

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛКИ С УПРАВЛЯЕМЫМИ СИЛОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А. Г. Колпаков

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
630102 Новосибирск

Разработан метод решения задачи проектирования “интеллектуальной” конструкции, сформулированной относительно пары $\{\text{оптимальное положение актуаторов}\}$, $\{\text{оптимальное управление актуаторами}\}$. В предложенном методе физические и логические объекты рассматриваются как “равноценные”.

Ключевые слова: проектирование, “интеллектуальная” конструкция, актуаторы, управляющая инструкция.

В настоящее время проявляется интерес к так называемым интеллектуальным конструкциям, имеющим в своем составе силовые элементы (актуаторы), с помощью которых конструкции могут воздействовать сами на себя и за счет этого приспосабливаться к приложенным внешним нагрузкам. Управление силовыми элементами передается локальному процессору (микроЭВМ), являющемуся составной частью конструкции. Основной задачей для такого рода конструкций является задача проектирования.

Число, положение актуаторов и инструкция (программа для ЭВМ, управляющая работой актуаторов) взаимосвязаны [1], поэтому задача заключается в одновременном определении числа, мест размещения актуаторов и разработке программы управления актуаторами. Такая постановка задачи в описательном виде приведена во многих работах (см., например, работы [2, 3] и библиографию к ним). Однако решения этой задачи (и даже математической формализации), связывающего все компоненты “интеллектуальной” конструкции (пассивные элементы, силовые элементы, управляющую программу), насколько известно автору данной работы, не существует.

В настоящей работе задача сформулирована относительно пары $\{\text{оптимальное положение актуаторов}\}$, $\{\text{оптимальное управление актуаторами}\}$. Если задано положение актуаторов, то имеет место задача оптимального управления [4]. Если задано управление (имеется набор силовых элементов заданной интенсивности и вопрос заключается только в том, где их лучше разместить), то имеется сходство с задачей проектирования топологии [5]. Отметим, что пассивные элементы (в данном случае балка), приборы измерения нагрузки (сенсоры) и силовые элементы (актуаторы) являются физическими объектами, в то время как программы представляют собой логические объекты. Одной из целей работы является разработка метода решения задачи, в рамках которого физические и логические объекты рассматриваются как “равноценные” (в рамках подходящей математической формализации).

В данной работе метод решения задачи изложен применительно к простейшей структуре — “интеллектуальной” балке. Решение получено путем сведения исходной задачи к задаче о расположении относительно друг друга выпуклых многогранников, один из которых соответствует множеству возможных прогибов, другой — целевой функции. Предлагаемый метод может быть применен для многих типов конструкций.

1. Постановка задачи и ее решение в случае стационарной нагрузки. Рассмотрим балку с концами $y = 0$ и $y = 1$. Балка подвергнута воздействию заданной внешней силы $F(y)$. Кроме того, к балке могут быть приложены силы или моменты интенсивности $p(y)$ ($y \in [0, 1]$), создаваемые актуаторами.

Положения актуаторов и их интенсивности заранее не заданы, задано только ограничение на интенсивность. Требуется определить положения актуаторов и их интенсивности (силы, моменты), минимизирующие прогиб балки $u(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Эта задача представляет собой модельную задачу сохранения формы конструкции.

Положения актуаторов и их интенсивности описываются одной функцией $p(y)$. Если $p(y) = 0$, то актуаторы в точке y отсутствуют, если $p(y) \neq 0$, то в точке y имеется актуатор и функция $p(y)$ задает его интенсивность.

Прогиб $u(x)$ балки под действием силы $F(y)$ и актуаторов силы (силовых элементов, создающих дополнительные силы, приложенные к балке) интенсивности $p(y)$ определяется из решения задачи

$$u^{IV} = p + F \quad (1.1)$$

с краевыми условиями для жесткого защемления

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0 \quad (1.2)$$

(могут быть использованы и другие условия).

При использовании актуаторов моментов (силовых элементов, создающих дополнительные моменты в балке) интенсивности $p(y)$ [1] имеем уравнение

$$(u'' + p)'' = F \quad (1.3)$$

с теми же краевыми условиями (1.2).

Ограничения на интенсивность актуаторов возьмем в виде

$$\int_0^1 p(y) dy \leq 1 \quad (1.4)$$

(суммарное ограничение интенсивности актуаторов) и

$$p(y) \geq 0. \quad (1.5)$$

Выражения (1.4), (1.5) являются модельными ограничениями, которые упрощают последующие выкладки.

Требуется минимизировать прогиб балки $u(x)$, т. е. решить задачу

$$\|u\|_{C[0,1]} \equiv \max_{x \in [0,1]} |u(x)| \rightarrow \min. \quad (1.6)$$

Минимизация в (1.6) проводится по функциям $p(y)$, удовлетворяющим (1.4), (1.5), при этом $u(x)$ определяется из (1.1), (1.2) или (1.3), (1.2).

В приведенной постановке класс, которому принадлежит функция $p(y)$ (обозначим его A), весьма широк. На самом деле актуаторы создают какой-либо специальный вид усилий. Рассмотрим класс усилий

$$A_\delta = \left\{ \sum_{j=1}^m p_j \delta(x - y_j) \right\}, \quad (1.7)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Этот класс усилий соответствует точечным актуаторам. Можно использовать другие классы усилий. Например, класс постоянных на отрезках функций соответствует пьезонаклейкам [1].

Если ограничения на создаваемые актуаторами усилия отсутствуют, то задача имеет тривиальное решение $p(y) = -F(y)$. При наличии ограничений вида (1.4), (1.5) или ограничений для класса A решение $p(x) = -F(x)$ может оказаться недопустимым. Типичным ограничением на класс A , делающим решение $p(x) = -F(x)$ недопустимым, является использование конечного числа актуаторов.

Решения задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.2) соответственно имеют вид

$$u(x) = \int_0^1 L(x, y)F(y) dy + \int_0^1 L(x, y)p(y) dy; \tag{1.8}$$

$$u(x) = \int_0^1 L(x, y)F(y) dy + \int_0^1 M(x, y)p(y) dy, \tag{1.9}$$

где $L(x, y)$, $M(x, y)$ — фундаментальные решения задач об изгибе балки:

$$L^{IV} = \delta(x - y), \quad M^{IV} = -\delta''(x - y) \tag{1.10}$$

с краевым условием (1.2). Функции $L(x, y)$ и $M(x, y)$ можно вычислить явно.

1.1. *Дискретизация задачи* (1.8), (1.9). Разобьем интервал $[0, 1]$ точками $\{x_1, \dots, x_n\}$ (точками наблюдения за прогибом) и точками $\{y_1, \dots, y_m\}$ (точками возможного размещения актуаторов). Выбор точек наблюдения и возможного размещения актуаторов может быть обусловлен техническими возможностями или быть формальным (например, если точки распределены с равным шагом). В последнем случае имеет место аналогия с выбором точек в задачах проектирования топологии.

Решения (1.8) и (1.9) для $p(y)$ из класса (1.7) принимают вид

$$u(x_i) = G(x_i) + \sum_{j=1}^m L_{ij}p_j, \tag{1.11}$$

где $L_{ij} = L(x_i, y_j)$ для (1.8), $L_{ij} = M(x_i, y_j)$ для (1.9); $G(x) = \int_0^1 L(x, y)F(y) dy$ — известная функция, равная прогибу балки под действием силы $F(y)$, т. е. прогиб неуправляемой балки; p_j — интенсивность актуатора в точке y_j ($p_j = 0$ означает, что в точке y_j актуатор отсутствует).

Условия (1.5) для функций из класса (1.7) принимают вид

$$\sum_{j=1}^m p_j \leq 1, \quad p_j \geq 0. \tag{1.12}$$

Введя векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u(x_i), i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{y}_j &= \{L_{ij}, i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y}_0 = \{G(x_i), i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.13}$$

(1.11) можно записать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}_0 + \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j p_j \in \mathbb{R}^n. \tag{1.14}$$

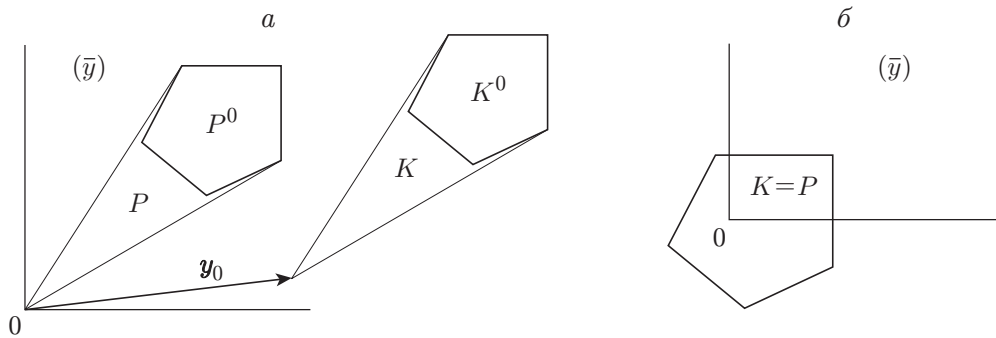


Рис. 1

При выполнении условия

$$\sum_{j=1}^m p_j = 1, \quad p_j \geq 0 \quad (1.15)$$

множество $\sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j p_j$ образует выпуклую оболочку точек $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$, т. е. многогранник

$P^0 = \text{conv}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$. Множество $\sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j p_j$ с условием (1.12) есть конус P с основанием P^0 и вершиной 0 , который может быть представлен в виде $P = \text{conv}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, 0\}$. Равенство (1.14) задает конус $K = P + \mathbf{y}_0$ (конус P , сдвинутый на вектор \mathbf{y}_0) с основанием $K^0 = P^0 + \mathbf{y}_0$.

Равенство $\sum_{j=1}^m p_j = 1$ в (1.15) означает, что исчерпан суммарный ресурс интенсивности

актуаторов. Неравенство $\sum_{j=1}^m p_j < 1$ означает, что суммарный ресурс не исчерпан (т. е. для минимизации прогиба весь ресурс интенсивности не потребовался).

После дискретизации условия (1.6) приходим к задаче

$$\|\mathbf{u}\| = \max_i |u_i| \rightarrow \min, \quad (1.16)$$

где вектор \mathbf{u} определен равенством (1.14) с условием (1.12), т. е. к задаче

$$\|\mathbf{u}\| \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in K. \quad (1.17)$$

Конус K определен выше.

Таким образом, задача сводится к минимизации функции $\|\mathbf{u}\|$ на конусе K . Решение задачи удобно проводить не путем решения задачи оптимизации, а на основе геометрического анализа.

Рассмотрим следующие случаи:

1. Точка $0 \notin P^0$. В этом случае конус P не совпадает с множеством P^0 (рис. 1, а), соответственно конус K не совпадает с K^0 .

2. Точка $0 \in P$. В этом случае $P = P^0$ (рис. 1, б) и $K = K^0$.

Условие $\|\mathbf{u}\| = c$ в силу определения $\|\mathbf{u}\|$ (1.16) задает куб $D(c)$ с гранями $x_i = c$. При $c = 0$ куб $D(c)$ совпадает с началом координат, при $c = \infty$ куб $D(c)$ занимает все пространство \mathbb{R}^n (рис. 2).

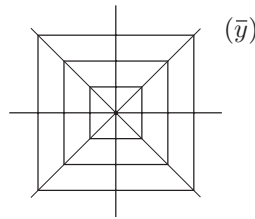


Рис. 2

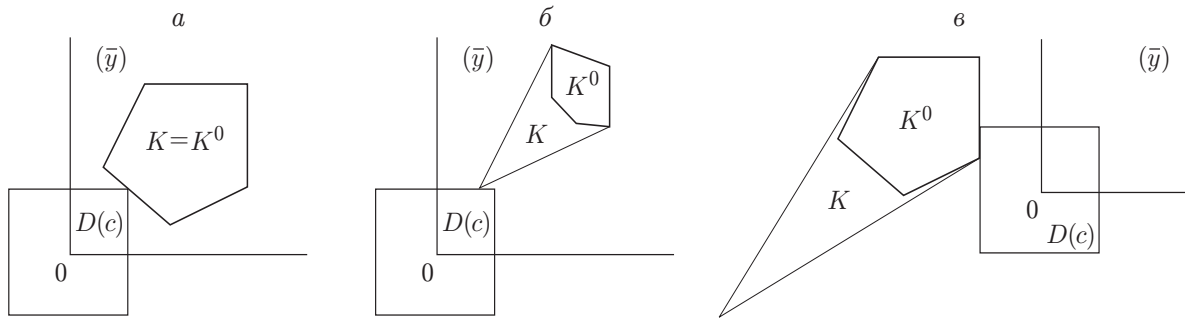


Рис. 3

1.2. *Решение задачи (1.17).* Перейдем к решению задачи (1.17). Следует отметить, что отыскивается не одно оптимальное управление, а пара: {*оптимальное управление актуаторами*}, {*оптимальное положение актуаторов*}. Указанные величины взаимосвязаны и определяются совместно.

При нахождении значения минимума в задаче (1.17) рассмотрим следующие случаи.

1. $0 \notin K$. Если конус K не содержит начала координат, то при увеличении куба $D(c)$ начиная с точки в начале координат (при $c = 0$) до \mathbb{R}^n (при $c \rightarrow \infty$) в некоторый момент он коснется конуса K . Точка касания дает решение задачи (1.17) (рис. 3): значение c , при котором произошло первое касание, есть значение минимума в задаче (1.17).

Из рис. 3 следует, что при $0 \notin K$ возможны два случая касания конуса K и куба $D(c)$:
 а) куб $D(c)$ касается грани конуса K (рис. 3,а);

б) куб $D(c)$ касается вершины конуса K (одной из вершин K является точка y_0) (рис. 3,б).

В случае “а” в сумме в (1.14) имеется несколько величин p_{j1}, \dots, p_{jN} , не равных нулю. Это означает, что используется N актуаторов интенсивности p_{j1}, \dots, p_{jN} , помещенных в точки y_{j1}, \dots, y_{jN} . При этом если конус K касается куба $D(c)$ своим основанием K^0 (рис. 3,в), то $\sum_{j=1}^m p_j = 1$, т. е. используется весь ресурс интенсивности актуаторов. Если

куба $D(c)$ касается множество $K \setminus K^0$ (рис. 3,б), то $\sum_{j=1}^m p_j < 1$, т. е. используется не весь ресурс интенсивности.

В случае “б” в сумме в (1.14) или только одна величина $p_j \neq 0$ (если вершина отлична от y_0) или все величины $p_j = 0$ (если вершина совпадает с y_0). В первом случае используется один актуатор интенсивности p_j , помещенный в точку y_j . Во втором случае управление отсутствует.

2. $0 \in K$. Если конус K содержит начало координат, то можно обеспечить нулевой прогиб балки в точках наблюдения. Если начало координат совпадает с какой-либо вершиной конуса K , то в сумме в (1.14) присутствует только один ненулевой член, в противном случае — несколько ненулевых членов. Критерий, указывающий на полное или неполное использование ресурса интенсивности, тот же, что и выше (касание кубом $D(c)$ множества K^0 или $K \setminus K^0$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Исходя из теоремы Каратеодори о представлении точки, принадлежащей выпуклому множеству в \mathbb{R}^n [6], можно утверждать, что число актуаторов не превысит $n+1$ (n — число точек контроля прогиба). Однако эта оценка может оказаться существенно завышенной.

1.3. *Выводы.* 1. Число ненулевых членов в (1.14) равно числу точечных актуаторов, необходимых для минимизации прогиба балки, которое априори не определено.

2. Поскольку $\{y_j\}$, y_0 в (1.14) известны, то число, положения и интенсивности актуаторов могут быть найдены предложенным выше методом. Этим методом определяется минимальное число актуаторов, их положения и интенсивности.

2. Непрерывная задача. Случай стационарной нагрузки. Рассмотренный выше случай, когда число мест потенциального размещения актуаторов предполагается конечным, представляется ограничительным. Рассмотрим более общий случай, чтобы показать, что существенных ограничений это условие не налагает. Зафиксируем точки наблюдения, а положения актуаторов фиксировать не будем. В точках наблюдения получим равенства

$$u = y_0 + \int_0^1 L(y)p(y) dy; \quad (2.1)$$

$$u = \{u(x_i), i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

$$L(y) = \{L(x_i, y), i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n, \quad y_0 = \{G(x_i), i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n.$$

Интеграл $\int_0^1 L(y)p(y) dy$ с условием $\int_0^1 p(y) dy = 1$, $p(y) \geq 0$ задает выпуклую оболочку

линии $\Gamma = \{x = L(y), y \in [0, 1]\}$ [1], т. е. $P^0 = \text{conv } \Gamma$, а интеграл $\int_0^1 L(y)p(y) dy$ с условиями

(1.4), (1.5) задает конус $P = \text{conv}\{\Gamma, 0\}$ с основанием P^0 и вершиной 0. Равенство (1.14) задает конус $K = P + y_0$ (конус P , сдвинутый на вектор y_0) с основанием $K^0 = P^0 + y_0$.

Использованная в п. 1 дискретизация представляет собой аппроксимацию линии Γ ломаной и аппроксимацию криволинейных конусов многогранными конусами. При увеличении числа точек аппроксимация становится точнее. Геометрический анализ можно проводить и непосредственно для криволинейных конусов, что является более трудоемкой задачей, хотя и не имеющей принципиальных отличий от рассмотренной.

3. Связь положения актуатора силы с точкой максимального прогиба балки. Как сказано выше, в общем случае решение задачи ведется относительно пары $\{\text{оптимальное управление актуаторами}\}$, $\{\text{оптимальное положение актуаторов}\}$. В частных случаях решение может вестись относительно одного компонента этой пары. Если зафиксировать положение актуаторов, то получим задачу оптимального управления. В случае балки она проста и в данной работе не рассматривается.

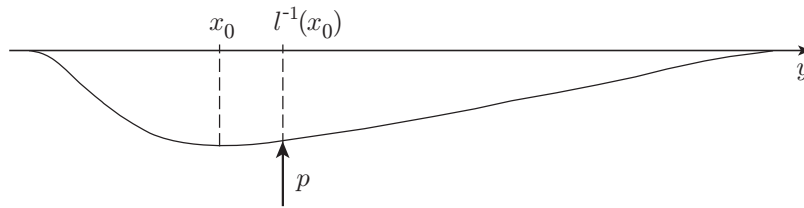


Рис. 4

Рассмотрим задачу для случая, когда “управление” зафиксировано и необходимо найти только оптимальное положение актуатора.

Пусть балка подвержена действию внешней силы F . Для уменьшения прогиба представляется естественным приложить силу в точке максимального прогиба балки. Насколько оправдана эта гипотеза? Ответ следует из результатов п. 1: оптимальным может быть размещение нескольких актуаторов в разных местах. Это значит, что в общем случае сформулированная гипотеза неверна. Рассмотрим частный случай. Пусть используется только один актуатор силы. Тогда положение актуатора можно определить, решив задачу из п. 2. Однако решение этой задачи не дает явно связи положения актуатора с точкой максимального прогиба. Поэтому рассмотрим задачу с иной точки зрения.

Пусть $L(x, y)$ — фундаментальное решение, соответствующее приложению силы в точке y , $x^* = l(y)$ — точка максимума $L(x, y)$ при заданном y . Соответственно $y = l^{-1}(x^*)$, где индекс -1 означает обратную функцию. Точка максимума x^* в общем случае не совпадает с точкой $l^{-1}(x^*)$.

Пусть прогиб $u(x)$ при действии силы $F(x)$ имеет максимум в точке x_0 (рис. 4). Из сказанного выше следует, что для наиболее эффективного уменьшения этого прогиба силу p следует приложить не в точке x_0 , а в точке $l^{-1}(x_0)$. Действительно, для функции $u(x) = G(x) + L(x, l^{-1}(x_0))p$ в точке x_0 имеем

$$G'(x_0) = 0, \quad G''(x_0) > 0, \tag{3.1}$$

для функции $L(x_0, l^{-1}(x_0))$ имеем

$$L'(x_0, l^{-1}(x_0)) = 0 \tag{3.2}$$

(штрих означает производную по переменной x). Тогда для малых p в силу (3.1), (3.2) имеем

$$u'(x) = G'(x_0) + L'(x_0, l^{-1}(x_0))p = 0, \quad u''(x) = G''(x_0) + L''(x_0, l^{-1}(x_0))p > 0,$$

т. е. в этом случае в точке x_0 максимум прогиба уменьшается. Верно и обратное: при малых p максимум остается в точке x_0 и в случае приложения силы со стороны актуатора в других точках.

Сместим точку приложения силы из точки $l^{-1}(x_0)$ в некоторую точку y . В этом случае прогиб балки равен

$$u(x) = G(x) + L(x, y)p. \tag{3.3}$$

В окрестности точки $(x = x_0, y = l^{-1}(x_0))$ разложения первого порядка по x, y для производных функций $G(x)$ и $L(x, y)$ имеют вид (с учетом (3.1), (3.2))

$$G'(x) = a(x - x_0), \quad L'(x, y) = A(x - x_0) + B(y - l^{-1}(x_0)).$$

Для $u(x) = G(x) + L(x, y)p$ имеем условие экстремума $u'(x) = G'(x) + L'(x, y)p = a(x - x_0) - (A(x - x_0) + B(y - l^{-1}(x_0)))p$, откуда следует

$$y - l^{-1}(x_0) = a(x - x_0)(a + pA)/(pB). \quad (3.4)$$

Если $x - x_0 = 0$, то в силу (3.4) $y - l^{-1}(x_0) = 0$; если $x - x_0 \neq 0$, то $|y - l^{-1}(x_0)| \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow 0$. Так как выход y за пределы отрезка $[0, 1]$ невозможен, то $x = x_0$ и максимум достигается в точке x_0 . В этом случае в силу (3.4) $y = l^{-1}(x_0)$ (т. е. актуатор силы находится в точке $l^{-1}(x_0)$).

Таким образом, для единственного актуатора силы малой интенсивности ($p \ll 1$) его оптимальным положением является точка $l^{-1}(x_0)$. Эта точка, вообще говоря, не совпадает с точкой максимального прогиба балки.

4. Переменная внешняя нагрузка. Выбор положения актуаторов и инструкция для процессора балки. В рассмотренных выше случаях внешняя нагрузка $F(t)$ (которую мы пытались “компенсировать” актуаторами) была фиксированной. Наиболее эффективное положение актуаторов и необходимая минимальная интенсивность актуаторов определялись однозначно. При этом набор актуаторов был свой для каждой нагрузки. Если нагрузка принимает различные значения, то при непосредственном применении теории из п. 1 может оказаться, что для “компенсации” нагрузки необходимо иметь много актуаторов. Рассмотрим задачу о выборе минимального набора актуаторов.

Если имеется семейство нагрузок $F(t)$, где параметр t принадлежит множеству L , то, следуя п. 1, получим задачу

$$\|\mathbf{u}\| \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in K(t); \quad (4.1)$$

$$K(t) = \text{conv} \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\} + \mathbf{y}_0(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2)$$

При этом в (4.2) от t зависит только \mathbf{y}_0 (см. (1.13)).

Решение задачи при заданном t может быть получено методом, описанным выше, т. е. оно зависит от t как от параметра. Это решение представляет теоретический интерес, так как может потребоваться большое число актуаторов. Вместе с тем очевидно, что в любом случае решение имеет вид *если* ⟨условие⟩, *то* ⟨действие⟩. Высказывания (инструкции) вида: *если* ..., *то* ... трактуются как знания [7]. Поэтому оснащение балки набором таких инструкций означает передачу ей некоторых знаний (делает ее “интеллектуальной” или “разумной”, т. е. имеющей некоторые знания или навыки, конструкцией). Вопрос о получении знаний из эксперимента (натурного или численного) в данной работе не рассматривается (см. [8]).

Возможны два уровня “разумности” системы:

1. Система имеет много актуаторов или может помещать актуаторы в заданные позиции и, решая задачу (1.17), она определяет, какие актуаторы надо включить, и вычисляет их интенсивности t исходя из условия $D(c) \cap K \neq \emptyset$. В этом случае система может подстроиться (если задача разрешима) под любую внешнюю нагрузку F (даже без конкретизации семейства внешних нагрузок).

2. Система включает или выключает актуаторы по правилу *если* ⟨условие на параметр нагрузки⟩, *то* ⟨включить группу актуаторов из списка⟩.

Во втором случае система должна уметь идентифицировать значение параметра нагрузки. Для этого необходимы сенсоры и решение задачи идентификации. Для решения задачи идентификации параметра нагрузки и исполнения инструкций из п. 2 требуется процессор. Как показано ниже, это достаточно простые задачи, поэтому “интеллектуальная” конструкция может управляться достаточно маломощным процессором.

Прежде всего, выберем c такое, что $D(c) \cap K(t) \neq \emptyset$ для всех t . При таком выборе c конус $K(t)$ для всех t имеет общую точку с кубом $D(c)$. Для решения задачи достаточно указать на конусе $K(0)$ такой набор точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$, чтобы хотя бы одна из точек

$\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_0(t)$ (т. е. точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$, движущихся вместе с конусом $K(t)$) находилась в $D(c)$. Кроме того, желательно, чтобы таких точек было как можно меньше. Поясним это требование. Точка, принадлежащая конусу K , соответствует системе актуаторов. Системы актуаторов, соответствующие точкам $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$, решат задачу: если нагрузка такова, что точка $\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_0(t) \in D(c)$, то надо включить систему актуаторов, соответствующую точке \mathbf{x}_i . С практической точки зрения целесообразно иметь меньшее число актуаторов, т. е. точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$, при этом среди них должно быть как можно больше вершин конуса.

Предлагается следующий алгоритм выбора точек:

1. Определяем множество значений L_0 параметра нагрузки t , при которых $\mathbf{y}_0(t) \in D(c)$. Для $t \in L_0$ и без воздействия актуаторов $\|\mathbf{u}\| < c$. Остается множество значений параметра $L \setminus L_0$, для которого выбор точек еще не сделан.

2. Рассмотрим точку \mathbf{x}_c касания конуса K с кубом $D(c)$ (этот случай соответствует худшему варианту), когда актуаторы необходимы. Находим множество значений L_c параметра нагрузки, при которых $\mathbf{x}_c \in D(c)$. Если точек касания несколько, то повторяем эту процедуру для каждой точки касания и включаем соответствующие значения параметра нагрузки в множество L_c , после чего остается множество $L \setminus L_0 \setminus L_c$. Далее действуем итерациями, которые могут зависеть от выбора точек на конусе.

3. Определяем, принадлежит ли точка \mathbf{x}_c :

- а) вершине конуса;
- б) грани конуса.

В случае “а” переходим на шаг 4, в случае “б” — на шаг 5.

4. Если точка \mathbf{x}_c является вершиной конуса, то в момент ее выхода из куба $D(c)$ возможны следующие случаи:

а) в $D(c)$ лежит какая-либо вершина конуса K . Тогда принимаем ее в качестве новой точки \mathbf{x}_c и переходим на шаг 3 (отметим, что вершина конуса соответствует одному актуатору — наименьшему возможному числу актуаторов, поэтому мы предпочитаем выбор вершины);

б) в кубе $D(c)$ не лежит ни одна вершина. В этом случае переходим на шаг 5.

5. Находим значения параметра нагрузки, при которых грань (см. шаг 3) имеет пересечение с кубом $D(c)$, и берем точки, принадлежащие пересечению грани и куба. Точки, лежащие на одной грани конуса, соответствуют неизменному положению актуаторов, меняется только их интенсивность.

Таким образом, алгоритм допускает некоторый произвол. Этот произвол может быть полезен, так как он позволяет решать задачу за счет увеличения числа актуаторов или использования актуаторов переменной интенсивности.

В качестве примера рассмотрим балку, для которой куб $D(c)$ и характер движения конуса $K(t)$ показаны на рис. 5.

На рис. 5 точка $\mathbf{y}_0(t)$ лежит вне $D(c)$ для всех t (кривая a — траектория точки $\mathbf{y}_0(t)$). В этом случае необходимы актуаторы. На участке L_c внутри $D(c)$ находится точка \mathbf{x}_2 , которой соответствует актуатор A_2 . Когда точка \mathbf{x}_2 выходит из $D(c)$ (рис. 5), в $D(c)$ входит вершина \mathbf{x}_1 , которая остается в $D(c)$ до конца движения конуса K . Вершине \mathbf{x}_1 соответствует актуатор A_1 . Система управляется по правилу (управляющая инструкция для балки): *если* $\langle t \in L_c \rangle$, *то* \langle включить актуатор A_2 мощности $p_2 = 1 \rangle$, *если* $\langle t \in L_g \rangle$, *то* \langle включить актуатор A_1 мощности $p_1 = 1 \rangle$.

Остановимся на условии вида $t \in L_c$ (когда текущий параметр внешней нагрузки лежит в заданном интервале). Текущее значение параметра нагружения t удобно определять через текущие деформации балки. Однако одновременно с внешней нагрузкой $F(t)$ к балке могут быть приложены управляющие воздействия p . Формализуем эту ситуацию. Пусть имеется функционал $\Phi(F, p)$ такой, что $t = \Phi(F(t), p(t))$. Наличие этого функционала озна-

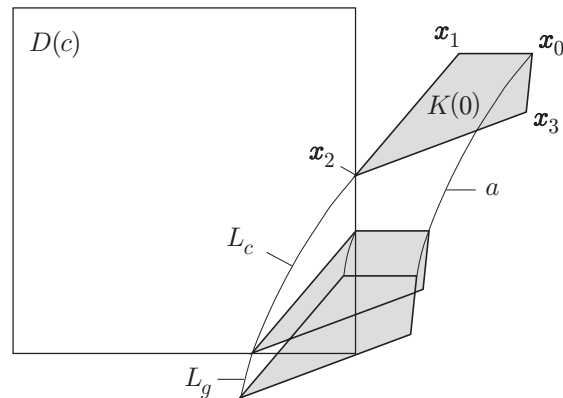


Рис. 5

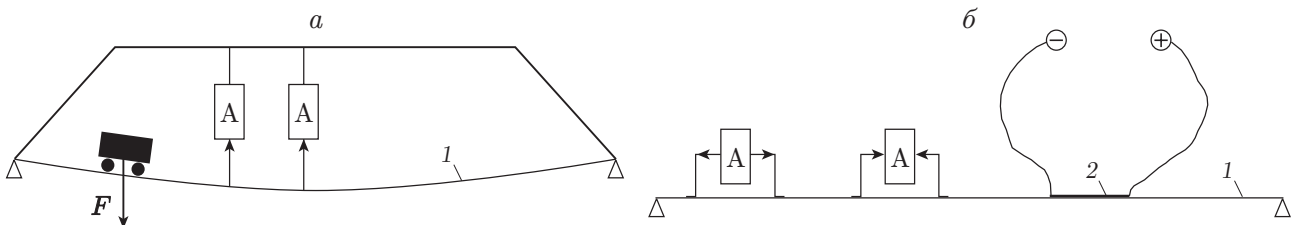


Рис. 6

чает, что система измеряет текущее значение функционала $\Phi(F, p)$, а по нему — значение параметра нагружения t (т. е. производит идентификацию текущего параметра нагружения) и принимает решение о включении той или иной группы актуаторов. Для измерения необходимо наличие в системе сенсоров, а для вычисления и принятия решения о включении актуаторов — наличие процессора. При этом процессор выполняет простые операции: вычисление значений функционала Φ и исполнение инструкции вида *если ... , то ...*. Поэтому “интеллектуальная” конструкция не требует использования мощного процессора.

Выбор функционала Φ (и как следствие системы датчиков и способа обработки сигналов с них) определяется конкретным классом нагрузки. Функционал Φ для конкретного класса нагрузки легко построить, поэтому излагать общий метод его построения нецелесообразно.

Таким образом, при решении задачи управления балкой посредством актуаторов для внешних нагрузок из некоторого класса систему балка — актуаторы необходимо дополнить сенсорами и процессором, которые позволяют определить параметр нагрузки и переключать актуаторы согласно управляющей инструкции.

Возможно “разделение” интеллектуального ресурса: маломощный процессор, вычисляющий значения Φ и исполняющий инструкции вида *если ... , то ...*, является составной частью конструкции и осуществляет оперативное управление. Другой процессор, решающий более сложную задачу (4.1), (4.2), создает инструкции *если ... , то ...* (знания) для первого процессора. Этот процессор может не являться составной частью конструкции и не принимать участия в оперативном управлении конструкцией.

5. Актуаторы силы и моментов. На рис. 6, а, б приведены возможные схемы, поясняющие действие актуаторов силы и моментов соответственно (1 — балка, 2 — пьезокладка, А — актуатор). Отметим, что на рис. 6, а управляющие силы являются внешними,

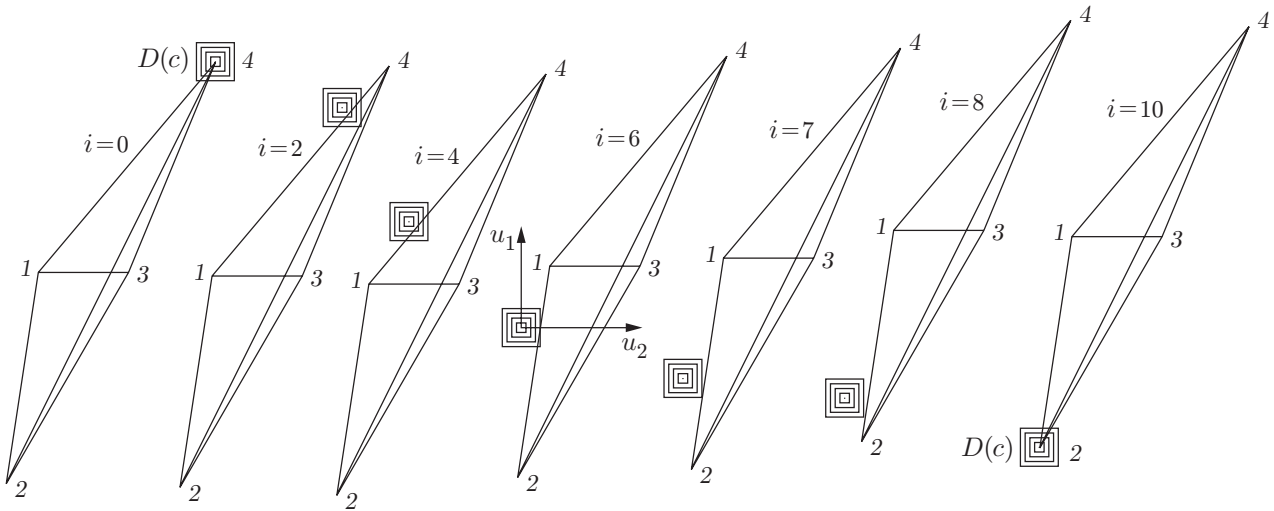


Рис. 7

в то время как на рис. 6,б моменты возникают вследствие воздействия балки самой на себя. Управление балкой с помощью внешних сил в большей мере соответствует задачам оптимального управления. В этих случаях положение управляющих сил часто определяется внешним окружением конструкции. Управление по принципу воздействия конструкции самой на себя соответствует “интеллектуальным” конструкциям. Действительно, силовые схемы, представленные на рис. 6,б, могут быть установлены в произвольных местах балки, и ограничения на их установку, как правило, будут связаны с конструкцией собственно балки (а не внешнего окружения).

В качестве примера рассмотрим балку $[0, 1]$ с концами $y = 0$ и $y = 1$, по которой между точками $x_1 = 0$ и $x_2 = 0,5$ движется внешняя точечная нагрузка (рис. 6,а). Пусть прогибы наблюдаются в точках $x_1 = 0,25$ и $x_2 = 0,5$. Определим возможные положения актуаторов в точках $y_1 = 0,25$, $y_2 = 0,5$ и $y_3 = 0,75$. На рис. 7 представлена эволюция конуса $K(t)$ для рассматриваемой задачи; значения параметра $t = 0,05i$, $i = 0, 1, \dots, 10$ соответствуют положению внешней нагрузки, движущейся из конца балки 0 до ее середины 0,5 с шагом 0,05. Квадраты на рис. 7 соответствуют кубу $D(c)$. В рассматриваемом двумерном случае $D(c)$ есть квадрат, найденный описанным в п. 1 методом. Треугольник 123 есть K^0 , треугольник 124 есть $K \setminus K^0$. Точка 4 соответствует значению $y_0(t)$.

Из рис. 7 следует, что при $i \leq 5$ минимальные прогибы могут поддерживаться одним актуатором A_1 , расположенным в точке $y_1 = 0,25$, при этом его интенсивность нарастает по мере продвижения точки приложения силы $F(t)$ от 0 к середине балки. При $i = 6, 7, 8$ необходимо использовать актуатор A_1 совместно с актуатором A_2 (в точке $y_2 = 0,5$). При $i = 9, 10$ можно использовать все три актуатора или только актуаторы A_1 и A_2 . В точке $i = 10$ можно использовать только актуатор A_2 . Начиная с $i = 6$ актуаторы используют суммарную интенсивность полностью (что следует из $D(c) \cap K^0 = \emptyset$ и $D(c) \cap (K \setminus K^0) \neq \emptyset$ для указанных i). Заметим, что использование одного актуатора A_2 (расположенного в середине балки) может не дать наименьшего прогиба. На рис. 7 действие одного актуатора A_2 различной интенсивности показано линией 2–4. При всех значениях параметра i , кроме $i = 9, 10$, эта линия не пересекает $D(c)$, т. е. только один актуатор A_2 не может осуществить оптимальное управление.

Вычисление интенсивностей актуаторов сводится к вычислению пропорций отрезков, показанных на рис. 7. В результате получаем следующую инструкцию для управления балкой при использовании двух актуаторов A_1 и A_2 (см. таблицу).

i	p_1	p_2	i	p_1	p_2
0	0	0	6	0,67	0,31
1	0	0	7	0,33	0,67
2	0,23	0	8	0,11	0,89
3	0,47	0	9	0	1,00
4	0,74	0	10	0	1,00
5	1,00	0			

Отметим, что значения мощностей (кроме случая $i = 7$) определяются неоднозначно, что связано с неоднозначностью выбора точки из $D(c) \cap K(t)$. Различия значений мощностей пропорциональны размеру квадрата $D(c)$. Для управляемой балки наибольший прогиб имеет место в случае $i = 7$ (сила находится в точке $y = 0,35$, максимальный прогиб балки равен c). В этом случае имеет место касание конуса $K(t)$ и куба $D(c)$. В остальных случаях конус и куб пересекаются по внутренним точкам. Максимальный прогиб u_f свободной балки имеет место в случае, когда сила находится в точке $x = 0,5$, а отношение $u_f/c \approx 21$.

Таким образом, характер прохождения конуса $K(t)$ через квадрат $D(c)$ определяет как механические элементы “интеллектуальной” балки (число актуаторов и их положение), так и ее логические элементы (управляющую программу). При этом число точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$ в минимальном представлении $\mathbf{x}_c = \sum_{j=1}^m p_j(t)(\mathbf{x}_j + \mathbf{y}_0(t))$ равно минимальному числу актуаторов, а их индексы указывают положения актуаторов. Из чисел $p_j(t)$ формируется управляющая инструкция.

6. Непрерывная задача. Переменная внешняя нагрузка. Так же как в п. 2, зафиксируем точки наблюдения, а положения (даже потенциально возможные) актуаторов фиксировать не будем. В точках наблюдения $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}_0(t) + \int_0^1 \mathbf{L}(y)p(y) dy; \quad (6.1)$$

$$\mathbf{u} = \{u(x_i), i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{L}(y) = \{L(x_i, y), i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y}_0(t) = \{G(x_i), i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}.$$

Задача (6.1), (6.2) аналогична рассмотренной в п. 2, но отличается от нее тем, что \mathbf{y}_0 зависит от t . Равенство (6.1) с ограничениями (1.4), (1.5) задает движущийся конус $K(t) = P + \mathbf{y}_0(t)$ (конус $P = \text{conv} \{\Gamma, 0\}$, сдвинутый на вектор $\mathbf{y}_0(t)$).

Использование подхода, основанного на рассмотрении выпуклых оболочек, позволяет решить задачу выбора числа, положения и управляющей инструкции для актуаторов. Множество возможных перемещений есть $K(t) = \text{conv} \{\Gamma, 0\} + \mathbf{y}_0(t)$. При изменении t конус $K(t) = \text{conv} \{\Gamma, 0\} + \mathbf{y}_0(t)$ движется. При этом он всегда содержит точку 0. Эту точку будет содержать и линия Γ (что соответствует решению $p(y, t) = -F(y, t)$). При этом форма балки будет сохранена (прогиб равен нулю), но число актуаторов должно быть бесконечным. Допустим возможность наличия прогибов $\|\mathbf{u}\| \leq c$ и выясним: 1) можно ли в этом случае использовать конечное число актуаторов; 2) как их выбирать.

Отметим, что в рассматриваемом случае мы не задаем возможные положения актуаторов. Как показано выше, число и положение актуаторов определяются положением конуса $K(t)$ и куба $D(c)$ относительно друг друга. В данном случае удобно рассматривать перемещения куба относительно конуса.

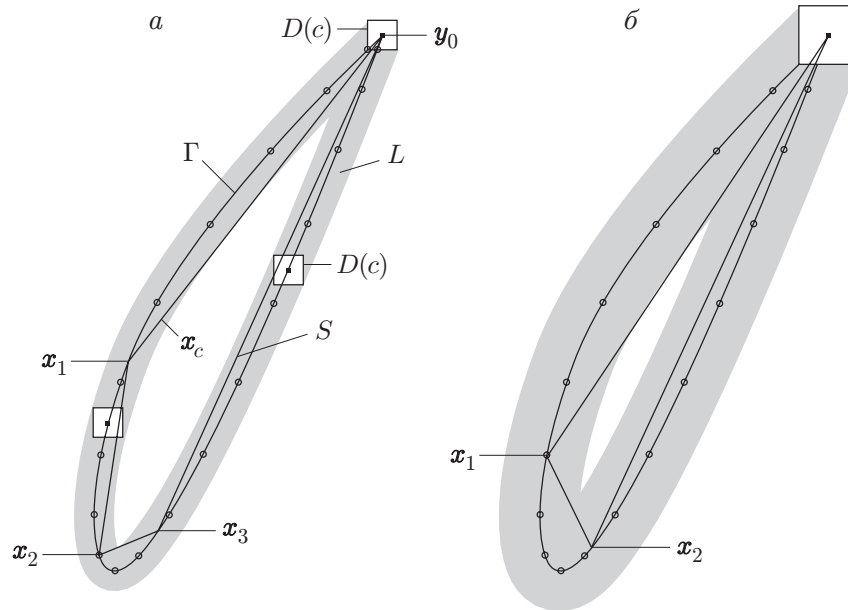


Рис. 8

Изложим метод решения (являющийся универсальным), рассмотрев следующий пример. На рис. 8 показана линия Γ для $\mathbf{L}(y) = \{L(0,25, y), L(0,5, y), y \in [0, 1]\} \in \mathbb{R}^2$, что соответствует движению точечной внешней силы вдоль балки от конца $y = 0$ до конца $y = 1$ (см. рис. 6,а) и расположению сенсоров в точках $x_1 = 0,25$ и $x_2 = 0,5$. Мы допустили наличие прогибов. Это значит, что решение определяется движением конуса $K(t)$ через куб $D(c)$, расположенный в начале координат. Можно рассмотреть движение куба $D(c)$ относительно конуса $K(t)$, что в данном случае удобнее. В рассматриваемом примере линия Γ замкнутая, выпуклая и содержит точку 0. Линия Γ рассчитана на ЭВМ. Все расчеты также выполнены на ЭВМ. В силу выпуклости линии Γ имеем $P = \text{conv}\{\Gamma, 0\} = \text{conv}\Gamma$. Квадрат (в данном случае куб $D(c)$) является квадратом) перемещается вдоль кривой Γ . На рис. 8 приведены квадраты, соответствующие различным допустимым прогибам c . На рис. 8,б допустимые прогибы в два раза больше, чем на рис. 8,а. Центр квадрата $D(c)$ (соответствующий точке 0) перемещается вдоль кривой Γ . При изменении t от 0 до 1 квадрат переместится вдоль всей линии и “заметет” некоторую трубку L . Положения квадратов в верхней части рис. 8 соответствуют значениям $t = 0$ и $t = 1$ (квадраты $D(c)$ при $t = 0$ и $t = 1$ совпадают).

Возможные перемещения за счет действия актуаторов представляются выпуклыми комбинациями точек, лежащих на линии Γ . Пусть требуется найти минимальное число актуаторов, способных сохранить прогибы балки (в точках наблюдения) в заданном интервале. Для решения этой задачи надо найти минимальное число точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, таких что $L \cap \text{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \neq \emptyset$, т. е. надо найти ломаную S с минимальным числом звеньев, вписанную в линию Γ (т. е. имеющую вершины на Γ) и полностью лежащую в трубке L . Эту ломаную нетрудно построить. Построение (принцип которого следует из рис. 8,а) начинается с точки \mathbf{y}_0 . Из точки \mathbf{y}_0 в максимально удаленную от нее точку \mathbf{x}_1 кривой Γ проводится прямая линия, принадлежащая трубке L . В точку балки, соответствующую \mathbf{x}_1 , помещается первый актуатор. Такое же построение проводится из точки \mathbf{x}_1 и т. д., пока не будет пройдена вся трубка L . В результате строится искомая ломаная. Рис. 8,а соответствует случаю, когда ломаная имеет три вершины $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, соответствующие актуаторам. Рис. 8,б соответствует случаю, когда ломаная имеет две вершины $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Вер-

шина \mathbf{y}_0 соответствует неуправляемой балке. Положения актуаторов можно определить следующим образом. Зададим линию Γ параметрически, используя в качестве параметра длину балки. В рассматриваемом случае таким параметром является t . На рис. 8 точки на линии Γ заданы с шагом, соответствующим $1/20$ длины балки. Актуатор A_1 расположен в точке $x_1 \approx 0,29$, актуатор A_2 — в точке $x_2 \approx 0,45$, актуатор A_3 — в точке $x_3 \approx 0,58$.

Таким образом, определены минимальное число актуаторов, которые позволяют сохранить прогибы в заданных пределах, и их положения, т. е. решена часть задачи, связанная с проектированием структуры. Далее следует разработать логическую часть проекта — инструкцию для управления актуаторами. Инструкция пишется с использованием рис. 8 следующим образом. При произвольном $t = t_0$ квадрат $D(c)$ и ломаная S имеют некоторую общую точку \mathbf{x}_c . Представим точку \mathbf{x}_c в виде выпуклой комбинации вершин ломаной S . Для приведенной на рис. 8 точки \mathbf{x}_c имеем $\mathbf{x}_c = p_2\mathbf{x}_2 + p_3\mathbf{x}_3$. Следовательно, получаем инструкцию *если* $\langle t = t_0 \rangle$, *то* $\langle p_1(t) = 0, p_2(t) = p_2, p_3(t) = p_3 \rangle$. Аналогичные вычисления надо выполнить для всех точек на балке (для конечного числа точек с некоторым малым шагом). В результате получим полную инструкцию для управления актуаторами.

Поскольку выбор точки \mathbf{x}_c и ее представление в виде выпуклой комбинации точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_0$ неединственны, то инструкция также неединственна. Однако все инструкции различаются (для данного набора актуаторов) незначительно. Различия интенсивностей актуаторов пропорциональны ширине трубки L , т. е. допустимому прогибу балки c . Положения минимального набора актуаторов также определяются неединственным образом. На рис. 8,а построение ломаной проводилось против часовой стрелки. Идя по часовой стрелке, мы получим другие положения актуаторов.

На рис. 8,б приведено решение той же задачи при увеличении допустимого прогиба балки c в два раза. В этом случае достаточно только двух актуаторов в точках $x_1 = 0,35$ и $x_2 = 0,56$.

7. Обобщения задачи. Прежде всего отметим, что метод решения, предложенный в данной работе, может быть применен к любой конструкции, воздействие сил на которую может быть описано с помощью функций влияния (вида (1.8), (1.9)). К ним относится большинство упругих конструкций [9].

При увеличении числа точек наблюдения повышается размерность задачи. При этом принцип построения решения сохраняется, но требуются иные математические методы решения. Это связано с тем, что мы не можем использовать прямые геометрические методы решения (см. приведенные выше примеры), а должны использовать вычислительные алгоритмы, реализующие эти методы в пространствах высокой размерности. Методы разработки таких алгоритмов не всегда тривиальны и изучаются вычислительной геометрией (см. [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G.** Analysis, design and optimization of composite structures. Chichester; N. Y.: John Wiley and Sons, 1997.
2. **Modelling and control of adaptive mechanical structures** / Ed. by U. Gabbert. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1998.
3. **Proceedings of the 2nd World congress of structural and multidisciplinary optimization**, Zakopane, Poland, May 26–30, 1997. Warsaw: IFTR, 1997.
4. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
5. **Bendsoe M. P.** Optimization of structural topology, shape and material. Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

6. **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
7. **Загоруйко Н. Г.** Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.
8. **Абовский Н. П., Охотин В. А., Смолянинова Л. Г.** Общая вариационная постановка задачи нейросетевого управления конструкциями // Изв. вузов. Стр-во. 1999. № 5. С. 35–38.
9. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1987.
10. **Discrete and computational geometry** / Ed. by J. E. Goodman, J. O'Rourke. Boca Raton; N. Y.: CRC Press, 1997.

*Поступила в редакцию 9/XI 2000 г.,
в окончательном варианте — 14/I 2002 г.*
