

УДК 532.5:532.59:532.62:536.248

Расчет параметров распада волнового пленочного течения при нестационарном тепловыделении*

А.Н. Чернявский

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: cherny@ngs.ru

Построена математическая модель, позволяющая определять времена ожидания вскипания и полного локального испарения в стекающих волновых пленках жидкости при нестационарном тепловыделении. Выполнено численное моделирование процесса волнообразования в стекающих пленках жидкого азота. Проведен расчет зависимости времени ожидания вскипания от плотности теплового потока в условиях ступенчатого нарастания тепловой нагрузки. Показано удовлетворительное согласование результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

Ключевые слова: гидродинамика, волнообразование, теплообмен, пленки жидкости, численное моделирование.

Введение

Стекающие пленки жидкости характеризуются высокой степенью интенсивности процессов теплообмена, благодаря чему широко применяются в различных технологических установках: криогенных аппаратах, устройствах термостабилизации, малоинерционных теплообменниках-дозаторах и для охлаждения высокотемпературных сверхпроводников.

Течение жидкости по вертикальной поверхности неизбежно сопровождается развитием волновых возмущений на свободной поверхности пленки, вносящих существенный вклад в процессы теплообмена и развития кризисных явлений [1–5].

Область высокоэффективного теплообмена при пленочном течении жидкости ограничена по тепловому потоку и существенно зависит от закона тепловыделения.

Достижение системой критического теплового потока приводит к распаду пленочного течения, образованию крупномасштабных несмоченных зон, снижению интенсивности теплоотдачи, и, как следствие, резкому росту температуры теплоотдающей поверхности, что может привести к разрушению тепловыделяющего элемента.

Умение рассчитывать критические тепловые потоки и максимально допустимые времена их воздействия для заданной системы необходимо для проектирования стабильно работающих теплообменных устройств.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-08-00118), Интеграционного проекта СО РАН совместно с УрО РАН (№ 68), ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2012 гг.» (ГК № 16.518.11.7010 «Уникальные стенды»).

В условиях нестационарного тепловыделения, в зависимости от тепловой нагрузки и интенсивности орошения нагревательной поверхности, возможно развитие двух сценариев распада пленочного течения: вскипания пленки жидкости и ее полного локального испарения [3].

Время наступления кризиса и сценарий распада пленочного течения характеризуются такими параметрами, как время ожидания вскипания и время полного локального испарения стекающей пленки жидкости. Данные величины определяют максимальные времена воздействия критических тепловых потоков на пленку, обладающую определенными параметрами.

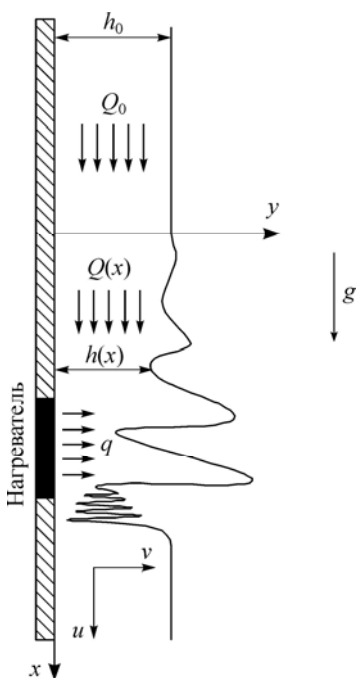
Таким образом, построение математической модели, позволяющей рассчитывать времена ожидания вскипания и полного локального испарения для теплообменных пленочных систем, является актуальной задачей, которая может найти применение в инженерной практике.

На сегодняшний день существует большое количество работ, посвященных моделированию процесса волнообразования в условиях пленочного течения жидкости и исследованию влияния волнового движения на развитие процессов теплообмена и диффузии [6–12]. Однако исследований, посвященных моделированию процессов теплообмена в стекающих волновых пленках жидкости при нестационарном тепловыделении, ранее не проводилось.

В настоящей работе представлена математическая модель, позволяющая производить расчет профиля волновой поверхности, полей скорости, температуры и исследовать их эволюцию при условии резкого изменения тепловой нагрузки во времени, проводить расчеты волновых характеристик и параметров распада пленочного течения жидкости при различных параметрах задачи. Также в работе проведено сравнение результатов численного моделирования, выполненного в рамках представленной модели, с экспериментальными данными, полученными в лаборатории низкотемпературной теплофизики ИТ СО РАН для жидкого азота [3, 5].

Гидродинамическая модель

Моделирование проводилось в двумерной расчетной области (рис. 1). Ось абсцисс направлена вдоль вертикальной стенки, по которой происходит стекание, вниз по течению пленки. Ось ординат ортогональна оси абсцисс и направлена от поверхности стенки к свободной поверхности пленки. Естественными границами расчетной области по оси ординат являются вертикальная поверхность, по которой происходит стекание, и свободная поверхность пленки жидкости. В качестве границ расчетной области по оси абсцисс выбраны участок пленки, на котором реализуется первое возмущение (выше данного участка пленка считается безволновой), и участок пленки, отстоящий от первой границы на расстояние, достаточное для завершения процесса волнообразования и реализации течения с установившимися волновыми характеристиками.



Для описания процессов течения жидкости и эволюции профиля волновой поверхности в рамках настоящей работы использовалась двумерная гидродинамическая модель Капицы–Шкадова [13, 14]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} \right) = -\frac{3\nu Q}{h^2} + gh + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \quad (1)$$

Рис. 1. Схема расчетной области.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$u = \frac{3Q}{h} \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right), \quad (3)$$

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (4)$$

Метод описания течения жидкости посредством интегральной характеристики расхода Q позволяет исключить зависимость от ординаты и свести задачу к псевдоодномерной. Компоненты скорости во всей расчетной области могут быть вычислены из h и Q посредством выражений (3) и (4). Дополненная начальными и граничными условиями система уравнений (1–4) позволяет рассчитывать динамику течения и эволюцию профиля поверхности во времени в двумерной расчетной области.

Возмущения на входе расчетного участка будем задавать путем введения добавки к расходу невозмущенной пленки при условии сохранения невозмущенной толщины:

$$h|_{x=0} = h_0 = \left(\frac{3}{4} \frac{v^2}{g} \text{Re}_{\text{вх}} \right)^{1/3}, \quad (5)$$

$$Q|_{x=0} = Q_0 + A_Q \int_{-\omega_0}^{\omega_0} a \cdot \sin(\omega t) d\omega, \quad a \in [0; 1], \quad (6)$$

$$Q_0 = gh_0^3 / (3\nu) = \nu \text{Re}_{\text{вх}} / 4, \quad (7)$$

$$A_Q = Q_0 R / N. \quad (8)$$

Величины h_0 и Q_0 , заданные выражениями (5) и (7), также являются начальными условиями. Другими словами, в нулевой момент времени пленка полагается безволновой, а ее толщина и расход — постоянными, определяемыми условиями задачи. Интегральная добавка в выражении (6) задает малые возмущения, амплитуда которых характеризуется параметром A_Q , имеющим вид (8), где N — нормировочный параметр, задаваемый таким образом, чтобы результат деления результата интегрирования в выражении (5) на N лежал в пределе $[-1; 1]$, R — относительная амплитуда возмущений. Спектр возмущений задается параметром ω_0 . Подынтегральный множитель a , являющийся случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[0; 1]$, моделирует случайный характер возмущений.

В качестве граничных условий на выходе расчетного участка положим равенство нулю первых пространственных производных расхода и толщины пленки.

Тепловая модель

Цель настоящей тепловой задачи — определение полей температуры в пленке жидкости и расчет параметров распада данной пленки, таких как время ожидания вскипания и время полного локального испарения (образования несмоченной зоны), в зависимости от плотностей теплового потока и входных чисел Рейнольдса. Перечисленные выше величины рассчитываются путем решения в пленке жидкости нестационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

На входе расчетной области, а также на свободной поверхности пленки температура полагается равной температуре насыщения жидкости. На выходе расчетной области первая производная температуры по продольной координате полагается равной нулю. На нагревательной поверхности используется граничное условие

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{q(t, x)}{\lambda} + \frac{\delta_{\text{наг}} C_{\text{наг}} \rho_{\text{наг}}}{\lambda} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{y=0}, \quad (10)$$

учитывающее закон тепловыделения в модели и тепловую инерционность нагревательного элемента. В начальный момент времени температура жидкости также полагается равной температуре насыщения.

В естественных переменных границы расчетной области не являются постоянными в силу нестационарности свободной поверхности. Для разрешения данной проблемы использовалось преобразование координат

$$\eta(t, x, y) = y / h(t, x), \quad (11)$$

переводящее расчетную область в прямоугольную.

После преобразования координат уравнение (9) и граничное условие (10) принимают вид (12) и (13) соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{h} \left[v - \eta \frac{\partial h}{\partial t} - u \eta \frac{\partial h}{\partial x} - 2a \frac{\eta}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + a \eta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \frac{\partial T}{\partial \eta} = \\ = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2a \frac{\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \eta} + \frac{a}{h^2} \left[1 + \eta^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = -h \frac{q(t, x)}{\lambda} + h \frac{\delta_{\text{наг}} C_{\text{наг}} \rho_{\text{наг}}}{\lambda} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\eta=0}, \quad (13)$$

а граничные условия на входе, выходе и свободной поверхности пленки, а также начальное условие сохраняют прежний вид.

С целью учета испарения со свободной поверхности уравнение (2) модифицируется следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\lambda}{L\rho} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\eta=1} + \frac{\lambda}{L\rho} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1}. \quad (14)$$

Результаты численного моделирования

Приведенная выше математическая постановка задачи использовалась при выполнении моделирования процесса волнообразования в стекающих пленках жидкого азота. Решение системы уравнений (1), (12) и (14) осуществлялось методом конечных разностей с итерациями на каждом временном шаге. Более подробно методика решения системы гидродинамических уравнений (1) и (2) описана в работах [11, 12]. Аппроксимация производных в уравнении (14) осуществлялась аналогичным способом.

Решение уравнения (12) выполнялось методом расщепления по переменным x и η . Введем следующие дифференциальные операторы и обозначения:

$$D_x u_{i,j} = \begin{cases} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) / dx, & i = 0, \\ (u_{i,j} - u_{i-1,j}) / dx, & i > 0, \end{cases} \quad D_{xx} u_{i,j} = \begin{cases} (u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}) / dx^2, & i = 0, \\ (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) / dx^2, & i > 0, \end{cases}$$

$$D_{\eta}u_{i,j} = \begin{cases} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) / d\eta, & j = 0 \\ (u_{i,j} - u_{i,j-1}) / d\eta, & j > 0 \end{cases} \quad D_{\eta\eta}u_{i,j} = \begin{cases} (u_{i,j+2} - 2u_{i,j+1} + u_{i,j}) / d\eta^2, & j = 0, \\ (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) / d\eta^2, & j > 0, \end{cases}$$

$$B_{i,j}^k = \left[v_{i,j}^k - jd\eta(h_i^k - h_i^n) / dt - u_{i,j}^k jd\eta D_x h_i^k - 2ajd\eta (D_x h_i^k)^2 / h_i^k + ajd\eta D_{xx} h_i^k \right] / h_i^k,$$

$$C_{i,j}^k = a \left[(jd\eta)^2 (D_x h_i^k)^2 + 1 \right] / (h_i^k)^2.$$

Тогда дискретный аналог уравнения (12) можно представить в виде системы (15), (16):

$$\left(T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n \right) \frac{1}{2dt} + u_{i,j}^k D_x T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + B_{i,j}^k D_{\eta} T_{i,j}^k =$$

$$a D_{xx} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2a \frac{jd\eta}{h_i^k} (D_x h_i^k) D_{\eta} \left(D_x T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) + C_{i,j}^k D_{\eta\eta} T_{i,j}^k, \quad (15)$$

$$\left(T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \frac{1}{2dt} + u_{i,j}^k D_x T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h_i^k} B_{i,j}^k D_{\eta} T_{i,j}^{k+1} =$$

$$a D_{xx} T_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2a \frac{jd\eta}{h_i^k} (D_x h_i^k) D_x (D_{\eta} T_{i,j}^{k+1}) + C_{i,j}^k D_{\eta\eta} T_{i,j}^{k+1}, \quad (16)$$

где (15) соответствует прогонке по x , а (16) — прогонке по η . Как и в случае уравнений (1) и (14), при решении представленной системы конечно-разностных уравнений использовался метод итераций по временным подслоям (введение дополнительного итератора k). Переход на следующий $n + 1$ временной слой осуществлялся при выполнении следующего условия для временных подслоев: $\forall i : |u_i^{k+1} - u_i^k| \leq \varepsilon |u_i^k|$, где $\varepsilon = 10^{-6}$.

При проведении моделирования были использованы параметры нагревательной поверхности и закон тепловыделения (рис. 2), соответствующие экспериментальному участку в работах [3, 5]. Сравнение результатов будет приведено ниже. Следует отметить, что в настоящей работе рассматриваются достаточно высокие плотности тепловых потоков, ввиду чего волны на поверхности пленки не успевают переместиться на существенное расстояние в рамках рассматриваемых временных промежутков. Отсутствие влияния краевых эффектов (влияния отраженных волн), вызываемых близостью модельного нагревательного элемента к выходу расчетной области, на результаты численного моделирования, представленные в настоящей работе, проверено на ряде тестовых задач.

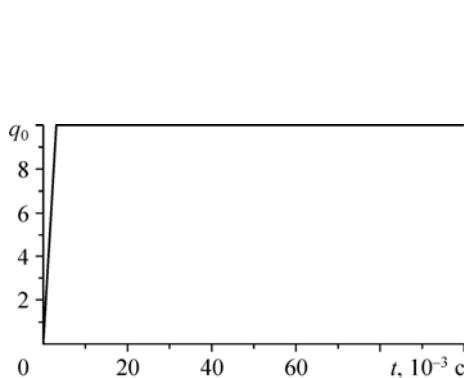


Рис. 2. Закон тепловыделения в модели.

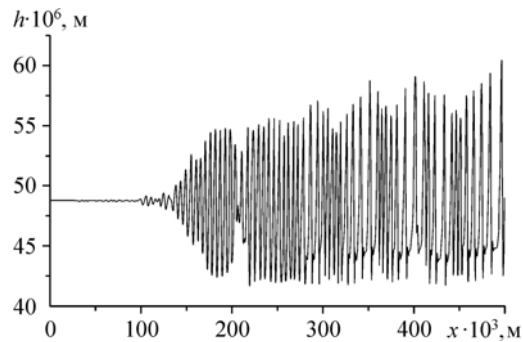


Рис. 3. Профиль пленки.

$Re_{вх} = 38$, $\tau = 10$ с, $R = 25\%$, $\omega_0 = 100$, $dx = 10^{-4}$ м,
 $dt = 10^{-5}$ с.

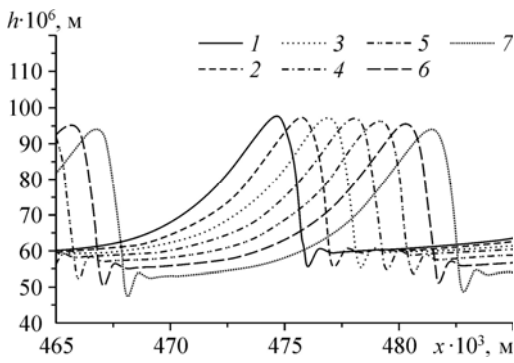


Рис. 4. Эволюция волновой поверхности во времени.

$Re = 111, T_0 = 77,4 \text{ K}, q_0 = 15 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2, \tau = 10 \text{ с},$
 $R = 25 \%, \omega_0 = 100, dx = 10^{-4} \text{ м}, dt = 10^{-5} \text{ с};$
 $t = 0 \text{ (1)}, 5 \cdot 10^{-3} \text{ (2)}, 10 \cdot 10^{-3} \text{ (3)}, 15 \cdot 10^{-3} \text{ (4)}, 20 \cdot 10^{-3} \text{ (5)},$
 $25 \cdot 10^{-3} \text{ (6)}, 30 \cdot 10^{-3} \text{ (7) с.}$

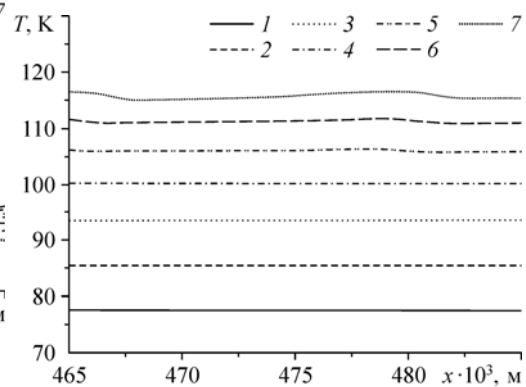


Рис. 5. Эволюция температуры нагревательной поверхности во времени.

Обозначения см. на рис. 4.

Характерный вид расчетного мгновенного профиля толщины пленки в адиабатических условиях представлен на рис. 3 [11]. Рисунок 4 отражает динамику изменения толщины пленки жидкости во времени с момента подачи теплового импульса. Толщина пленки уменьшается вследствие испарения со свободной поверхности. Наиболее интенсивное утончение пленки наблюдается в областях поверхности, предшествующих гребням крупных волн. Этот факт свидетельствует о том, что полное локальное испарение пленки жидкости будет наблюдаться в данных областях с наибольшей вероятностью.

На рис. 5 представлена эволюция температуры нагревательной поверхности во времени с момента подачи теплового импульса. Экстраполяция расчета на область температур, превышающих температуру максимального перегрева, позволяет лучше проиллюстрировать суть процесса. Сопоставление изменений температуры нагревательной поверхности и профиля пленки (рис. 6–8) показывает, что наибольшая температура нагревательной поверхности наблюдается в областях, находящихся под гребнями волн, в то время как наименьшая температура поверхности наблюдается в области остаточного слоя. Опираясь на сказанное выше, можно сделать вывод, что вскипание, определяемое в рамках данной модели как достижение нагревательной поверхностью температуры максимального перегрева, при рассмотренных параметрах задачи будет с большей вероятностью происходить в области гребней крупных волн.

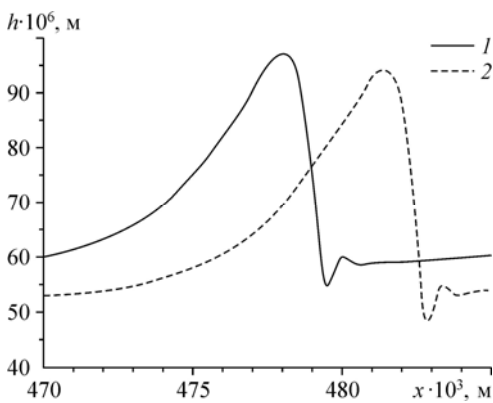


Рис. 6. Профили волновой поверхности.

$Re_{вх} = 111, T_0 = 77,4 \text{ K}, q_0 = 15 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2, \tau = 10 \text{ с},$
 $R = 25 \%, \omega_0 = 100, dx = 10^{-4} \text{ м}, dt = 10^{-5} \text{ с};$
 $t = 15 \cdot 10^{-3} \text{ (1)}, 30 \cdot 10^{-3} \text{ (2) с.}$

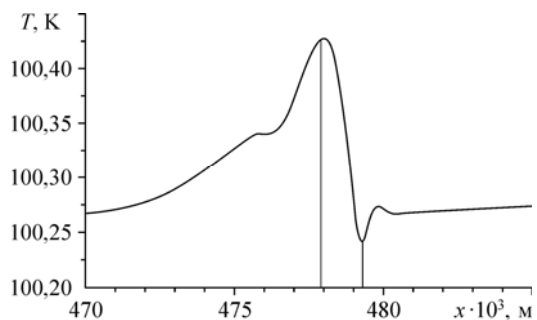
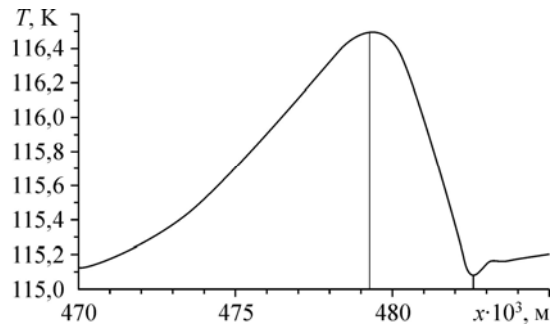


Рис. 7. Температуры нагревательной поверхности.

$Re_{вх} = 111, t = 15 \cdot 10^{-3} \text{ с}, T_0 = 77,4 \text{ K}, q_0 = 15 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2,$
 $\tau = 10 \text{ с}, R = 25 \%, \omega_0 = 100, dx = 10^{-4} \text{ м}, dt = 10^{-5} \text{ с.}$

Рис. 8. Температуры нагревательной поверхности.

$$\begin{aligned} Re_{вх} &= 111, t = 30 \cdot 10^{-3} \text{ с}, T_0 = 77,4 \text{ К}, \\ q_0 &= 15 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2, \tau = 10 \text{ с}, R = 25 \%, \omega_0 = 100, \\ dx &= 10^{-4} \text{ м}, dt = 10^{-5} \text{ с}. \end{aligned}$$



Факт преимущественного вскипания пленки жидкости в области гребней крупных волн подтверждается экспериментальными данными (рис. 9), полученными для насыщенных пленок жидкого азота в работах [3, 5].

На рис. 10 представлены расчетные времена ожидания вскипания в сравнении с результатами эксперимента, представленными в работе [3]. Под временем ожидания вскипания понимается минимальное время, за которое какой-либо участок нагревательной поверхности достигнет температуры максимального перегрева. В области высоких плотностей тепловых потоков в азоте, являющемся чистой криогенной жидкостью,

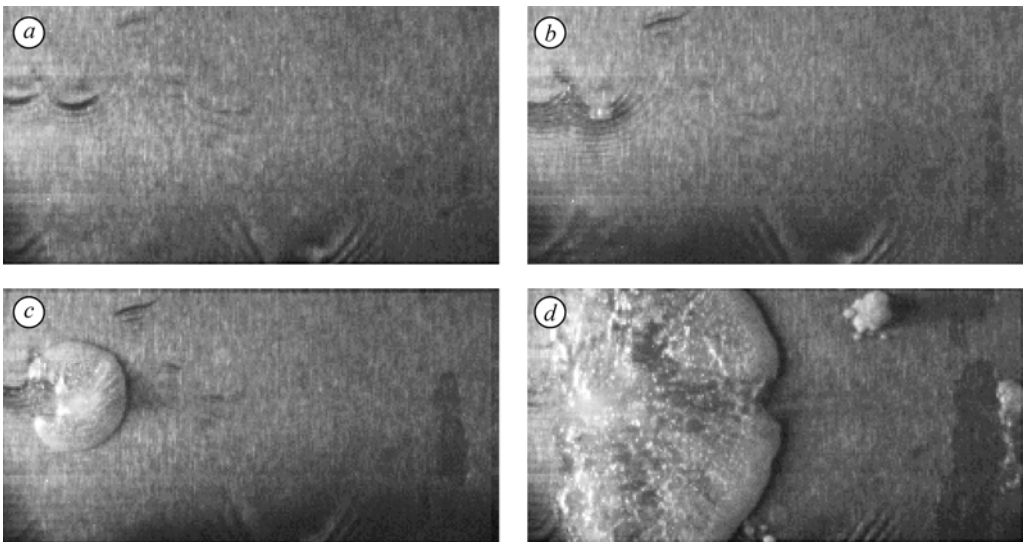
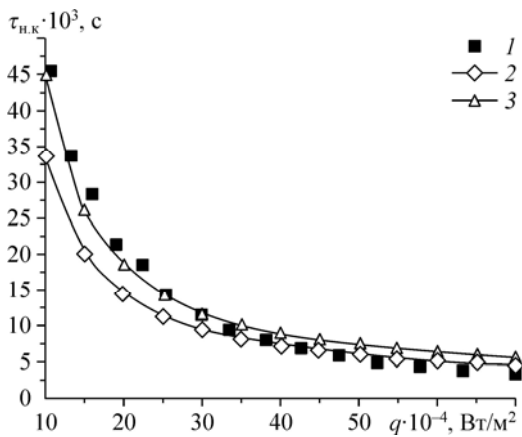


Рис. 9. Фрагменты высокоскоростной видеосъемки, иллюстрирующие вскипание в гребне крупной волны ($Re_{вх} = 200, q = 33,4 \text{ Вт/м}^2$).
 a — 9,87 мс, b — 10,62 мс, c — 11,42 мс, d — 13,01 мс.



не происходит активации готовых центров парообразования, вследствие чего вскипание происходит в условиях гетерогенной нуклеации. Результаты численного моделирования удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Рис. 10. Зависимость времени ожидания вскипания от плотности теплового потока.

$Re_{вх} = 200, T_0 = 77,4 \text{ К}, \tau = 10 \text{ с}, R = 25 \%, \omega_0 = 100,$
 $dx = 5 \cdot 10^5 \text{ м}, dt = 5 \cdot 10^6 \text{ с}; 1$ — эксперимент, 2 — расчет при $\Delta T = 26 \text{ К}, 3$ — расчет при $\Delta T = 32 \text{ К}.$

Выводы и заключение

В настоящей работе построена система уравнений, позволяющая описывать теплообмен в стекающей волновой пленке жидкости в условиях нестационарной тепловой нагрузки и определять такие параметры распада пленочного течения, как время ожидания вскипания и время полного локального испарения. Результаты численного моделирования обосновывают экспериментально наблюдаемый факт преимущественного вскипания в области гребней крупных волн. Расчетные зависимости времени ожидания вскипания от плотности теплового потока удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными в области высоких плотностей теплового потока.

Список обозначений

h — локальная толщина пленки, м,	$A_Q = (Q_0 R)/N$ — амплитудный параметр, м ² /с,
h_0 — толщина пленки на входе, м,	ω — частота возмущений, Гц,
Q — локальный расход жидкости на единицу ширины пленки, м ² /с,	ω_0 — предел интегрирования по частотам, Гц,
Q_0 — расход жидкости на единицу ширины пленки на входе, м ² /с,	τ — общее время расчета, с,
ν — кинематическая вязкость, м ² /с,	$\tau_{н.к}$ — время ожидания вскипания, с,
$Re_{вх} = 4Q_0/\nu$ — число Рейнольдса на входе,	q — плотность теплового потока, Вт/м ² ,
σ — коэффициент поверхностного натяжения,	dt — шаг по времени, с,
ρ — плотность жидкости, кг/м ³ ,	dx — шаг по оси абсцисс, м,
R — относительная амплитуда возмущений,	$d\eta$ — шаг по оси ординат,
N — нормировочный параметр,	$\delta_{нар}$ — толщина нагревателя, м,
	$C_{нар}$ — удельная теплоемкость нагревателя, Дж/(кг·К),
	$\rho_{нар}$ — плотность материала нагревателя, кг/м ³ .

Список литературы

1. Воронцов Е.Г. Температуропроводность стекающих пленок // ТОХТ. 1999. Т. 33, № 2. С. 117–127.
2. Павленко А.Н., Мацех А.М., Печёркин Н.И., Кнеер Р., Лель В.В., Суртаев А.С. Теплообмен и кризисные явления при интенсивном испарении в стекающих волновых пленках жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2006. Т. 13, № 1. С. 93–105.
3. Павленко А.Н., Суртаев А.С., Мацех А.М. Переходные процессы в стекающих пленках жидкости // Теплофизика высоких температур. 2007. Т. 45, № 6. С. 905–916.
4. Pavlenko A.N., Surtaev A.S., Chernyavskii A.N. Breakdown of a falling wave liquid film during nonstationary heat release // J. Heat Transfer Research. 2008. Vol. 39, No. 6. P. 509–517.
5. Pavlenko A.N., Surtaev A.S., Chernyavskii A.N., Volodin O.A. Development of heat transfer and crisis phenomena in falling wavy liquids films at nonstationary heat release // Proc. of 5-th Int. Conf. on Transport Phenomena in Multiphase Systems "Heat 2008", Bialystok, Poland. 20 June-03 July, 2008. Vol. 2. P. 131–138.
6. Гешев П.И., Ездин Б.С. Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидк. со свобод. поверх. Новосибирск, 1985. С. 49–58.
7. Miyara A. Numerical analysis on heat transfer of falling liquid films with interfacial waves // Proc. of 11-th IHTC (Heat Transfer Conf.) Kyondju, Korea, August 23–28, 1998. Vol. 2. P. 57–62.
8. Miyara A. Numerical analysis on heat transfer enhancement by waves on falling liquid film // J. of Thermal Sci. 2000. Vol. 9, No. 3. P. 236–242.
9. Демехин Е.А., Калайдин Е.Н., Растатуриин А.А. Влияние волновых режимов на массообмен в стекающих пленках жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 2. С. 259–269.
10. Roberts R.M., Chang H.-C. Wave-enhanced interfacial transfer // Chemical Engng Sci. 2000. Т. 55, No. 6, P. 1127–1141.
11. Чернявский А.Н., Павленко А.Н. Численное моделирование процесса волнообразования в стекающих пленках жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18, № 3. С. 441–448.
12. Чернявский А.Н., Павленко А.Н. Исследование эволюции амплитудно-частотных характеристик волновых возмущений в стекающих пленках жидкости // Вестник НГУ: Физика, 2011. Т. 6, № 3. С. 40–48.
13. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.
14. Алексеев С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости // Новосибирск: Наука, 1992. 256 с.

Статья поступила в редакцию 8 декабря 2011 г.,
после переработки — 17 апреля 2013 г.