ПМТФ, № 6, 1963

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕТОНАЦИИ ЧЕПМЕНА — ЖУГЕ

В. В. Пухначев

(*Новосибирск*)

Изучение устойчивости плоской детонационной волны приобретает интерес в связи с явлением спиновой детонации. Механизм спиновой детонации был исследован в работах многих авторов (см., например, [1]). Тем не менее, остается открытым вопрос: почему во многих практически наблюдаемых случаях реализуется не самое простое решение уравнений гидродинамики и химической кинетики, отвечающее распространению плоской стационарной детонационной волны, а осуществляется сложное явление спиновой детонации?

Ниже делается попытка подойти к ответу на этот вопрос, опираясь на исследование устойчивости плоской стационарной детонационной волны. Аналогичный вопрос рассматривался в работах К. И. Щелкина [2], Р. М. Зайделя [3] и Дж. Дж. Эрпенбека [4]. К. И. Щелкин объясняет физическую природу неустойчивости плоской детонационной волны в рамках гипотезы о том, что химическая реакция протекает мгновенно на некотором определенном расстоянии от ударной волны. Математическое рассмотрение устойчивости детонации в модели, предложенной К. И. Щелкиным, было предпринято Р. М. Зайделем, который ограничился лишь качественным исследованием полученного в конечном виде характеристического уравнения. В строгой математической постановке обсуждаемый вопрос рассматривался Дж. Дж. Эрпенбеком. Однако в его работе не сообщается никаких конкретных результатов.

Таким образом, считаем, что вопрос о математическом исследовании устойчивости детонации Чепмена — Жуге до последнего времени оставался открытым.

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается следующая математическая модель детонации. В направлении оси z в области $z < 0$ течет идеальный совершенный газ с постоянной сверхзвуковой скоростью. В окрестности плоскости $z = 0$ находится сильный разрыв, за которым следует зона горения. Считается, что ход химической реакции можно описать при помощи одной химической переменной — массовой концентрации непрореагировавших молекул β. Течение газа в области $z > 0$ описывается системой уравнений гидродинамики и химической кинетики [5]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \operatorname{grad} p = 0$$

$$\frac{dp}{dt} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + q(\gamma - 1)\rho \frac{d\beta}{dt} = 0 \qquad (\gamma > 1) \tag{1.1}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -L\beta^m p^{m-1} \exp\left(-\frac{A\rho}{\mu p}\right) \qquad (m \geqslant 1)$$

Здесь γ — показатель адиабаты, q — выделение энергии в единице массы газа, A — энергия активации, μ — средний молекулярный вес смеси, m — порядок реакции, L — положительные постоянные.

Химическая реакция заканчивается, когда достигается значение $\beta = 0$. Детонация называется детонацией Чепмена — Жуге, если при $\beta = 0$ скорость потока равна местной скорости звука. Точка, где достигается это равенство, называется точкой Жуге. В рассматриваемой модели существует стационарное одномерное решение системы (1.1).

Оно описывается формулами (1.2)

$$w = w_*(1 - cx^{-1}), \quad p = p_*(1 + \gamma c x^{-1}) \qquad \left(c = \left(\frac{2(\gamma-1)q}{(\gamma+1)w_*^2}\right)^{1/2} = \frac{M^2 - 1}{\gamma M^2 + 1}\right)$$

$$\rho = \rho_*(1 - cx^{-1})^{-1}, \qquad \beta = x^{-2}$$

Здесь w — скорость потока, M — число Маха в области $z < 0$. Индексом $*$ обозначены значения величин в точке Жуге. Функция $x = x(z)$ определена соотношением (1.3)

$$\int\limits_{1/x}^{1} \frac{y^{1-2m}(1-cy)}{(1+\gamma cy)^{m-1}} \exp \frac{a}{(1+\gamma\, cy)\, 1-cy)}\, dy = \sigma z \qquad \left(a = \frac{A\rho_*}{\mu p_*},\ \sigma = \frac{p_*{}^{m-1} L}{2w_*}\right)$$

Очевидно, что $x(0) = 1$, $x(z) \to \infty$ при $z \to \infty$.

Решение (1.2) всюду в области $z > 0$ описывает дозвуковое течение. При этом условие Жуге выполняется асимптотически при $z \to \infty$.

В работе исследуется устойчивость основного решения (1.2) системы (1.1) по отношению к малым возмущениям.

В дальнейшем полагаем, что газ течет в круглой цилиндрической трубе радиуса r_0. Течение рассматривается в цилиндрической системе координат с осью z на оси трубы. Обозначим через $\varepsilon u'$, $\varepsilon v'$, $\varepsilon w'$, $\varepsilon p'$, $\varepsilon \rho'$, $\varepsilon \beta'$ малые возмущения радиальной, тангенциальной и аксиальной компоненты вектора скорости, давления, плотности и концентрации, сосредоточенные в дозвуковой области $z > 0$ (ε — малый параметр).

Подставляя в уравнения (1.1) возмущенные значения величин и ограничиваясь малыми порядка ε, получаем следующую линейную систему:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w' + w\rho') + \frac{\rho}{r}\left[\frac{\partial (ru')}{\partial r} + \frac{\partial v'}{\partial \varphi}\right] = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + w\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial v'}{\partial t} + w\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(ww') + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\rho^2}\frac{dp}{dz}\rho' = 0$$

$$q(\gamma-1)\rho\left(\frac{\partial \beta'}{\partial t} + w\frac{\partial \beta'}{\partial z}\right) + q(\gamma-1)w\frac{d\beta}{dz}\rho' + \frac{\partial p'}{\partial t} +$$

$$+ w\frac{\partial p'}{\partial z} + \gamma\frac{dw}{dz}p' - \frac{\gamma p}{\rho}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w\frac{\partial \rho'}{\partial z} + \frac{dw}{dz}\rho'\right) = 0$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial t} + w\frac{\partial \beta'}{\partial z} + \frac{d\beta}{dz}w' - w\frac{d\beta}{dz}\left[\frac{m}{\beta}\beta' + \frac{m-1}{p}p' - \frac{A}{\mu p}\left(\rho' - \frac{\rho}{p}p'\right)\right] = 0$$

Решение системы (1.4) должно удовлетворять следующим условиям:

(1) обтекания $u' = 0$ при $r = r_0$,
(2) регулярности при $r \to 0$,
(3) периодичности по φ,
(4) ограниченности u', v', w', p', ρ' и исчезновения β' при $z \to \infty$,
(5) сохранения массы, импульса, энергии и концентрации при переходе через разрыв.

Пусть уравнение возмущенной поверхности разрыва имеет вид $z_0 = \varepsilon f(r, \varphi, t)$. Преобразуем последнее из условий (5)

$$\beta_1 = 1 = \beta_2 = (\beta + \varepsilon\beta')_{z=z_0} = (\beta + \varepsilon\beta')_{z=0} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\beta + \varepsilon\beta')_{z=0}\right] z_0 =$$

$$= 1 + \varepsilon\left(\beta' + f\frac{d\beta}{dz}\right)_{z=0} + O(\varepsilon^2)$$

то с точностью до малых порядка ε эквивалентно следующему условию:

$$\beta' + f\frac{d\beta}{dz} = 0 \qquad \text{при } z = 0$$

Совершая аналогичные преобразования над остальными соотношениями на разрыве, приходим к следующим условиям:

$$
\begin{gathered}
w\rho' + \rho w' = (\rho - \rho_0) f_t, \qquad u' = (w_0 - w) f_r \\
v' = \frac{1}{r}(w_0 - w) f_\varphi, \quad p' + w^2\rho' + 2\rho w w' = 0 \qquad \text{при } z = 0 \qquad (1.5) \\
[(\gamma - 1)\rho - (\gamma + 1)\rho_0] p' + [(\gamma - 1) p + \\
+ (\gamma + 1) p_0] [\rho' + 2(\gamma - 1) q\rho^2\beta'] = 0
\end{gathered}
$$

Здесь индексом 0 обозначены параметры невозмущенного потока в области $z < 0$. Для полного исследования устойчивости по линейному приближению следует, помимо условий (1.5), играющих роль краевых, задать произвольные начальные условия и исследовать поведение решения полученной смешанной задачи для системы (1.4) при $t \to \infty$. Однако решение задачи в такой постановке сталкивается с большими затруднениями.

Предположим, что малые возмущения течения представляют суперпозицию цилиндрических гармоник и будем изучать поведение отдельной гармоники. В этом случае уравнение возмущенной поверхности разрыва имеет вид

$$
z_0 = \varepsilon r_0 \exp(\lambda r_0^{-1} w_* t + in\varphi) J_n(\xi_{nk} r r_0^{-1}) \equiv \varepsilon r_0 F(r, \varphi, t)
$$

где λ — комплексный параметр, n — натуральное число, ξ_{nk} — k-й корень уравнения $dJ_n(\xi) / d\xi = 0$. Решение системы (1.4) ищем в аналогичном виде

$$
w' = w_* F(r, \varphi, t) [\sqrt{x}\, y_1(x) + y_2(x)], \qquad p' = -p_* F(r, \varphi, t) \sqrt{x} y_1(x)
$$

$$
u' = w_* F(r, \varphi, t)\, r_0 \xi_{nk}^{-1} \frac{d}{dr} \ln J_n(\xi_{nk} r r_0^{-1})\, y_3(x)
$$

$$
\rho' = \rho_* F(r, \varphi, t) \left[-\frac{x - c}{x + \gamma c} \sqrt{x} y_1(x) + \frac{x}{x + \gamma c} y_4(x) \right] \left(\frac{x}{x - c} \right)^2
$$

$$
\beta' = F(r, \varphi, t)\, x^{-1} y_5(x), \qquad v' = i w_* F(r, \varphi, t)\, r_0 \xi_{nk}^{-1} n r^{-1} y_6(x)
$$

где функция $x = x(z)$ определена соотношением (1.3). При этом условия (1) — (3) выполняются автоматически. Из (1.4), (1.5) следует, что функция $\psi(z) = y_3 - y_6$ удовлетворяет уравнению

$$
[1 - cx(z)]\psi' + \lambda\psi = 0
$$

и условию $\psi = 0$ при $z = 0$, следовательно, $\psi(z) \equiv 0$.

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_5(x)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{dy_1}{dx} = \left\{ \left[\frac{2(x + \gamma c)}{c(\gamma + 1) x} - \frac{1}{x} \right] \lambda x^{2m-2} h(x) + \frac{1}{2x} - \frac{c^2(\gamma + 1)}{x(x + \gamma c)(x - c)} - \right. \\
\left. - \frac{\gamma c(m - 1)}{x(x + \gamma c)} - \frac{c(\gamma - 1) a x}{(x + \gamma c)^2 (x - c)} \right\} y_1 + \left[\frac{x + \gamma c}{c(\gamma + 1) x} \lambda x^{2m - 5/2} h(x) + \right. \\
\left. + \frac{2}{(\gamma + 1) x \sqrt{x}} - \frac{c}{x\sqrt{x}(x - c)} \right] y_2 + \frac{(x + \gamma c)(x - c)}{c(\gamma + 1) x^2} \xi_{nk} x^{2m - 5/2} h(x)\, y_3 + \\
+ \left[\frac{1}{(\gamma + 1)\sqrt{x}(x + \gamma c)} - \frac{c a x \sqrt{x}}{(x + \gamma c)^2 (x - c)^2} \right] y_4 + \frac{mc}{x\sqrt{x}} y_5
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{dy_2}{dx} = \left[-\lambda x^{2m - 5/2} h(x) + \frac{c^2(\gamma + 1)}{\sqrt{x}(x + \gamma c)(x - c)} \right] y_1 + \\
+ \left[-\lambda x^{2m-3} h(x) + \frac{c}{x(x - c)} \right] y_2 + \frac{c}{(x + \gamma c)(x - c)} y_4
\end{gathered}
$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \frac{x-c}{x}\xi_{nk}x^{2m-5/2}y_1 - \lambda x^{2m-3}h(x)\,y_3 \tag{1.6}$$

$$\frac{dy_4}{dx} = \left[-\frac{c^2(\gamma+1)^2}{x\sqrt{x}(x+\gamma c)} + \frac{c^2(\gamma+1)}{x\sqrt{x}(x-c)} + \frac{c^2(\gamma+1)\gamma(m-1)}{x\sqrt{x}(x+\gamma c)} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2(\gamma+1)(\gamma-1)a\sqrt{x}}{(x+\gamma c)^2(x-c)}\right]y_1 + \left[-\frac{2c}{x^2} + \frac{c^2(\gamma+1)}{x^2(x-c)}\right]y_2 +$$

$$+\left[-\lambda x^{2m-3}h(x) - \frac{c(\gamma+1)}{x(x+\gamma c)} + \frac{c^2(\gamma+1)ax}{(x+\gamma c)^2(x-c)^2}\right]y_4 - \frac{mc^2(\gamma+1)}{x^2}y_5$$

$$\frac{dy_5}{dx} = \left[\frac{2}{\sqrt{x}(x-c)} + \frac{2\gamma(m-1)}{\sqrt{x}(x+\gamma c)} + \frac{2(\gamma-1)ax\sqrt{x}}{(x+\gamma c)^2(x-c)}\right]y_1 +$$

$$+\frac{2}{x(x-c)}y_2 + \frac{2ax^2}{(x+\gamma c)^2(x-c)^2}y_4 + \left[-\lambda x^{2m-3}h(x) - \frac{2m-1}{x}\right]y_5$$

Здесь

$$h(x) = \frac{1}{\sigma r_0}\left(\frac{x}{x+\gamma c}\right)^{m-1}\exp\left[\frac{ax^2}{(x+\gamma c)(x-c)}\right]$$

Условия (4), (5) порождают для $y_1(x), \ldots, y_5(x)$ условия:

$$y_1 = \frac{4}{\gamma+1}\lambda h(1) - \frac{c}{1-c}$$

$$y_2 = -\frac{2c}{1+c}\lambda h(1), \qquad y_3 = 2c\xi_{nk}h(1) \qquad \text{при } x=1 \tag{1.7}$$

$$y_4 = \frac{4(\gamma-1)c^2}{1+c}\lambda h(1) + \frac{c^2(\gamma+1)}{1-c}, \qquad y_5 = \frac{2}{1-c}$$

$$\sqrt{x}y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ y_4(x) \text{ — ограничены;} \quad \frac{1}{x}y_5(x) \to 0 \quad \text{при } x\to\infty \tag{1.8}$$

Задача свелась к определению функций $y_1(x), \ldots, y_5(x)$, удовлетворяющих в интервале $(1, \infty)$ системе уравнений (1.6) и условиям (1.7), (1.8) на концах этого интервала.

Эти требования, вообще говоря, не могут выполняться при произвольном значении параметра λ. Значение λ, при котором задача разрешима, назовем собственным числом. Наличие среди множества собственных чисел хотя бы одного с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ означает неустойчивость решения (1.2) системы (1.1). Из вещественности коэффициентов системы (1.6) и данных Коши (1.7) при вещественных λ следует, что множество собственных чисел симметрично относительно оси $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

§ 2. Исследование асимптотического поведения решений системы (1.6) при $x \to \infty$. При изучении поведения решений системы (1.6) при $x \to \infty$ рассмотрим сначала случай $\lambda \in G_\alpha$, где G_α — область комплексной плоскости λ, определенная неравенствами $|\lambda| \geqslant \alpha$, $|\lambda - \xi_{nk}| \geqslant \alpha$, $|\lambda + \xi_{nk}| \geqslant \alpha$ (α — произвольное положительное число). Метод исследования основывается на работе [6]. В этом параграфе будем считать, что $m = 1$. Будем говорить, что функция $f(x, \lambda)$ вещественного переменного x и комплексного переменного λ, определенная при $x \geqslant x_0$ и $\lambda \in G$, где G — некоторая замкнутая область плоскости λ, удовлетворяет условию $A(G, x_0)$, если при любом $\lambda \in G$ функция $f(x, \lambda)$ раскладывается в ряд по степеням x^{-1} при $x \geqslant x_0$; при любом $x \geqslant x_0$ функция $f(x, \lambda)$ аналитична по λ внутри области G и непрерывна на ее границе.

Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{y}(x)$ с элементами $y_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, и произведем в системе (1.6) линейную подстановку

$$\mathbf{y} = M\mathbf{u} \tag{2.1}$$

Ненулевые элементы матрицы M даются формулами

$$m_{11} = m_{22} = m_{44} = m_{55} = 1 \tag{2.2}$$

$$m_{12} = -\frac{1-\mu^2(1-cx^{-1})^2}{\sqrt{x}\,[1-\gamma cx^{-1}+v(x,\lambda)]}, \qquad m_{21} = -\frac{c(\gamma+1)(1+\gamma cx^{-1})}{\sqrt{x}\,[1+\gamma cx^{-1}+v(x,\lambda)]}$$

$$m_{31} = \frac{c(\gamma+1)\mu(1-cx^{-1})(1+\gamma cx^{-1})}{\sqrt{x}\,[1+\gamma cx^{-1}-v(x,\lambda)]}, \qquad m_{23} = -\frac{\mu(1-cx^{-1})}{1-\mu^2(1-cx^{-1})^2}$$

$$m_{32} = -\mu(1-cx^{-1}), \qquad m_{33} = \frac{1}{1-\mu^2(1-cx^{-1})^2} \qquad \left(\mu = \frac{\xi_{nk}}{\lambda}\right)$$

$$v(x,\lambda) = \sqrt{(1+\gamma cx^{-1})^2 - x^{-1}c(\gamma+1)(1+\gamma cx^{-1})[1-\mu^2(1-cx^{-1})^2]}$$

Для любого $\alpha > 0$ существует такое $x_0(\alpha)$, что функции $m_{ik}(x,\lambda)$ $(i, k = 1, \ldots, 5)$ удовлетворяют условию $A\ (G_\alpha, x_0)$.

Вычисления показывают, что вектор $\mathbf{u}(x)$ есть решение уравнения

$$d\mathbf{u}/dx = (w+R)\,\mathbf{u} \tag{2.3}$$

в котором матрица w диагональна, а элементы матрицы R

$$r_{ik}(x,\lambda) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\,r_{ik}^{(1)}(x,\lambda) + \frac{1}{x^2}\,r_{ik}^{(2)}(x,\lambda) \qquad (i, k = 1, \ldots, 5) \tag{2.4}$$

где функции $r_{ik}^{(1)}(x,\lambda)$, $r_{ik}^{(2)}(x,\lambda)$ $(i, k = 1, \ldots, 5)$ удовлетворяют условию $A\ (G_\alpha, x_0)$. Элементы w_j $(j = 1, \ldots, 5)$ допускают представление

$$w_1 = \frac{2\lambda}{c(\gamma+1)}\,h(x)\,[1 + x^{-1}\varphi_1(x,\lambda)] + \frac{1}{2x}, \qquad w_3 = w_4 = -\frac{\lambda}{x}\,h(x)$$

$$w_2 = -\frac{\lambda}{2x}\,h(x)\,[1+\mu^2+x^{-1}\varphi_2(x,\lambda)], \qquad w_5 = -\frac{\lambda}{x}\,h(x) - \frac{1}{x} \tag{2.5}$$

при этом функции $\varphi_{1,2}(x,\lambda)$ удовлетворяют условию $A\ (G_\alpha, x_0)$ и $\operatorname{Im}\varphi_{1,2}(x,\lambda) = 0$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Положим $\alpha_{ij} = \operatorname{Re}(w_i - w_j)$ $(i, j = 1, \ldots, 5)$. Пусть ε — произвольное положительное число и область $G_1^{(1)}$ определена соотношениями $\lambda \in G_\alpha$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $|\lambda| \geqslant (1+\varepsilon)\,\xi_{nk}$. Если x_0 достаточно велико, то функции $\alpha_{ij}(x,\lambda)$ $(i, j = 1, \ldots, 5)$ при $x \geqslant x_0$, $\lambda \in G_1^{(1)}$ не меняют знака. Зафиксируем значение индекса j $(j = 1, \ldots, 5)$ и положим в системе (2.3)

$$u_i = \eta_{ij} \exp \int_{x_0}^{x} w_j\,dx \qquad (i = 1, \ldots, 5) \tag{2.6}$$

Система дифференциальных уравнений для функции $\eta_{ij}(x,\lambda)$

$$\frac{d\eta_{ij}}{dx} = [w_i(x,\lambda) - w_j(x,\lambda)]\,\eta_{ij} + \sum_{k=1}^{5}{}' \, r_{ik}(x,\lambda)\,\eta_{kj} \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

сводится к следующей системе интегральных уравнений:

$$\eta_{jj}(x,\lambda) = 1 - \int_x^\infty \sum_{k=1}^{5} r_{jk}(t,\lambda)\,\eta_{kj}(t,\lambda)\,dt$$

$$\text{если } \alpha_{ij}(x,\lambda) \geqslant 0, \quad \text{когда } \lambda \in G_1^{(1)}, \quad x \geqslant x_0 \quad \text{и} \quad i \neq j$$

$$\eta_{ij}(x,\lambda) = -\int_x^\infty \exp\int_x^t [w_j(t,\lambda) - w_i(t,\lambda)]\,dt \sum_{k=1}^{5} r_{ik}(t,\lambda)\,\eta_{kj}(t\lambda)\,dt$$

$$\text{если } \alpha_{ij}(x,\lambda) \leqslant 0, \quad \text{когда } \lambda \in G_1^{(1)}, \quad x \geqslant x_0 \quad \text{и} \quad i \neq j$$

$$\eta_{ij}(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x} \exp\int_t^x [w_i(t,\lambda) - w_j(t,\lambda)]\,dt \sum_{k=1}^{5} r_{ik}(t,\lambda)\,\eta_{kj}(t,\lambda)\,dt \tag{2.7}$$

Систему (2.7) решаем методом последовательных приближений. Определим область G_1 формулами $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $|\lambda| \geqslant \nu_0$, $\lambda \in G_\alpha$. Если

$$\nu_0 > \frac{\sqrt{1+4s^2\xi_{nk}^2}-1}{2s},$$

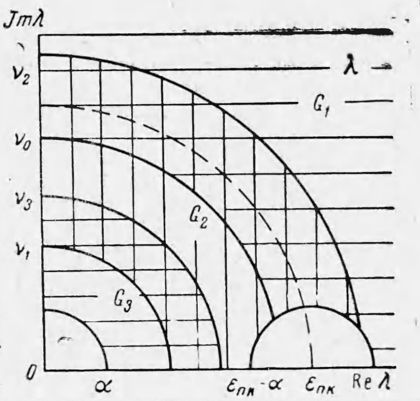
где $s = h(\infty)$ и x_0 достаточно велико, то процесс последовательных приближений сходится при любом $\lambda \in G_1$. Отметим свойства решений системы (2.7).

При любом $x \geqslant x_0$ функции $\eta_{ij}(x, \lambda)$ $(i, j = 1, \ldots, 5)$ аналитичны по λ внутри области G_1.

При $x \geqslant x_0$, $\lambda \in G_1$ и $s \in (0, \infty)$ функции $\eta_{ij}(x, \lambda)$ $(i, j = 1, \ldots, 5)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\eta_{ij}(x, \lambda) - \delta_{ij}| \leqslant \varkappa x_0^{-1/2} \qquad (2.8)$$

$$(i, j = 1, \ldots, 5) \quad (\varkappa = \mathrm{const})$$



Фиг. 1

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Введем в рассмотрение векторы $\boldsymbol{\eta}_1 = \{\eta_{1j}\}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_5 = \{\eta_{5j}\}$ и перейдем по формуле (2.6) к решению системы (2.3). Придавая индексу j значения 2, 3, 4, 5, заключаем, что при $\lambda \in G_1$ существует четыре линейно независимых решения системы (2.3)

$$\mathbf{u}_j(x, \lambda) = \boldsymbol{\eta}_j(x, \lambda) \exp \int\limits_{x_0}^{x} w_j(t, \lambda)\, dt, \qquad (2.9)$$

удовлетворяющих условию (1.8); решения $\mathbf{u}_1(x, \lambda)$ при $\lambda \in G_1$ не удовлетворяют этому условию. Аналогично строятся асимптотические представления решений системы (2.3) типа (2.9), справедливые:

в области G_2 $(\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0, \lambda \in G_\alpha)$

$$\frac{\sqrt{9+4s^2\xi_{nk}^2}-3}{2s} < \nu_1 \leqslant |\lambda| \leqslant \nu_2 < \frac{\sqrt{1+4s^2\xi_{nk}^2}+1}{2s}$$

в области G_3 $(\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0, \lambda \in G_\alpha)$

$$|\lambda| \leqslant \nu_3 < \frac{\sqrt{1+4s^2\xi_{nk}^2}-1}{2s}$$

Подобные рассмотрения применимы и в случае, когда $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\lambda \in G_\alpha$. Значение $\alpha > 0$ может быть взято сколь угодно малым, поэтому исследование поведения решений системы (1.6) при $x \to \infty$ в случае $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \pm\xi_{nk}$ завершено. Значительно труднее построить формулы, дающие асимптотическое представление решений системы (1.6) при $|\lambda| \leqslant \alpha$ и $x > X$ или при $|\lambda + \xi_{nk}| \leqslant \alpha$ и $x \geqslant X$, где X не зависит от λ. Однако выяснить поведение решений системы (1.6) при $x \to \infty$ в точках $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\xi_{nk}$ гораздо проще.

Если решение $\mathbf{u}(x, \lambda)$ системы (2.3) удовлетворяет условию (1.8), то и решение $\mathbf{y}(x, \lambda) = M(x, \lambda)\, \mathbf{u}(x, \lambda)$ системы (1.6) удовлетворяет этому условию. Общий результат сформулируем в следующем виде:

при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -s^{-1}$ система (1.6) имеет одно решение, удовлетворяющее условию (1.8);

при $-s^{-1} < \operatorname{Re}\lambda < 0$ система (1.6) имеет два линейно независимых решения, удовлетворяющих условию (1.8);

при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ система (1.6) имеет четыре линейно независимых решения, удовлетворяющих условию (1.8).

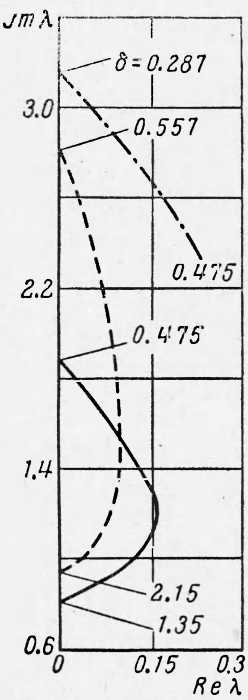
Замечание 1. Подстановка (2.1) при произвольном $m \geqslant 1$ приводит систему (1.6) в области G_α к виду, в котором все коэффициенты системы, за исключением лежащих на главной диагонали, интегрируемы в интервале (x_0, ∞). Это позволяет исследовать поведение решений системы (1.6) при $x \to \infty$ в общем случае $m \geqslant 1$. Оказывается, что при $m > 1$ и $\operatorname{Re} \lambda < 0$ существует одно решение системы (1.6), удовлетворяющее условию (1.8); при $m > 1$ и $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$ существует четыре линейно независимых решения системы (1.6), удовлетворяющих условию (1.8).

Замечание 2. Для исследования поведения решений системы (1.6) при $x \to \infty$, когда параметр λ изменяется в областях H_α и D_α, определенных соответственно неравенствами

$$|\lambda - \xi_{nk}| \leqslant \alpha < \min\left(\frac{\sqrt{1 + 4s^2\xi_{nk}^2} + 2s\xi_{nk} - 1}{2s}, \frac{\sqrt{1 + 4s^2\xi_{nk}^2} + 1 - 2s\xi_{nk}}{2s}\right)$$

$$|\lambda| \leqslant \alpha < \frac{\sqrt{1 + 4s^2\xi_{nk}^2} - 1}{2s}, \qquad |\arg \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

в областях H_α°, D_α°, симметричных H_α, D_α относительно мнимой оси, применяется так называемый метод эталонного уравнения. Он состоит в построении системы дифференциальных уравнений, в известном смысле близкой при больших значениях x к заданной системе, и в дальнейшем сравнении этих систем. Ввиду громоздкости полученных асимптотических представлений здесь их не приводим.



Фиг 2.

Замечание 3. Отметим следующее свойство множества собственных чисел: при фиксированных n, k все собственные числа сосредоточены в конечном круге плоскости λ. Доказательство этого факта опускается.

§ 3. **Численное решение задачи на собственные значения.** Характер краевой задачи (1.6) — (1.8) существенно различен в случаях $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$ и $\operatorname{Re} \lambda < 0$. В последнем случае задача на собственные значения, вообще говоря, не имеет решения, так как при $\operatorname{Re} \lambda < 0$ условия (1.7), (1.8) для системы пятого порядка (1.6) эквивалентны, в общем случае, восьми однородным краевым условиям.

Задача об отыскании собственных чисел с неотрицательной вещественной частью сводится к решению уравнения

$$F(\lambda) = \operatorname{Det} \| Y(\lambda) \| = 0 \tag{3.1}$$

Здесь первый столбец матрицы $Y(\lambda)$ представляет значение при $x = x_0$, $1 \leqslant x_0 < \infty$ вектор-решения задачи Коши (1.7) для системы (1.6), а последние четыре столбца матрицы $Y(\lambda)$ суть значения при $x = x_0$ четырех линейно независимых вектор-решений системы (1.6), удовлетворяющих (1.8).

В дальнейшем полагаем, что m, c, γ, a фиксированы. Непосредственно из уравнений (1.6), (3.1) следует, что зависимость собственного числа λ от параметров ξ_{nk}, s такова

$$\lambda = \xi_{nk}\varphi(s\xi_{nk}) \tag{3.2}$$

где φ — некоторая комплекснозначная функция. Введем, согласно [5], понятие эффективной ширины зоны химической реакции d и обозначим $\delta = dr_0^{-1}$. Параметр δ имеет простой геометрический смысл и, как увидим, играет важную роль в вопросе об устойчивости детонации. Имеет место соотношение

$$\delta = \frac{(1 - c)^3 (1 + \gamma c)^2}{ac(2\gamma c - \gamma + 1)} \exp\left[a(1 + \gamma c)^{-1} (1 - c)^{-1} - a\right] s \tag{3.3}$$

Из формулы (3.2) получим вид зависимости величины λ от ξ_{nk}, δ

$$\lambda = \xi_{nk} f(\delta\xi_{nk}) \tag{3.4}$$

где f — некоторая комплекснозначная (многозначная) функция.

Ниже приводятся результаты численного решения задачи на электронной вычислительной машине ВЦ СО АН СССР. Расчет проводился при следующих значениях параметров: $m = 1$, $\gamma = 1.2$, $c = 0.7925$, $a = 8$ и переменной δ. Зафиксировав значение $k = 1$, обозначим $\lambda_n = \xi_{n1} f(\delta\xi_{n1})$ и положим $n = 1$. В соответствии с результатами предыдущего параграфа, при $0 < \delta \leqslant 2.5$ и $\lambda \in D_0$, где область D_0 определена соотношениями $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$, $|\lambda| \geqslant 0.02$, $|\lambda - \xi_{11}| \geqslant 0.02$, четыре линейно независимых решения уравнения (2.3), удовлетворяющих условию (1.8), даются формулами (2.9), причем функции $\eta_{ij}(x, \lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, $2 \leqslant j \leqslant 5$, аналитичны по λ внутри области D_0 и непрерывны на ее границе, если x достаточно велико. Отсюда следует аналитичность функции $F(\lambda)$ внутри области D_0 при любом δ из интервала $(0,2\,{}^1/_2)$. Для того чтобы вычислить значение функции $F(\lambda)$ в точке $\lambda \in D_0$, следует знать решение задачи Коши (1.7) для системы (1.6) при $x = x_0$ и решения $\eta_j(x_0, \lambda)$, $2 \leqslant j \leqslant 5$, системы интегральных уравнений (2.7) при $x = x_0$. Ввиду сложности интегральных уравнений (2.7), при их решении ограничивались членами третьего приближения, что давало ошибку в определении функций $\eta_{ij}(x_0, \lambda)$ порядка x_0^{-2}. Численное интегрирование системы (1.6) на интервале $(1, x_0)$ производилось по методу Адамса пятого порядка с автоматическим выбором шага.

Величина x_0 выбирается из следующих соображений. Зафиксируем x_0 и, численно решив уравнение (3.1), найдем приближенное значение собственного числа λ_{x_0}. Возьмем теперь в качестве конечной точки интегрирования $2x_0$ и повторим указанную процедуру. Если полученное при этом значение λ_{2x_0} отличается от λ_{x_0} в пределах требуемой точности, будем считать, что выбранное значение x_0 нас удовлетворяет. Если λ определяется с точностью до 10^{-3}, в качестве x_0 можно взять $x_0 = 500$. Определив значения функции $F(\lambda)$ в точках замкнутого контура L, лежащего в области D_0, путем контурного интегрирования можно вычислить количество и координаты нулей функции $F(\lambda)$, расположенных внутри L.

При отыскании собственных чисел, расположенных в областях $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, $|\lambda| \leqslant 0.02$ и $|\lambda - \xi_{11}| \leqslant 0.02$, формулы для определения функций $y_{ik}(x_0, \lambda)$ в левой части уравнения (3.1) необходимо надлежащим образом изменить.

Выше было отмечено, что большой интерес представляет исследование зависимости λ от δ. Ввиду того что непосредственное решение уравнения (3.1) при каждом значении δ связано с большим объемом вычислений, для численного нахождения указанной зависимости использовался следующий прием. По известным значениям $\operatorname{Re}\lambda(\delta)$, и $\operatorname{Im}\lambda(\delta)$ в точках $\delta_k = \delta_0 + k\Delta\delta$, $k = 0, 1, 2$, при помощи квадратичной экстраполяции «предсказывалось» значение $\lambda = \lambda^*$ при $\delta = \delta_3$. Предсказанное значение λ^* уточнялось по формуле $\lambda^{**} = \lambda^* - F(\lambda^*) / F'(\lambda^*)$. Для численного нахождения значения $F'(\lambda^*)$ вычислялись значения функции $F(\lambda)$ в вершинах квадрата со стороной $\Delta\lambda$ и центром в точке λ^*. Оказалось, что для определения λ с точностью до 10^{-3} при расчетных значениях параметров и $\delta = 0.475$ можно выбрать $\Delta\delta = \Delta\lambda = 0.02$. С увеличением δ величины $\Delta\delta$, $\Delta\lambda$ увеличиваются.

Расчеты, проведенные по описанной схеме, дали следующие результаты.

При $\delta = 0.475$ существует собственное число с $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, $\operatorname{Im}\lambda_1 = 1.887$. С увеличением δ значение $\operatorname{Im}\lambda_1$ монотонно уменьшается, а значение $\operatorname{Re}\lambda_1$ сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться и, наконец, при $\delta = 1.35$ становится равным нулю. Зависимость величины λ от δ изображена на фиг. 2 сплошной линией.

При $\delta = 0.557$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ появляется другое собственное число, которое исчезает уже при $\delta = 2.15$. На фиг. 2 этому собственному числу отвечает пунктирная линия.

Расчеты показывают, что при $\delta < 0.475$ собственных чисел с $\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant 0$ нет. Но если перейти от $n = 1$ к $n = 2$, то получим $\lambda_2 = \xi_{21} f\,(\delta\xi_{11}\,\xi_{21}\xi_{11}^{-1})$ и при $\delta = 0.475$ значение $\operatorname{Re} f = 0.069 > 0$. При дальнейшем уменьшении δ величина $\operatorname{Re}\lambda_2$ монотонно убывает и при $\delta = 0.287$ обращается в нуль. На фиг. 2 эта зависимость изображена штрих-пунктирной линией. При $\delta = 0.287$ наступает переход от $n = 2$ к $n = 3$. С дальнейшим уменьшением описанный процесс можно продолжить неограниченно.

В заключение автор благодарит Л. В. Овсянникова, под руководством которого выполнялась эта работа.

Поступила 28 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Войцеховский Б. В. Детонационный спин и стационарная детонация. Ученый совет по народнохозяйственному использованию взрыва. 1960, вып. 10.
2. Щелкин К. И. Два случая неустойчивого горения. Ж. эксперим. и теор. физ., 1959, т. 36, вып. 2.
3. Зайдель Р. М. Об устойчивости детонации в газовых смесях. Докл. АН СССР, 1961, т. 136, вып. 5.
4. Jerome J. Erpenbeck. Stability of Steady-State Equilibrium Detonations. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No 5.
5. Зельдович Я. Б. и Компанеец А. С. Теория детонации. Гостехтеоретиздат, 1955.
6. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. АН УССР, 1954.