_S$ имеем стационарные колебания, соответствующие продольным и поперечным волнам с одинаковыми частотами и разными длинами волн, отличающимися друг от друга в γ раз:

$$G_{zz} + \frac{1 - \xi_P^2}{\varepsilon^2} G = 0; \quad H_{zz} + \gamma^2 \frac{1 - \xi_P^2}{\varepsilon^2} H = 0. \quad (26)$$

Выбирая скоростные дефекты для сжатия и сдвига разными, например $\frac{1 - \xi_P^2}{\varepsilon^2} = \gamma^2 \frac{1 - \xi_S^2}{\varepsilon^2}$, можем получить аналогичные уравнения для стационарных плоских P - и S -волн с теми же самыми длинами волн, но с различными частотами:

$$G_{zz} + \frac{1 - \xi_P^2}{\varepsilon^2} G = 0; \quad H_{zz} + \frac{1 - \xi_P^2}{\varepsilon^2} H = 0. \quad (27)$$

Эти решения чаще всего имеют место в сейсмологии, сейсморазведке и на высоких частотах при проведении ультразвукового каротажа [5–11]. Скоростные дефекты ξ_P и ξ_S близки к 1, с точностью до малой величины ε^2 . Различия между ними обуславливают различные доминирующие частоты сейсмических P - и S -волн. Таким образом, не слишком малые деформации порядка 10^{-6} в сочетании с малой дисперсией приводят к тому, что частоты продольных и поперечных волн могут существенно различаться. В области сверхмалых деформаций (10^{-7} и менее) соотношения частот не изменяются.

ВЫВОДЫ

Длинноволновое приближение уравнения движения, в случае квадратичной нелинейности уравнения состояния, есть уравнение четвертого порядка, содержащее нелинейный, дисперсионный и волновые члены. Одним из решений представленного уравнения являются солитоны. Решения в виде солитонов существуют только в пористых скелетах, содержащих жидкость, но не газ. Солитоны устойчивы в тех породах или грунтах, где устойчивы ударные волны.

Для обычной модели непрерывного континуума нелинейные эффекты исчезающе малы при малых деформациях. Для сред со структурой дисперсия резко увеличивает нелинейные эффекты и делает их практически значимыми. Излучение двух вибраторов с различными частотами в пористых средах порождает заметные амплитуды комбинационных частот даже при малых деформациях.

Малая нелинейность и малая дисперсия приводят к формированию различных доминирующих частот продольных и поперечных упругих волн, возбуждаемых как импульсными, так и вибрационными источниками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829–832.
2. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. — Л.: Судостроение, 1980. — 344 с.
3. Опарин В. Н., Танайно А. С., Юшкин В. Ф. О дискретных свойствах объектов геосреды и их каноническом представлении // ФТПРПИ. — 2007. — № 3. — С. 7–24.
4. Александрова Н. И., Шер Е. Н. Моделирование процесса распространения волн в блочных средах // ФТПРПИ. — 1999. — № 4. — С. 75–83.
5. Suvorov V. D., Mishenkina Z. M., Petrick G. P., Sheludko I. F., Seleznev V. S., Solovyov V. M. Structure of the crust in the Baikal rift zone and adjacent areas from deep seismic sounding data, *Tectonophysics*, 2002, Vol. 351. — P. 61–74.
6. Puzirev N. N., Mandelbaum M. M., Krylov S. V., Mishenkin B. P., Mishenkina Z. R., Petrick G. V., Seleznev V. New data from explosion seismology in the Baikalian rift zone, *Tectonophysics*, 1979, Vol. 56, Issue 1–2. — 128 p.
7. Dehandschutter B., Vysotsky E., Delvaux D., Klerkx J., Buslov M. M., Seleznev V. S., De Batiste M. Structural evolution of the Teletsk graben (Russian Altai), *Tectonophysics*, 2002, Vol. 351. — P. 139–167.
8. Горельчик В. И., Сторчеус А. В. Глубокие длиннопериодные землетрясения под Ключевским вулканом // Геодинамика и вулканизм Курило-Камчатской островодужной системы. — Петропавловск-Камчатский, 2001. — 428 с.
9. Канаи К., Осида К., Иосизава К. Соотношения между периодами и амплитудами сейсмических волн // Слабые землетрясения. — М.: ИЛ, 1961. — С. 231–242.
10. Крылов С. В., Мишенькин Б. П., Мишенькина З. Р. и др. Детальные сейсмические исследования литосферы на Р- и S-волнах. — Новосибирск: Наука, 1993.
11. Nikolaev A. V. Problems of nonlinear seismology, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1988, Vol. 50, No. 1. — P. 1–7.
12. Nikolaev A. V. Scattering and attenuation of seismic waves in the presence of nonlinearity, *Pure and Applied Geophys.*, 1989, Vol. 131, No. 4. — P. 687–702.
13. Алешин А. С., Гущин В. В., Николаев А. В. и др. Экспериментальное исследование нелинейных взаимодействий сейсмических поверхностных волн // ДАН СССР. — 1981. — Т. 260. — № 3. — С. 574–575.
14. Хаврошкин О. Б. Сейсмическая нелинейность. — М.: ОИФЗ РАН, 2000. — 110 с.

15. **Хаврошкин О. Б., Цыплаков В. В.** Аппаратурно-методические основы экспериментальной нелинейной сейсмологии // Сейсм. приборы. — М.: ОИФЗ РАН, 2003. — Вып. 39. — С. 43–71.
16. **Sibiryakov B. P.** Generation of nonlinear oscillations at weak perturbations and generalization of cracks at fracture, *Physical Mesomechanics*, 2007, No. 3. — P. 203–206.
17. **Sibiryakov B. P.** Supersonic and intersonic cracking in rock-like material under remote stresses, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2002, No. 4. — P. 255–265.
18. **Sibiryakov B. P., Prilous B. I.** The unusual small wave velocities in structural bodies and instability of pore or cracked media by small vibration, *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 2007, No. 7. — P. 139–144.
19. **Sibiryakov B. P., Leite L. W. B., Vieira W. W. S.** Model of the structured continuum, and the relation between specific surface area, porosity and permeability, *Revista Brasileira de Geofisica*, 2013, Vol. 31(4). — P. 559–568.
20. **Sibiryakov B. P., Prilous B. I., Kopeykin A. V.** The nature of instabilities in blocked media and seismological law of Gutenberg-Richter, *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 2011, Vol. 6, Issue 2. — P. 69–79.
21. **Sibiryakov B. P.** Deviations from the Gutenberg–Richter law on account of a random distribution of block sizes, *AIP Conf. Proc.* 1683, 020214 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4932904>.
22. **Sibiryakov B. P.** The appearance of plasticity on the blocks surfaces in geological media, *AIP Conf. Proc.* 1623, 579–583 (2014); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4899011> Conf. date: 3–5 September, 2014.
23. **Sibiryakov B. P., Prilous B. I., Kopeykin A. V.** The nature of instability of blocked media and distribution law of unstable states, *Physical Mesomechanics*, 2013, Vol. 16, No. 2. — P. 141–151.
24. **Sibiryakov B. P., Prilous B. I., Kopeykin A. V.** The nature of instabilities in blocked media and seismological law of Gutenberg–Richter, *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 2011, Vol. 6, Issue 2. — P. 69–79.
25. **Сибиряков Б. П.** Природа неустойчивости блочных сред и некоторые сценарии развития катастроф // Технологии сейсморазведки. — 2011. — № 3. — С. 114–117.
26. **Сибиряков Б. П., Прилоус Б. И., Копейкин А. В.** Природа неустойчивости блочных сред и закон распределения неустойчивых состояний // Физ. мезомеханика. — 2012. — № 3. — Т. 15. — С. 11–21.
27. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1184 с.
28. **Маслов В. П.** Операторные методы. — 1973. — 544 с.
29. **Ризниченко Ю. В.** Проблемы сейсмологии. — М.: Наука, 1985. — 405 с.
30. **Егоров Г. В., Машинский Э. И.** Бигармонические продольные и поперечные волны в искусственной пористой среде под аксиальной нагрузкой // Технологии сейсморазведки. — 2011. — № 1. — С. 72–77.

Поступила в редакцию 14/VI 2016