

УДК 539.370

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ФОРМ ИЗГИБА АРОК

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Методом стрельбы численно решаются нелинейные краевые задачи о плоском изгибе упругих арок под равномерно распределенной нагрузкой. Задачи сформулированы для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с не зависящим от перемещений полем конечных поворотов. Рассмотрены два варианта граничных условий: шарнирное опирание и жесткое защемление. Получены разветвленные решения краевых задач. В случае шарнирного опирания множество решений включает симметричные и несимметричные формы изгиба, соответствующие положительным, отрицательным и нулевым значениям нагрузки. В случае защемленной арки множество решений состоит из симметричных форм, существующих лишь в области положительных значений нагрузки.

Модель трехшарнирной фермы Мизеса [1] является одной из ранних моделей, воспроизводящих основные особенности нелинейного деформирования арок: существование нескольких равновесных форм при постоянной нагрузке и возможность потери устойчивости “в большом” (скачкообразным переходом из одной формы в другую). В работе [2] (см. также [3]) эти особенности обнаружены при решении нелинейной задачи об изгибе пологой двухшарнирной арки, нагруженной равномерным нормальным давлением (приближенное решение получено энергетическим методом). В дальнейшем решались линеаризованные задачи устойчивости арок [4]. С развитием электронно-вычислительной техники широкое распространение получил пошаговый (по параметру нагружения) метод решения нелинейных краевых задач деформации конструкций [5]. Этот метод используется для нахождения решений, ответвляющихся от основного, и требует специальных приемов построения решений вблизи точек ветвления. Такие ограничения препятствуют получению изолированных решений, характерных для нелинейных задач деформации стержней, пластин и оболочек. В настоящей работе анализ множества форм изгиба арки выполнен методом стрельбы, сводящим нелинейную краевую задачу к конечному числу нелинейных задач Коши.

Система уравнений. В декартовой системе координат x_j с ортонормированным базисом e_j ($j = 1, 2, 3$) базовая линия круговой арки задается параметрическими уравнениями

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 = r(\cos(\alpha t) - \cos \alpha), \quad x_3 = r \sin(\alpha t) \quad \forall t \in [-1, 1],$$

где t – внутренний параметр линии; r — радиус линии; 2α — угол раствора арки. Арка имеет постоянное сечение (профиль) A , базовая линия проходит через его геометрический центр. Изучается плоский изгиб арки под нагрузкой, распределенной по ее длине и заданной вектором

$$P = P_2 e_2 + P_3 e_3. \quad (1)$$

Для анализа используются нелинейные уравнения одномерной модели деформации стержня [6]. Целью анализа является нахождение изогнутых равновесных форм арки вида

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 = y(t), \quad x_3 = z(t), \quad (2)$$

где y и z — искомые функции. Материал арки считается трансверсально-изотропным и линейно-упругим.

На интервале $(-1, 1)$ нелинейная задача плоского изгиба арки формулируется в виде системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений [7]

$$\begin{aligned} y'_0 &= y_1 + \alpha, & y'_1 &= f_2 - (\gamma - 1)\varepsilon^2 f_2 f_3, & y'_2 &= \varepsilon^2(\gamma f_2 \cos y_0 - f_3 \sin y_0) - \sin y_0, \\ y'_3 &= \varepsilon^2(\gamma f_2 \sin y_0 + f_3 \cos y_0) + \cos y_0, & y'_4 &= -p_2, & y'_5 &= -p_3, \\ f_2 &\equiv y_4 \cos y_0 + y_5 \sin y_0, & f_3 &\equiv -y_4 \sin y_0 + y_5 \cos y_0 \end{aligned} \quad (3)$$

с шестью неизвестными функциями

$$y_0 = \theta, \quad y_1 = Yl/H, \quad y_2 = y/l, \quad y_3 = z/l, \quad y_4 = X_2 l^2/H, \quad y_5 = X_3 l^2/H \quad (4)$$

и параметрами

$$\alpha = l/r, \quad \gamma = E/G, \quad \varepsilon^2 = I/(Al^2), \quad p_j = P_j l^3/H, \quad H = EI. \quad (5)$$

В (3)–(5) $\theta(t)$ — угол наклона поперечного сечения арки к оси x_2 ; $Y(t)$ — изгибающий момент относительно оси x_1 ; $y(t)$, $z(t)$ — координаты точки t в плоскости (x_2, x_3) ; $X_2(t)$, $X_3(t)$ — декартовы компоненты вектора усилия; $2l$ — длина линии; G — модуль поперечного сдвига; E — модуль продольного растяжения-сжатия; I — момент инерции поперечного сечения относительно оси x_1 ; штрих обозначает производную по t . Система (3) описывает нелинейный упругий изгиб круговой арки при заданных значениях параметров нагрузки p_2 , p_3 , параметров жесткости α , γ , ε и заданных условиях закрепления арки.

Шарнирная арка под гравитационным давлением. Нагрузку, равномерно распределенную по арке и направленную параллельно оси x_2 , назовем гравитационным давлением. В процессе деформации вектор $\mathbf{P}(-P, 0)$ (1) перемещается поступательно (P — интенсивность нагрузки на единицу длины арки). Функции p_2 и p_3 в системе (3) принимают значения $p_2 = -p$, $p_3 = 0$, где $p = Pl^3/H$ — нормированный параметр давления. Рассматривается арка, шарнирно закрепленная в граничных точках $t = -1$ и $t = 1$, так что в каждой из них выполняются условия отсутствия моментов и перемещений

$$y_1(\mp 1) = 0, \quad y_2(\mp 1) = 0, \quad y_3(\mp 1) = \mp(1/\alpha) \sin \alpha. \quad (6)$$

Нелинейная краевая задача (3), (6) решалась методом стрельбы: в точке $t = -1$ задавались шесть условий

$$\begin{aligned} y_1(-1) &= 0, & y_2(-1) &= 0, & y_3(-1) &= -(1/\alpha) \sin \alpha, \\ y_0(-1) &= k_1, & y_4(-1) &= k_2, & y_5(-1) &= k_3 \end{aligned} \quad (7)$$

и при варьировании параметров k_j численно строилось трехпараметрическое семейство решений $\mathbf{y}(t, k_j)$ одноточечной задачи (3), (7) (\mathbf{y} — вектор искомых функций). Значения варьируемых параметров, соответствующие решению исходной краевой задачи (3), (6), находились итерациями из трех условий (6), заданных в граничной точке $t = 1$. Такая процедура применялась при фиксированном значении параметра p . При поиске равновесных форм, не относящихся к основной ветви решений, применялась также модифицированная процедура, в которой фиксировался один из граничных параметров k_j , а параметр давления p варьировался. Применение обеих процедур помогало контролировать точность решения задачи. Для численного решения задач использовался пакет программ Mathcad-7.

Для арки с параметрами $\alpha = \pi/4$, $\gamma = 2,5$, $\varepsilon = 0,02$ на рис. 1 представлены результаты расчета четырех ветвей зависимости кинематического параметра q (перемещения точки $t = 0$ по оси x_2) от параметра давления p . Следует отметить, что положительным значениям p и q соответствуют нагрузка и перемещение, противоположно направленные по отношению к оси x_2 . Кривая 1 — ветвь основных нелинейных форм (мод) изгиба, симметричных относительно оси x_2 и мало отличающихся от линейных при $p < 5$. Без

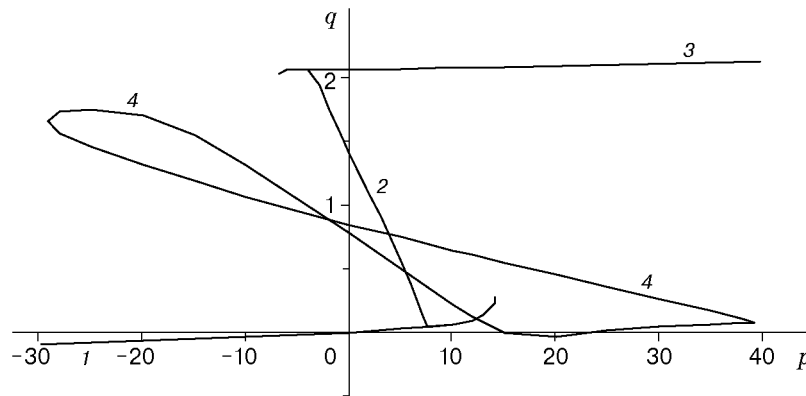


Рис. 1

ограничения упругости и прочности арки основные моды существуют в полубесконечном интервале $-\infty < p \leq p^+$, где $p^+ \approx 14$ — верхняя критическая точка. Ветвь содержит точку $(p = 0, q = 0)$, которой соответствует начальная (ненапряженная) форма арки. Кривая 2 на рис. 1 — ветвь несимметричных конфигураций, соединяющая ветвь основных мод и ветвь вывернутых симметричных мод (кривая 3). Последняя существует в полубесконечном интервале $p^- \leq p < +\infty$, где $p^- \approx -6,7$ — нижняя критическая точка.

На рис. 2 показаны равновесные формы арки в координатах $z/b, y/a$ при движении вдоль ветвей 1–3 (см. рис. 1) (a — высота, $2b$ — раствор арки). На рис. 2 кривые 1–5 соответствуют точкам $(p; q)$ с координатами $(14; 0,234)$, $(6; 0,381)$, $(2,46; 1)$, $(-3; 1,94)$, $(-6,7; 2,03)$. Кривая 1 — основная мода, соответствующая верхней критической точке. Кривые 2–4 — несимметричные переходные моды, соответствующие точкам второй ветви. Конфигурация 5 (вывернутая) соответствует нижней критической точке третьей ветви зависимости $q(p)$.

Кроме форм изгиба, показанных на рис. 2, имеются симметричные и несимметричные моды с более высокими показателями осцилляции. Кривая 4 на рис. 1 — ветвь симметричных мод с тремя — пятью полуволнами. Изменяясь, эти моды плавно переходят одна в другую, о чем свидетельствует замкнутая кривая 4. Примеры симметричных мод с тремя полуволнами приведены на рис. 3. Кривые 1–3 соответствуют точкам $(p; q)$ с координатами $(12; 0,121)$, $(0; 0,777)$, $(-10; 1,311)$.

Равновесные формы, изображенные на рис. 4, возможны при отсутствии давления ($p = 0$). Кривые 1–4 соответствуют точкам $(p; q)$ с координатами $(0; 0)$, $(0; 1,41)$, $(0; 2,066)$, $(0; 0,777)$. В отличие от начальной конфигурации 1 моды 2–4 являются напряженными и

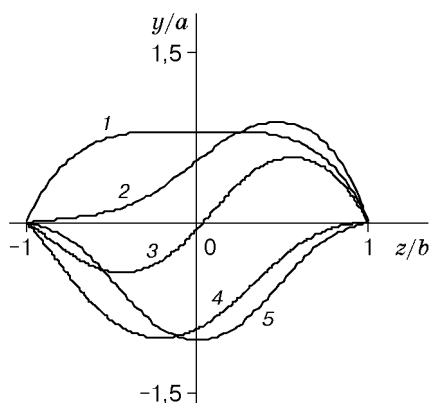


Рис. 2

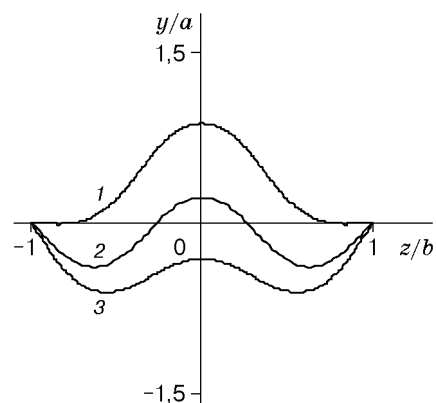


Рис. 3

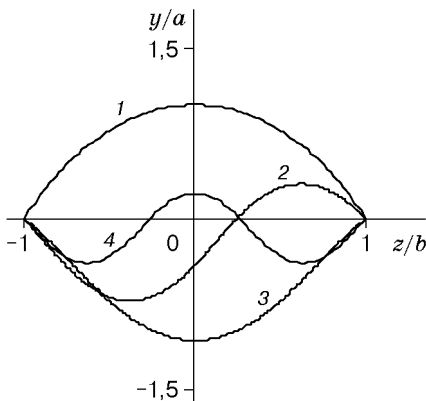


Рис. 4

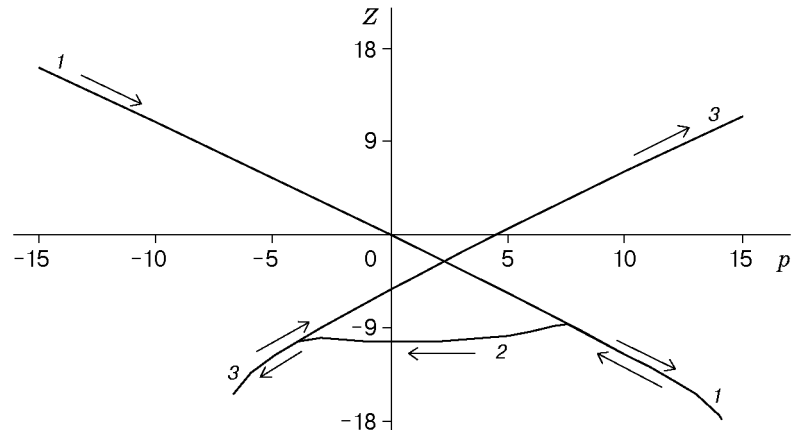


Рис. 5

уравновешиваются усилием $X_3 = HZ/l^2$, возникающим в опорных точках. На рис. 1 всем этим формам соответствуют точки пересечения ветвей с осью ординат. На рис. 5 показана зависимость параметра опорного усилия Z от параметра давления (кривая 1 соответствует основным модам изгиба, 2 — несимметричным переходным, 3 — вывернутым).

Из характера зависимости $q(p)$ для шарнирной арки (см. рис. 1) следует, что потеря устойчивости основных форм равновесия из-за малых возмущений возможна при достижении параметром нагрузки значения $p \approx 7,5$. Основная конфигурация арки скачкообразно превращается в выпуклую (точка ветви 3). Обратный перескок (с ветви 3 на ветвь 1) становится возможным при $p < -4$.

Защемленная арка под нормальным давлением. Нормальное давление является следящей нагрузкой. Пусть P — интенсивность давления на единицу длины арки. В изогнутом состоянии арки вектор \mathbf{P} (1) направлен по нормали к базовой линии (2), так что

$$P_2 = -P \cos \theta, \quad P_3 = -P \sin \theta, \quad p_2 = -p \cos y_0, \quad p_3 = -p \sin y_0. \quad (8)$$

Параметр $p = Pl^3/H$ при численном решении принимался постоянным (равномерное давление), при $p > 0$ вектор \mathbf{P} (1) направлен вдоль внутренней нормали. В отличие от (6) условия жесткого защемления арки в граничных точках (отсутствие поворотов и перемещений) формулируются равенствами

$$y_0(\mp 1) = \mp \alpha, \quad y_2(\mp 1) = 0, \quad y_3(\mp 1) = \mp (1/\alpha) \sin \alpha. \quad (9)$$

На рис. 6–8 представлены результаты численного решения нелинейной краевой задачи (3), (8), (9) методом стрельбы. На рис. 6 показаны четыре ветви зависимости параметра состояния q (перемещения центральной точки) от параметра давления p : 1 — ветвь основных мод изгиба; 2 — ветвь переходных мод; 3 — ветвь вывернутых мод; 4 — ветвь более высоких мод с четырьмя и пятью полуволнами. Ветви разделяются критическими точками (экстремальными для зависимости $p(q)$). На рис. 7 показаны конфигурации арки при переходе от одной ветви к другой: 1 — основная мода, соответствующая критической нагрузке ($p \approx 18,5$; $q = 0,125$); 2, 3 — переходные (неустойчивые) моды (кривая 2 — $p = 10$; $q = 0,716$; кривая 3 — $p = 6$; $q = 1,01$); 4, 5 — вывернутые моды (кривая 4 — $p = 6$; $q = 1,48$; кривая 5 — $p = 20$; $q = 1,77$). Как и у шарнирной арки, моды с четырьмя и пятью полуволнами соответствуют замкнутой кривой 4 в плоскости (p, q) на рис. 6. В отличие от шарнирно опертой арки для защемленной арки эта кривая расположена правее верхней критической точки основной ветви и все формы изгиба симметричны. Несимметричных решений у данной краевой задачи не обнаружено. При отсутствии давления возможно

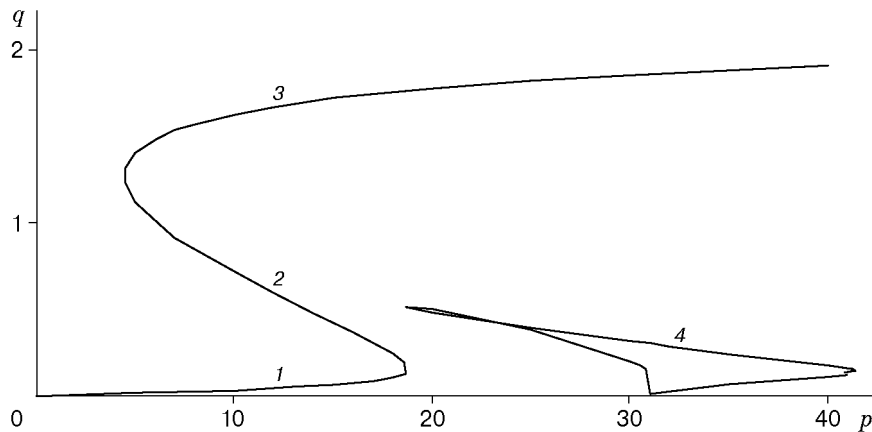


Рис. 6

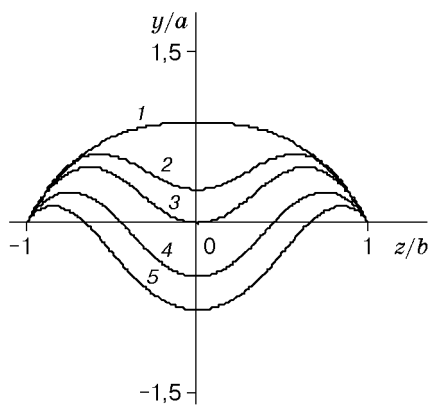


Рис. 7

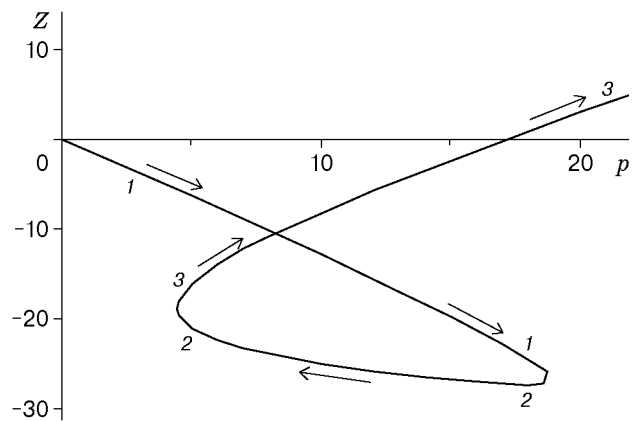


Рис. 8

только ненапряженное состояние арки, при $p < 0$ имеются только основные моды изгиба. Кривая зависимости опорной реакции Z от p , представленная на рис. 8, состоит из трех участков, соответствующих участкам на рис. 6.

Заключение. Полученные в данной работе результаты свидетельствуют о том, что метод стрельбы может быть использован для решения нелинейных краевых задач изгиба арок. Изменение граничных условий приводит к качественному изменению множества решений. В задаче об изгибе шарнирно опертой арки множество решений шире, чем в задаче об изгибе жестко защемленной арки. В обеих задачах зависимости параметра состояния q от параметра нагрузки p не являются монотонными и допускают возможность катастрофы — мгновенного скачка из основной формы в вывернутую. Анализ задач, в которых допускаются свободные смещения граничных точек вдоль оси x_3 (в этом случае $y_5 \equiv 0$), привел к иным результатам: соответствующие зависимости монотонны, т. е. исключают возможность катастрофы. Вместе с тем при изменении характера перемещения нагрузки (с поступательного на следящее и наоборот) не наблюдается качественных изменений в решениях, и, более того, результаты близки количественно. Кроме описанных низших форм изгиба удалось обнаружить многоволновые моды с более высокими уровнями упругой энергии. Такие формы могут проявляться при ударном нагружении арок.

Все представленные результаты справедливы и для цилиндрических панелей со свободными криволинейными кромками.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mises R.** Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie // Z. angew. Math. Mech. 1923. Bd 3. S. 406–462.
2. **Timoshenko S. P.** Buckling of flat curved bars and slightly curved plates // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1935. V. 2. P. 17–20.
3. **Тимошенко С. П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек / Под ред. Э. И. Григолюка. М.: Наука, 1971.
4. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
5. **Riks E.** An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // Intern. J. Solids Struct. 1979. V. 15. P. 529–551.
6. **Шкутин Л. И.** Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 3. С. 120–132.
7. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 141–147.

*Поступила в редакцию 30/X 2000 г.,
в окончательном варианте — 24/I 2001 г.*
