ПМТФ, № 4, 1969

МЕТОД ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ТЕОРИИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

В. М. Волощук

(Обнинск)

Здесь рассматривается броуновское движение частиц в газообразной среде, осложненное влиянием сил инерции. Уравнение для функции распределения в фазовом пространстве, описывающее такого типа движение, получено в [1]. Там же приводятся решения этого уравнения для некоторых простых частных случаев. Приближенные уравнения движения аэрозольных частиц в координатном пространстве впервые были получены в [2] и решены для некоторых конкретных задач в [3,4]. Более точные уравнения движения в координатном пространстве, а также границы применимости уравнения [2] указаны в [5].

1. Уравнение Фоккера — Планка для функции распределения аэрозольных частиц, полученное в [1], имеет вид

$$k\frac{\partial f}{\partial t}+(k\nabla-\nabla_0\cdot\mathbf{v}')f+(\mathbf{u}+\mathbf{F}\cdot\nabla_0)f=\frac{1}{k\lambda}\nabla_0{}^2 f$$
$$(k=mu_\infty/bl,\quad \lambda=mu_\infty{}^2/kKT)\tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}'$ — скорость частиц в системе, $\mathbf{u}$ — скорость газообразной среды, $\mathbf{F}$ — безразмерная внешняя сила, действующая на частицы (отсчитывается в единицах bu_∞), ∇ и ∇_0 — операторы Гамильтона (соответственно координатный и скоростной), k и λ — соответственно числа Стокса и Пекле, m — масса частицы, b — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и относительной скоростью частицы в среде, u_∞ и l — характерные скорость и размер течения, K — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Предполагаем, что

$$b=\text{const},\qquad T=\text{const}$$

Пусть в некоторый момент в системе наступило локальное равновесие, описываемое функцией распределения

$$f_0=\left(\frac{k\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} n\exp\left(-\frac{1}{2}k\lambda\,|\mathbf{v}'-\mathbf{v}|^2\right)\qquad(t=t_0)\tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{n}(\mathbf{r},t)$ — средняя скорость и концентрация. Это возможно, например, в равномерном поступательном потоке, если t_0 существенно превышает время релаксации аэрозольных частиц. Если первые производные $\mathbf{v}$ малы, то решение уравнения (1.1) при начальном условии (1.2) можно приближенно представить в виде

$$f\approx f_0\qquad(t>t_0)\tag{1.3}$$

Действительно, непосредственная подстановка (1.2) в уравнение (1.1), показывает, что равенство (1.3) было бы точным, если бы правая часть (1.1) имела вид

$$\frac{1}{k\lambda}(\nabla_0{}^2+kD_{ij}\nabla_{0i}\nabla_{0j})f\qquad\left(2D_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\tag{1.4}$$

При помощи (1.3) из (1.1), получаем следующие уравнения для n и $\mathbf{v}$ [5]:

$$k\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right]\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{F}-\frac{1}{\lambda}\nabla\ln n \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div} n\mathbf{v}=0 \tag{1.6}$$

Таким образом, в среднем движение ансамбля броуновских аэрозольных частиц можно отождествить с движением некоторой сжимаемой сплошной среды; в дальнейшем эту абстрактную среду будем называть аэрозольной жидкостью.

Уравнение (1.6) можно преобразовать в уравнение конвективной диффузии Смолуховского

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div} n\mathbf{v}^*=\frac{1}{\lambda}\nabla^2 n \qquad \left(\mathbf{v}^*=\mathbf{v}+\frac{1}{\lambda}\nabla\ln n\right) \tag{1.7}$$

Вектор $\mathbf{v}^*$ естественно назвать конвективной скоростью аэрозольной жидкости. Из (1.5) имеем

$$k\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(\mathbf{v}^*-\frac{1}{\lambda}\nabla\ln n\cdot\nabla\right)\right]\left(\mathbf{v}^*-\frac{1}{\lambda}\nabla\ln n\right)+\mathbf{v}^*=\mathbf{u}+\mathbf{F} \tag{1.8}$$

2. Предположим, что в равномерном поступательном потоке находится некоторое тело-препятствие. Выберем u_∞ равной скорости невозмущенного течения, l — радиусу миделевого сечения тела. При осаждении аэрозольных частиц на тело в нормальных условиях наиболее эффективное взаимодействие между диффузионным и инерционным движениями следует ожидать, по-видимому, если размер частиц γ_0 имеет порядок 10^{-5} *см*. Пусть плотность вещества в частице приближенно равна 1 *г·см*$^{-3}$. Тогда

$$b\sim 10^{-8}\ г\cdot сек^{-1},\qquad k\sim 10^{-7}\,u_\infty/l,\qquad \lambda\sim 10^{6}\,u_\infty\, l \tag{2.1}$$

$$([u_\infty]=см/сек,\ \ [l]=см)$$

Естественно предположить, что $l \gtrsim 10^{-3}$ *см* и $u_\infty \lesssim 10^4$ *см / сек*. Таким образом, наиболее эффективное взаимодействие между диффузионным и инерционным движениями будет иметь место при

$$k\sim 1,\qquad \lambda\gg 1 \tag{2.2}$$

Из этих соотношений вытекает, что влияние инерции частиц на их броуновскую диффузию есть смысл изучать только для очень больших λ.

Исследование уравнений (1.7), (1.8) удобно проводить в ортогональных криволинейных координатах $0\xi\eta$ (для простоты ограничиваемся плоским случаем). Обозначаем поверхность тела-препятствия через Γ. Предполагаем, что поверхность Γ односвязная; в каждую ее точку можно провести только одну нормаль; эти нормали в некотором внешнем слое P, примыкающем к Γ, нигде не пересекаются; толщина слоя P нигде не равна нулю; на Γ существует одна передняя критическая точка течения (обозначаем ее буквой N). Тогда система координат $0\xi\eta$, оси 0ξ которой направлены по нормалям к Γ, а оси 0η — параллельно Γ, будет в P невырожденной. Из чисто геометрических соображений можно установить, что

$$d\mathbf{r}=\mathbf{e}_\xi d\xi+\mathbf{e}_\eta\frac{R+\xi}{R}d\eta$$

$$\nabla=\mathbf{e}_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\mathbf{e}_\eta\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\xi}{\partial\xi}=\frac{\partial\mathbf{e}_\eta}{\partial\xi}=0,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_\eta}{\partial\eta}=-\frac{1}{R}\mathbf{e}_\xi,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_\xi}{\partial\eta}=\frac{1}{R}\mathbf{e}_\eta$$

Здесь $\mathbf{e}_\xi$ и $\mathbf{e}_\eta$ — орты системы $0\xi\eta$, R — радиус Г. В системе $0\xi\eta$ уравнения (1.7), (1.8) принимают вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} n v_\xi^* + \frac{1}{R+\xi} n v_\xi^* + \frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta} n v_\eta^* =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\frac{R}{R+\xi}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{R+\xi}{R}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right\} n \tag{2.3}$$

$$k\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(v_\xi^* - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \ln n}{\partial \xi}\right) + \left(v_\xi^* - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi}\ln n\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v_\xi^* - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi}\ln n\right) + \right.$$
$$+ \frac{R}{R+\xi}\left(v_\eta^* - \frac{1}{\lambda}\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\ln n\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(v_\xi^* - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi}\ln n\right) -$$
$$\left. - \frac{1}{R+\xi}\left(v_\eta^* - \frac{1}{\lambda}\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\ln n\right)^2\right] + v_\xi^* = u_\xi + F_\xi \tag{2.4}$$

$$k\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(v_\eta^* - \frac{1}{\lambda}\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\ln n\right) + \left(v_\xi^* - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi}\ln n\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v_\eta^* - \frac{1}{\lambda}\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\ln n\right) + \right.$$
$$+ \frac{R}{R+\xi}\left(v_\eta^* - \frac{1}{\lambda}\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\ln n\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(v_\eta^* - \frac{1}{\lambda}\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\ln n\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{R+\xi}\left(v_\eta^* - \frac{1}{\lambda}\frac{R}{R+\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\ln n\right)\left(v_\xi^* - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \xi}\ln n\right)\right] + v_\eta^* = u_\eta + F_\eta \tag{2.5}$$

Постановка граничных условий для этих уравнений в общем случае нетривиальна, однако на этом здесь останавливаться не будем. Вполне естественно положить [2]

$$\mathbf{v}^* \to \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad n \to 1 \quad \text{при } \xi \to \infty \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} = a(n - n_0) \quad \text{при } \xi \to 0 \tag{2.7}$$

Здесь a и n_0 — некоторые постоянные, определяемые из тех или иных физических соображений. Наиболее простым для уравнений (2.3) — (2.5) является случай, когда $a \to \infty$, $n_0 \to 0$. Тогда граничное условие на Г принимает вид

$$n = 0 \quad \text{при } \xi \to 0 \tag{2.8}$$

Асимптотическое поведение $\mathbf{v}^*$ и n при больших λ существенно зависит от векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{F}$ в окрестности Г. При вязком обтекании в основном

$$u_\xi \approx u_1\xi^2, \qquad u_\eta \approx u_2\xi \qquad (\xi \to 0) \tag{2.9}$$

Если вектор $\mathbf{u}$ соленоидален, то можно ввести функцию тока течения ψ. В силу (2.9) функция тока в окрестности Г приближенно равна

$$\psi \approx \psi_0\xi^2, \qquad \psi_0 > 0 \qquad (\xi \to 0) \tag{2.10}$$

При потенциальном обтекании асимптотическое поведение $\mathbf{u}$ в окрестности Г не описывается формулами (2.9). Однако останавливаться на случае потенциального обтекания здесь нет необходимости. Учитывать диффузию аэрозольных частиц на тело есть смысл только для тех k, при которых отсутствует чисто инерционный поток частиц на это тело, т. е. для $k < k^*$, где k^* — критическое значение числа Стокса. Действительно, при $k > k^*$ поток аэрозольных частиц на тело, обусловленный их инерцией, очень быстро с возрастанием k увеличивается и начинает существенно превышать диффузионный поток. В [6] показано, что размер частиц при $k \sim k^*$ на два порядка меньше толщины гидродинамического пограничного слоя в окрестности точки N при сколько угодно больших значениях числа Рейнольдса течения. Поэтому при расчетах диффузии частиц нужно обязательно учитывать влияние гидродинамического пограничного слоя, использование модели чисто потенциального обтекания тела при $k \lesssim k^*$ лишено физического смысла.

Чтобы написать формулы типа (2.9) для вектора F, необходимо конкретизировать физическую природу силы взаимодействия частиц с телом. При электростатическом притяжении, например

$$F_\xi \approx \alpha(-a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2), \qquad F_\eta = 0 \qquad (\xi \to 0) \qquad (a_0 > 0, \alpha > 0) \tag{2.11}$$

Здесь α — некоторый параметр, характеризующий степень взаимодействия.

Гидродинамическим взаимодействием частиц с телом и конечностью размера частиц, приводящей к так называемому «эффекту зацепления», будем пренебрегать. Анализ влияния этих двух факторов на диффузию настолько сложен, что ему должно быть посвящено отдельное исследование.

3. Разобъем область течения условно на три части: Q_0 — область, прилегающую к донной части поверхности Γ и простирающуюся вниз по течению, Q_1 — тонкий слой, примыкающий к Γ в передней и боковых частях, и Q_2 — остальную часть течения. Градиенты концентрации n в Q_2 незначительны, поэтому при очень больших λ в уравнениях (2.3) — (2.5) диффузионными членами можно пренебречь. В результате получим

$$k\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + k(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \approx \mathbf{u} + \mathbf{F}, \qquad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} \approx 0 \tag{3.1}$$

В стационарном случае при $\mathbf{F} = 0$ поведение решений первого уравнения системы (3.1) подробно изучено в [6]. Приводим полученные в этой работе асимптотические формулы для $\xi \to 0$

$$\mathbf{v} = \text{const} \quad \text{при } k > k^* \tag{3.2}$$

$$v_\xi \approx \left(u_1 + \frac{k}{R}u_2^2\right)\xi^2, \quad v_\eta \approx u_2\xi \quad \text{при } k < k^* \tag{3.3}$$

Обозначим значение n в точке N через n_N. Чтобы определить n_N, необходимо решить задачу

$$k(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{u}, \qquad \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0 \qquad \mathbf{v} \to \mathbf{u}, \quad n \to 1 \quad \text{при } \xi \to \infty \tag{3.4}$$

Задача (3.4) может быть решена только численным способом. Определяя из (3.3) div $\mathbf{v}$ и подставляя полученный результат во второе уравнение системы (3.4), получим для $k < k^*$

$$n \approx n_N \exp\left(-2k\int_0^\eta u_2\frac{d\eta}{R}\right) \qquad (\xi \to 0) \tag{3.5}$$

Формулы (3.3) и (3.5) не зависят от граничного условия для $\mathbf{v}$ при $\xi \to \infty$. Это приводит к более жестким условиям их применимости по сравнению с условиями применимости формул (2.9).

Пусть соотношения (2.9) эффективны при $\xi \lesssim \xi_0$ и найдено точное решение уравнений (3.4) для $\xi = \xi_0$. Тогда при вычислении $\mathbf{v}$ и n в области $0 \leqslant \xi < \xi_0$ можно воспользоваться граничным условием

$$n = n^{(0)}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} \quad \text{при } \xi = \xi_0$$

Легко показать, что размер области влияния этих граничных условий пропорционален k. Область влияния при возрастании k увеличивается и при $k = k^*$ становится равной ξ_0. Следовательно, необходимое условие применимости формул (3.3) и (3.5) будет иметь вид

$$\xi \lesssim \xi_0(1 - k / k^*) \tag{3.6}$$

Формулы (3.3) и (3.5) являются асимптотическими разложениями по ξ главных членов внешнего решения уравнений (2.3) — (2.5) при $\mathbf{F} = 0$ и $k < k^*$.

4. Адаптация концентрации n к граничному значению на поверхности Г в общем случае возможна лишь тогда, когда в переходной зоне между областями Q_2 и Q_1 диффузионный перенос к Г сравним с конвективным, какое бы ни было большое λ. Естественно, что с возрастанием λ эта переходная зона будет находиться все ближе к поверхности Г, поэтому должно существовать такое λ^*, что при $\lambda < \lambda^*$ в условие сравнимости вместо $\mathbf{v}$ можно подставить главный член асимптотического разложения по ξ. Таким образом,

$$n\left(u_1 + \frac{k}{R}u_2^2\right)\xi^2 \sim \frac{1}{\lambda}\frac{\partial n}{\partial \xi} \qquad (k < k^*,\ \lambda \to \infty) \tag{4.1}$$

Условие (4.1) может выполняться только при очень резком изменении концентрации в направлении к Г. Предположим, что существует система координат $\{\zeta, \eta\}$, в которой n по направлению к Г будет меняться более или менее плавно, какое бы ни было большое λ

$$\partial n / \partial \zeta \sim 1 \qquad (\lambda \to \infty) \tag{4.2}$$

Предположим далее, что связь между ξ и ζ — линейная. Тогда из (4.1) находим

$$\zeta = \lambda^{1/3}\xi \tag{4.3}$$

Правильность этих предположений подтверждается непосредственным анализом полученных с их помощью решений уравнений (2.3) — (2.5).

Для сравнения заметим, что при $k > k^*$ аналогичные рассуждения приводят к формуле

$$\zeta = \lambda\xi \tag{4.4}$$

Используя соотношения (4.2), (4.3), из уравнений (2.3) — (2.5) находим в стационарном случае

$$v_\xi^* \approx \left(u_1 + \frac{k}{R}u_2^2\right)\zeta^2\lambda^{-2/3} \tag{4.5}$$

$$v_\eta^* \approx u_2\zeta\lambda^{-1/3} \tag{4.6}$$

$$\zeta^2\left(u_1 + \frac{k}{R}u_2^2\right)\frac{\partial n}{\partial \zeta} + \zeta u_2\frac{\partial n}{\partial \eta} + 2k\frac{u_2^2}{R}\zeta n \approx \frac{\partial^2 n}{\partial \zeta^2} \tag{4.7}$$

Согласно принципу асимптотического сращивания внешнего и внутреннего разложения [7] решения уравнений (4.5) — (4.7) должны стремиться при $\zeta \to \infty$ к решениям уравнений (3.4), записанным в новых переменных. Легко видеть, что решения (4.5), (4.6) автоматически сращиваются, а решение уравнения (4.7) будет сращиваться при условии

$$n \to n_N \exp\left(-2k\int_0^\eta u_2\frac{d\eta}{R}\right) \qquad (\zeta \to \infty) \tag{4.8}$$

Это соотношение и нужно выбрать в качестве граничного условия для уравнения (4.7). Замечательно, что при граничных условиях (2.8) и (4.8) решение уравнения (4.7) можно записать в замкнутой аналитической форме

$$n \approx n_N \exp\left(-4k\int_0^\eta \psi_0\frac{d\eta}{R}\right)\frac{\gamma\,(^1/_3,\ \zeta^3/\mu)}{\Gamma\,(^1/_3)}$$
$$\left(\mu = \frac{9}{2}\psi_0^{-3/2}\int_0^\eta d\eta'\psi_0^{1/2}\exp\left(6k\int_{\eta'}^\eta \psi_0\frac{d\eta}{R}\right)\right) \tag{4.9}$$

Здесь γ — неполная гамма-функция. Полученное решение является обобщением решений, найденных для некоторых конкретных тел в [3,8].

Формулы (4.5), (4.6) и (4.9) представляют собой главные члены внутреннего решения. Если следующие члены разложений по ξ имеют порядок ξ^3, ξ^2 и ξ (соответственно для v_ξ, v_η и n), то опущенные члены в (4.5), (4.6) и (4.9) имеют по λ порядок λ^{-1}, $\lambda^{-2/3}$ и $\lambda^{-1/3}$. Внешнее решение всегда представимо в виде рядов

$$\mathbf{v} \approx \sum_{i\geqslant 0} \mathbf{v}^{(i)}\lambda^{-i}, \qquad n \approx \sum_{i\geqslant 0} n^{(i)}\lambda^{-i} \qquad (\lambda\to\infty) \tag{4.10}$$

Предположим, что

$$\mathbf{v}^{(i)} \approx \sum_{m\geqslant 0} \mathbf{v}_m^{(i)}\xi^{m+1}, \qquad n^{(i)} \approx \sum_{m\geqslant 0} n_m^{(i)}\xi^m, \qquad v_{0\xi}^{(i)}=0 \qquad (\xi\to 0) \tag{4.11}$$

Тогда внутреннее решение записывается в виде

$$\mathbf{v}^* \approx \sum_{i\geqslant 0} \mathbf{v}_i\lambda^{-1/3-i/3}, \qquad n \approx \sum_{i\geqslant 0} n_i\lambda^{-i/3}, \qquad v_{0\xi}=0 \qquad (\lambda\to\infty) \tag{4.12}$$

Правильность (4.10) проверяется непосредственной подстановкой этих рядов в уравнения (2.3) — (2.5), записанных в переменных $\{\zeta,\eta\}$, и анализом построенных на основе (4.10) — (4.11) условий сращивания.

Формулы (4.5) — (4.8) сохраняют свой вид и для осесимметричных задач. В связи с переходом к функции тока формула (4.9) в осесимметричном случае несколько изменится. Обозначим через R_1 расстояние от оси симметрии точки на поверхности Γ с координатой η (здесь η — длина дуги контура, возникающего при пересечении поверхности Γ любой плоскостью, прходящей через ось симметрии). Тогда

$$n \approx n_N \exp\left\{-4k\int_0^\eta \psi_0 \frac{d\eta}{R_1}\right\} \frac{\gamma(1/3,\ \zeta^3/\mu)}{\Gamma(1/3)}$$

$$\left(\mu = \frac{9}{2}\,\psi_0^{-3/2}\int_0^\eta d\eta'\,\frac{R_1}{R}\,\psi_0^{1/2}\exp\left(6k\int_{\eta'}^\eta \psi_0\frac{d\eta}{RR_1}\right)\right) \tag{4.13}$$

5. Полученное внутреннее решение имеет физический смысл лишь в том случае, когда толщина слоя Q_1 значительно превышает размер аэрозольных частиц. Это условие определяет верхнюю границу по λ эффективности (4.9) и (4.13). Толщина слоя Q_1 имеет порядок

$$\delta \sim \mu^{1/3}\lambda^{-1/3} \tag{5.1}$$

Таким образом, (4.9) и (4.13) эффективны при

$$\lambda \lesssim l^3 / \gamma_0^3 \tag{5.2}$$

Для очень больших чисел Рейнольдса течения толщина гидродинамического пограничного слоя имеет порядок

$$\delta^* \sim \nu^{1/2} / u_\infty^{1/2} l^{1/2}$$

Естественно, что решения (4.5), (4.6), (4.9) и (4.13) применимы, если $\delta \lll \delta^*$, т. е. для частиц, размер которых удовлетворяет неравенству

$$\gamma_0 \ggg 10^{-10} u_\infty^{1/2} l^{1/2} / \nu^{1/2}\ \text{см} \tag{5.3}$$

Для частиц, размер которых этому условию не удовлетворяет, при больших числах Рейнольдса течения необходимо решать уравнение типа (4.7) с коэффициентами, более сложным образом зависящими от ζ.

Легко установить, что μ при возрастании η изменяется от некоторой конечной величины до ∞. Поэтому толщина Q_1 минимальна в окрестности N, с увеличением η возрастает и в донной части принимает неограниченно большие значения. Сопоставляя соотношения (3.6) и (5.1), приходим к выводу, что формулы (4.5), (4.6), (4.9) и (4.13) применимы лишь для тех η, при которых

$$\mu \lesssim \lambda\xi_0^3\,(1 - k / k^*)^3 \tag{5.4}$$

Очевидно, что в донной части течения условие (5.4) удовлетворяться не будет. В Q_0 конвективный перенос частиц также сравним с диффузионным, однако, в отличие от Q_1, в направлениях, поперечных к движению при $\xi\to\infty$. К сожалению, это условие не приводит к столь существенному упрощению уравнений, как в области Q_1.

Дифференцируя (4.9) по ζ, находим

$$j \approx \frac{n_N}{\Gamma(1+{}^1/_3)} \mu^{-{}^1/_3} \exp\left(-2k\int_0^\eta u_2 \frac{d\eta}{R}\right) \lambda^{-{}^2/_3} \tag{5.5}$$

Можно показать, что n_N с увеличением k всегда возрастает, причем существенно. Так, например, при стоксовом обтекании сферы [3] для $k / k^* \approx 0.164$ n_N равно 1.85 при $k/k^* \approx 0.328$ n_N становится уже равным 3.01, а при $k / k^* = 1$ n_N для любых тел равно ∞. Таким образом, множитель n_N в формуле (3.5) приводит к увеличению диффузионного потока частиц на тело при возрастании k. Центробежные силы, которые в (5.5) описываются экспоненциальными членами, уменьшают диффузионный поток на боковые части тела. Таким образом, инерция аэрозольных частиц приводит к значительной деформации формы диффузионного осадка на теле. Какие члены вносят основной вклад в интегральный поток частиц на тело в общем случае установить трудно (для сферы при стоксовом обтекании интегральный поток изменяется в $(1-0.480\ k)$ раз при малых k).

Интегрируя (5.5) по поверхности Г, находим, что

$$I = \frac{3^{{}^1/_3}}{2^{{}^2/_3}\Gamma(1+{}^1/_3)} n_N \left[\int_\Gamma d\Gamma\, \psi_0^{{}^1/_2} \exp\left(-6k\int_0^\eta \psi_0 \frac{d\eta}{R}\right)\right]^{{}^2/_3} \lambda^{-{}^2/_3} + O(\lambda^{-1}) \tag{5.6}$$

Здесь порядок опущенных членов поставлен для случая, когда возможно следующее разложение главных членов внешнего решения

$$v_\xi \approx v_{\xi 0}\xi^2 + v_{\xi 1}\xi^3, \quad v_\eta \approx v_{\eta 0}\xi + v_{\eta 1}\xi^2, \quad n \approx n_0 + n_1\xi \quad (\xi \to 0) \tag{5.7}$$

Для осесимметричных задач формула (5.6) принимает вид

$$I = \frac{3^{{}^1/_3}\pi^{{}^1/_3}}{2^{{}^1/_3}\Gamma(1+{}^1/_3)} n_N \left[\iint_\Gamma d\Gamma\, \psi_0^{{}^1/_2} \exp\left(-6k\int_0^\eta \psi_0 \frac{d\eta}{R_1}\right)\right]^{{}^2/_3} \lambda^{-{}^2/_3} + O(\lambda^{-1}) \tag{5.8}$$

Условие применимости формул (5.6) и (5.8)

$$k \lessapprox k^* (1 - \lambda^{-{}^1/_3}\xi_0^{-1}) \tag{5.9}$$

6. Посмотрим, как изменяются полученные выше результаты в случае, когда между частицами и телом действует сила притяжения, представима в окрестности Г в виде (2.11). Рассматриваем стационарную задачу. Главные члены внешнего разложения, определяемые из уравнений (3.1), в окрестности Г будут приближенно равны

$$v_\xi \approx -b_1, \quad v_\eta \approx b_2, \quad n \approx n_* \quad (\xi \to 0) \tag{6.1}$$

Здесь b_1, b_2 и n_* — функции η. Они могут быть легко определены численным путем. Тогда из условия сравнимости диффузионного потока с конвективным в переходной зоне между областями Q_2 и Q_1 получаем, что какое бы ни было большое λ

$$\partial n / \partial \zeta \sim 1 \quad \text{при } \zeta = \lambda\xi \tag{6.2}$$

Таким образом, в области Q_1 уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} n v_\xi^* - \frac{\partial^2 n}{\partial \zeta^2} \approx 0 \tag{6.3}$$

Член, опущенный в этом уравнении, имеет порядок λ^{-1}. Решение уравнения (6.3) должно сращиваться с внешним решением. Следовательно

$$n = G\exp\left(\int_0^{\zeta} v_\xi^* d\zeta\right)\theta(b_1) + n_* b_1 \int_0^{\zeta} d\zeta' \exp\left(\int_{\zeta'}^{\zeta} v_\xi^* d\zeta\right)\theta(b_1) + O(\lambda^{-1}) \qquad (6.4)$$

Здесь G — некоторая постоянная, определяемая через граничные условия для n на Γ, $\theta(b_1)$ — функция единичного скачка, равная 1 при $b_1 > 0$ и 0 при $b_1 < 0$. Из соотношения (6.3) находим, что

$$j = n_* b_1 \theta(b_1) + O(\lambda^{-1}) \qquad (6.5)$$

Следовательно, поток частиц в направлении к Γ в области Q_1 с точностью до членов порядка λ^{-1} не зависит от ζ и к тому же, что особенно важно, не зависит от выбора граничного условия для n на поверхности Γ. Из уравнений (2.4), (2.5) вытекает, что в области Q_1 частицы можно считать безынерционными, если выполняется условие $k \ll \lambda^{-1}$. Предположим, что числа k действительно настолько малы. Легко видеть, что при этом частицы можно считать безынерционными и в области Q_2. Следовательно

$$v_\xi \approx \alpha(-a_0 + a_1\xi) + (\alpha a_2 + u_1)\xi^2, \qquad v_\eta \approx u_2\xi \qquad (\xi \to 0) \qquad (6.6)$$

При существовании разложения (6.6) решение уравнения (2.3) в стационарном случае в области Q_1 представимо в виде ряда

$$n \approx \sum_{m \geqslant 0} n_m \lambda^{-m} \qquad (\lambda \to \infty) \qquad (6.7)$$

Ряд (6.7) тем эффективнее, чем больше α. При малых α он становится непригодным для расчетов. Действительно, при $\alpha = 0$ необходимо использовать преобразование

$$\xi \to \zeta = \lambda^{1/3}\xi$$

При больших α приводит к цели преобразование

$$\xi \to \zeta = \lambda\xi$$

Таким образом, можно ожидать, что асимптотический ряд, равномерный по α получим, положив

$$\xi \to \xi = \lambda(\alpha + \lambda^{-2/3})\xi$$

$$n \approx \sum_{m \geqslant 0} n_m \lambda^{-m}(\alpha + \lambda^{-2/3})^{-m} \qquad (6.8)$$

Аналогичное явление имеет место всегда, когда коэффициент при главном члене асимптотического разложения $\mathbf{u} + \mathbf{F}$ но ξ стремится к нулю.

Поступила 17 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
2. Седунов Ю. С. Некоторые вопросы броуновской диффузии стоксовых частиц в пространственно неоднородном внешнем поле. Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1964, № 7.
3. Левин Л. М., Седунов Ю. С. О влиянии инерции на осаждение частиц аэрозоля из потока при докритических числах Стокса. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 2.
4. Клепикова Н. В., Левин Л. М., Седунов Ю. С. Некоторые вопросы теории осаждения частиц аэрозоля из потока. Тр. Ин-та прикл. геофиз., 1967, вып. 7.
5. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Уравнения броуновского движения аэрозольных частиц. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 4.
6. Волощук В. М. К теории несимметричных течений аэрозоля. Изв. АН СССР, Сер. Физика атмосферы и океана, 1967, т. 3, № 9.
7. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
8. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.