

УДК 621.391.161 + 621.317.36 + 535.6

КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ УЗКОПОЛОСНОГО НОРМАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ГАУССОВЫМ СПЕКТРОМ

В. С. Соколев, Ф. А. Журавель

*Учреждение Российской академии наук
Институт автоматизи и электрометрии Сибирского отделения РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: sobolev@iae.nsk.su*

На основе известного алгоритма максимально правдоподобных оценок центральной частоты нормального узкополосного случайного процесса с дробно-рациональным спектром предложен и путём компьютерного моделирования исследован аналогичный алгоритм для процесса с гауссовым спектром. Практическая значимость поиска алгоритмов эффективных оценок параметров таких процессов заключается в том, что они являются достаточно близкой моделью выходного сигнала лазерных доплеровских систем, предназначенных для исследования гидро- и аэродинамических потоков и измерения скорости твёрдых диффузно отражающих объектов, а также лазерного зондирования атмосферы. Результаты исследований показали, что предлагаемый алгоритм не смещает оценку доплеровской частоты (скорости) и даёт достаточно точные её оценки (для доплеровской системы с 25 интерференционными полосами в измерительном объёме при времени измерения, равном 100 доплеровским периодам, ошибка составляет всего лишь 0,12 %), обладает высокой помехоустойчивостью и позволяет определить величину получаемых погрешностей.

Ключевые слова: случайные процессы, центральная частота спектра узкополосного нормального случайного процесса, максимально правдоподобные оценки, доплеровские измерительные системы, модельный эксперимент.

Введение. Проблема получения оптимальных по точности оценок параметров случайных процессов привлекает всё большее внимание специалистов в областях радиосвязи, радиолокации и измерительной техники [1–5]. Особый интерес представляют задачи оценки центральной частоты узкополосных сигналов, получаемых в спектроскопии, лазерной доплеровской анемометрии, лазерной локации и при лазерном зондировании атмосферы [5–9]. В частности, выходным сигналом лазерных доплеровских систем является узкополосный нормальный случайный процесс, центральная частота спектра (ЦЧС) которого однозначно соответствует значению измеряемой скорости. Основная задача систем обработки подобных сигналов — получение оптимальной (в смысле точности) оценки ЦЧС.

Известно [6, 7], что стандартная частотная демодуляция подобных сигналов, т. е. получение реализаций мгновенной частоты, не даёт её точных оценок даже при постоянной скорости исследуемых потоков. Это связано с тем, что получаемый доплеровский сигнал сопровождается большим фазовым шумом [7], являющимся следствием наложения парциальных сигналов от многих рассеивающих частиц, одновременно присутствующих в измерительном объёме.

Идеальным решением поставленной задачи стали бы алгоритмы максимально правдоподобных оценок доплеровской частоты. Литературные источники по этой проблеме предлагают готовые решения для получения оценок центральной частоты только в случае, когда анализируемый сигнал имеет спектральную плотность в виде дробно-рациональной функции [10–12]. Например, в [11] (формула (4.3.28)) путь получения максимально правдо-

подобной оценки центральной частоты связан с максимизацией следующего функционала:

$$M(\omega) = \int_0^T K_1(\tau)K_2(a\tau)d\tau, \quad (1)$$

где $K_1(\tau)$ — корреляционная функция сигнала, оцениваемая по полученной его реализации; $K_2(\tau)$ — весовая функция, вычисленная как обратный фурье-образ известной априори дробно-рациональной функции, описывающей форму спектральной плотности сигнала.

Проанализировав этот путь, мы по аналогии пришли к подобному алгоритму квазиоптимальной оценки ЦЧС, отличающемуся только тем, что в качестве весовой функции используется форма корреляционной функции анализируемого сигнала $K_2(\omega, \tau)$, полученная как фурье-образ спектра гауссовой формы, а не спектра, описываемого дробно-рациональной функцией, т. е.

$$K_2(\tau) = \sigma_0^2 \exp[-0,5(\xi\omega\tau)^2] \cos(\omega\tau), \quad (2)$$

где σ_0^2 — дисперсия сигнала; ξ — известный параметр оптической схемы ЛДА, определяемый числом полос в измерительном объёме.

Итак, данная работа посвящена анализу алгоритма (2) для получения квазиоптимальных оценок скорости с помощью лазерных доплеровских измерительных систем, спектр сигнала которых имеет гауссову форму [6], путём поиска максимума функционала (1).

Процедура получения квазиоптимальных оценок центральной частоты сводится к следующему: по зарегистрированной реализации высокочастотной части доплеровского сигнала выбранной длины строится её автокорреляционная функция $K_1(\omega_d, \tau)$, затем в соответствии с выражением (2) вычисляется корреляционная функция $K_2(\omega, \tau)$ для заданной частоты из выбранного диапазона возможных значений доплеровской частоты, и далее вычисляется интеграл (1). Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет получен максимум этого интеграла. Значение частоты, соответствующее максимуму, принимается в качестве оптимальной оценки центральной частоты (ЦЧ) доплеровского сигнала, которое, как известно [7], будет соответствовать оптимальной оценке измеряемой скорости.

Цель данной работы — определить качество получаемых оценок ЦЧС, т. е. найти величины соответствующих ошибок. Для решения этой задачи выполнен комплекс модельных компьютерных экспериментов, основанный на построении адекватной модели доплеровского сигнала. Известно [6, 7], что такой моделью служит узкополосный нормальный случайный процесс, искомым параметром которого является ЦЧ его спектральной плотности.

Чтобы охватить наиболее распространённые конструкции лазерных доплеровских анемометров (ЛДА), были заданы три наиболее часто встречающихся числа реальных интерференционных полос в измерительном объёме ЛДА, построенного по дифференциальной схеме (или виртуальных в схеме с опорным пучком): 12,5; 25 и 50 полос. Эти значения [6, 7] являются основными параметрами данной доплеровской системы. При известных длине волны лазера, значении угла между зондирующими пучками и их радиусами, указанные числа определяют пространственное разрешение доплеровской системы и её потенциальную точность.

Затем было задано значение доплеровской частоты, равное 1, под которым можно понимать 1 Гц или 1 МГц, или любое число при соответствующем масштабировании. Так как целью модельного эксперимента предполагается определение значения относительных среднеквадратичных отклонений оценок доплеровской частоты по отношению к её

истинной величине, то абсолютное значение задаваемой частоты не имеет существенного значения.

Далее были заданы значения длительности измерений (длительности реализаций доплеровского сигнала, на основе которых предполагается производить оценку ЦЧ). Эти времена выбраны в виде чисел периодов доплеровского сигнала, соответственно равных 100, 500, 2500, 5000 и 25000.

Концентрация рассеивающих частиц взята в виде их среднего числа в измерительном объёме ЛДА, которое составило 10 частиц. Отметим, что, начиная с некоторой концентрации вблизи числа 10 и более, как показано в [7], доплеровский сигнал становится нормальным стационарным узкополосным процессом, поэтому число 10 отвечает реальным условиям применения доплеровских систем.

Первый этап эксперимента состоял в том, что на основании заданных выше величин строилась модель полезной высокочастотной части доплеровского сигнала. В целях сокращения объёма вычислений выбран её простейший вариант, соответствующий дифференциальной схеме ЛДА с большой апертурой фотоприёмника. Опять же в целях упрощения модель строилась в предположении, что все рассеивающие частицы имеют точечные размеры, движутся с одной и той же скоростью и проходят через центр измерительного объёма. С учётом изложенного принятая модель приобретает вид

$$u(t) = \sum_{i=1}^N u_i \exp[-(\xi\omega_d(t - t_i))^2] \cos[\omega_d(t - t_i)], \quad (3)$$

где u_i — амплитуда сигнала от одной рассеивающей частицы; ω_d — круговая доплеровская частота; i — номер частицы; N — общее число частиц, прошедших через измерительный объём. Максимальная длина моделируемой реализации составила 25000 периодов доплеровской частоты.

На втором этапе модельного эксперимента из данной реализации выбирались отрезки длиной 100 (а затем 500, 2500, 5000 и 25000) периодов и по программе (MatLab, xcorr) вычислялись корреляционная функция сигнала на этом отрезке и идеальная корреляционная функция доплеровского сигнала для задаваемого (из выбранного априори диапазона) значения доплеровской частоты в соответствии с выражением (2). В данном случае дисперсия σ_0 выбрана равной 1, так как её значение при определении максимума функционала (1) на результат не влияет.

Далее на основе полученных реализаций корреляционных функций вычислялся интеграл (2) и находился его максимум. Эта операция выполнялась путём перебора частот, являющихся аргументом идеальной корреляционной функции (2). Диапазон изменений этих частот составил 0,9–1,1 с дискретностью квантования по частоте 1/1000. Значения частоты, соответствующие этому максимуму, как указывалось выше, принимались в качестве оптимальной оценки ЦЧ доплеровского сигнала.

Для исследования статистики полученных оценок проводилась 1000 подобных экспериментов и на основе этих данных вычислялись выборочные математическое ожидание m , дисперсия σ^2 оценки и относительное среднеквадратичное отклонение σ . Результаты всех экспериментов сведены в табл. 1. Здесь d — длина выборочной реализации в числе доплеровских периодов, n — число интерференционных полос в измерительном объёме.

Анализ данных табл. 1 показывает, что математическое ожидание полученных оценок частоты особенно при больших временах оценивания и большом числе интерференционных полос отличается от истинного значения лишь в четвёртом знаке. На этом основании можно сделать вывод о том, что предложенный алгоритм оценки доплеровской частоты не смещает.

Таблица 1

n	d									
	100		500		2500		5000		25000	
	m	σ								
12,5	0,9960	0,0119	0,9960	0,0055	0,9961	0,0024	0,9962	0,0018	0,9962	0,0008
25	0,9987	0,0085	0,9991	0,0038	0,9990	0,0017	0,9990	0,0012	0,9991	0,0007
50	0,9986	0,0054	0,9998	0,0027	0,9998	0,0013	0,9998	0,0009	0,9998	0,0005

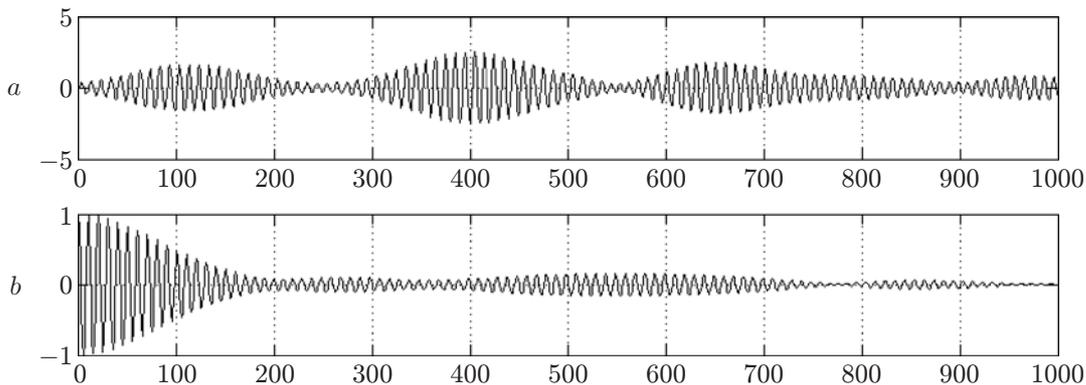


Рис. 1

Для иллюстрации произведённых действий на рис. 1 представлены реализация смоделированного доплеровского сигнала длиной 100 доплеровских периодов (a) и вычисленная корреляционная функция этого сигнала (b). Масштаб по оси времени составляет 0,1 доплеровского периода.

Зависимость среднеквадратичных отклонений оценок как функция длины реализации показывает, что с ростом длительности измерений (анализа) величины этих отклонений обратно пропорциональны корню квадратному из длительности. Соответствующие кривые представлены на рис. 2, где по оси абсцисс отложена длительность реализации сигнала в числе d доплеровских периодов, а по оси ординат — среднеквадратичное отклонение оценок частоты от её истинного значения σ .

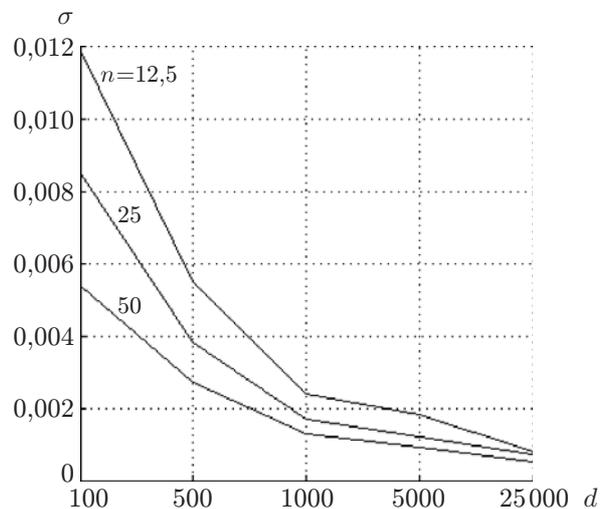


Рис. 2

На основе полученных данных можно определить быстродействие (полосу пропускания) предложенного алгоритма при заданной погрешности или погрешность измерения при заданном быстродействии (длительности измерений). Выполним это действие для случая, когда выбрана длительность измерений в числе доплеровских периодов d при заданном значении доплеровской частоты f_D . Здесь длительность измерений (в секундах)

$$T = d/f_D. \quad (4)$$

Тогда в соответствии с теоремой Котельникова наивысшая частота флуктуаций в спектре оцениваемой доплеровской частоты F может быть определена как

$$F = f_D/2d. \quad (5)$$

Так, например, если доплеровская частота равна 2 МГц, то при времени измерений, составляющем 100 доплеровских периодов, наивысшая частота флуктуаций скорости, которую без искажений можно восстановить на основании результатов, полученных с помощью предложенного алгоритма, составит 10 кГц. Относительная среднеквадратичная ошибка при этом, как следует из табл. 1, будет равна 0,5 %. При длинах реализации 250, 500, 2500 и 5000 наивысшие частоты составят 4 кГц, 2 кГц, 400 Гц и 200 Гц соответственно при среднеквадратичных ошибках, указанных в табл. 1.

Определение погрешностей предложенного алгоритма, обусловленных присутствием шума. Предварительные исследования показали, что для выбранной модели доплеровского сигнала предложенный алгоритм обладает высокой помехоустойчивостью. Чтобы подтвердить это его свойство количественно, был выполнен второй цикл компьютерных экспериментов. К полученной реализации доплеровского сигнала аддитивно добавлялся нормальный белый шум определённой мощности (MatLab, функция `awgn`). Отношения сигнал/шум (С/Ш) по мощности задавались как 0, -10 и -30 дБ. Далее для каждого из отношений выполнялась та же, что и ранее, программа экспериментов. Результаты для случая, когда в измерительном объёме сформировано 25 интерференционных полос, представлены в табл. 2.

Анализ данных табл. 2 показывает, что при снижении отношения С/Ш даже до -10 дБ среднеквадратичное отклонение оценки частоты по отношению к отклонениям в отсутствие шума практически не изменяется. Только когда отношение С/Ш составляет -30 дБ, среднеквадратическая ошибка оценки частоты увеличивается примерно на порядок, но и при этом составляет всего 6 % даже при короткой длине реализации в 100 доплеровских периодов.

Результаты выполненных вычислений представлены на рис. 3: a — белый нормальный шум, мощность которого равна мощности сигнала; b — доплеровский сигнал, к которому добавлен указанный шум; c — корреляционная функция этого зашумлённого сигнала.

Таблица 2

С/Ш, дБ	d									
	100		500		2500		5000		25000	
	m	σ								
0	0,9987	0,0084	0,9990	0,0039	0,9989	0,0018	0,9990	0,0013	0,9990	0,0006
-10	0,9986	0,0094	0,9987	0,0043	0,9989	0,0020	0,9990	0,0014	—	—
-30	0,9814	0,0603	0,9696	0,0555	0,9505	0,0445	0,9475	0,0445	—	—

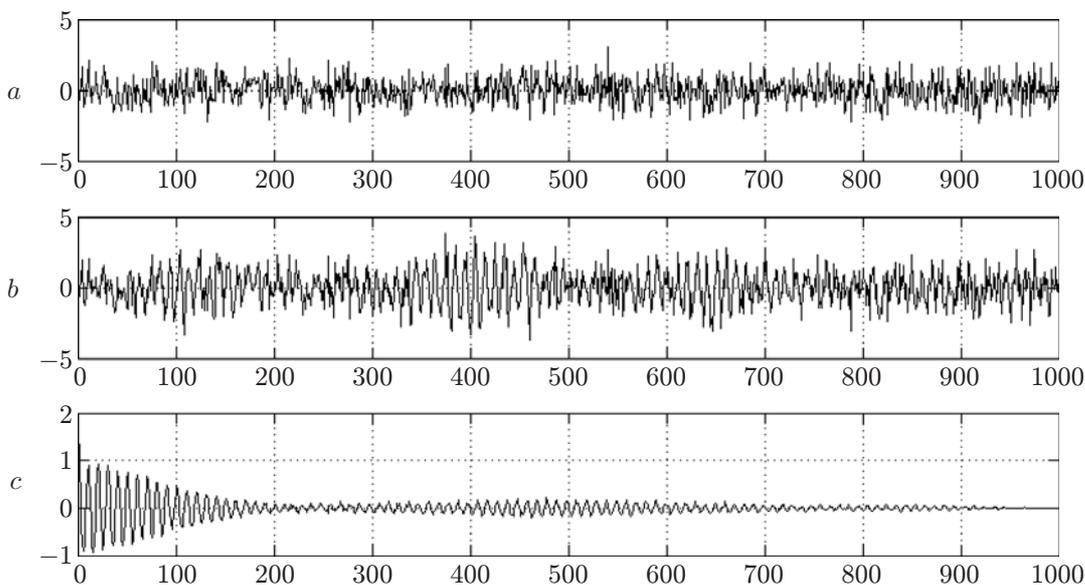


Рис. 3

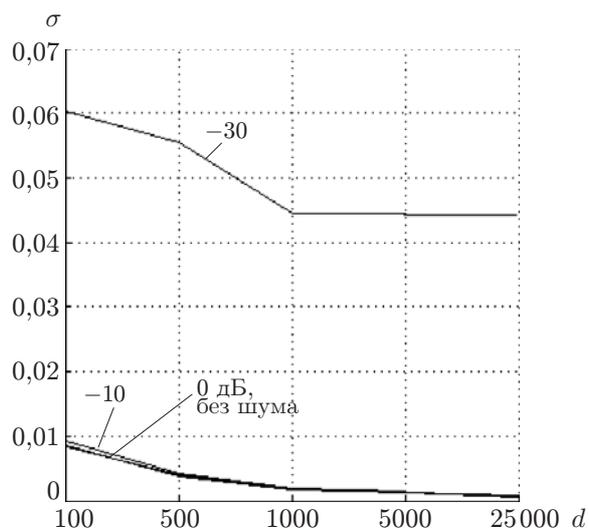


Рис. 4

Зависимость среднеквадратичных отклонений оценки как функции длины реализации для различных отношений С/Ш, когда в измерительном объеме присутствует 25 интерференционных полос, представлена на рис. 4.

Заключение. Анализ результатов моделирования квазиоптимального алгоритма получения оценок центральной частоты узкополосного нормального случайного процесса с гауссовым спектром, имитирующего (при выбранной модели сигнала) работу лазерных доплеровских измерительных систем, показал, что:

1. Квазиоптимальные оценки ЦЧ спектра не смещены.
2. Среднеквадратичное отклонение оценок обратно пропорционально времени измерения.

3. Для наиболее распространенного случая применения лазерных доплеровских измерительных систем, когда в измерительном объеме создано 25 интерференционных полос, а время измерений составляет 5000 доплеровских периодов, среднеквадратичное отклонение

оценок составляет всего лишь 0,12 %.

4. Предложенный алгоритм обладает высокой помехоустойчивостью: даже при отношении сигнал/шум, равном -10 дБ, и длительности измерений, составляющей 5000 доплеровских периодов, погрешность в оценке ЦЧС не отличается от случая, когда шум отсутствует, и составляет те же 0,12 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов В. И.** Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
2. **Волосюк В. К., Кравченко В. Ф.** Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации. М.: Физматлит, 2008. 703 с.
3. **Minkoff J.** Signal processing fundamentals and applications for communications and sensing systems. Boston: Artech Haus, 2002. 370 p.
4. **Соболев В. С.** К оценке частоты сигнала лазерного доплеровского анемометра // Автометрия. 2000. № 5. С. 108–115.
5. **Sobolev V. S., Feshenko A. A.** Accuracy Cramer—Rao bounds for a laser Doppler anemometer // IEEE Trans. Instrum. Meas. 2006. **55**, N 2. P. 659–665.
6. **Василенко Ю. Г., Дубнищев Ю. Н., Коронкевич В. П. и др.** Лазерные доплеровские измерители скорости. Новосибирск: Наука, 1975. 162 с.
7. **Коронкевич В. П., Соболев В. С., Дубнищев Ю. Н.** Лазерная интерферометрия. Новосибирск: Наука, 1985. 214 с.
8. **Дубнищев Ю. Н.** Теория и преобразование сигналов в оптических системах. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. 275 с.
9. **Frehlich R. G., Jadlovsy M.** Performance of mean-frequency estimators for Doppler radar and lidar // Journ. Atmos. Oceanic Technol. 1994. **11**. P. 1217–1230.
10. **Куликов Е. И.** Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 271 с.
11. **Куликов Е. И.** Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М.: Сов. радио, 1969. 243 с.
12. **Куликов Е. И., Трифонов А. П.** Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 295 с.

Поступила в редакцию 19 марта 2010 г.
