

Для определения в гиперзвуковом пограничном слое областей течения, обогащенных легким и тяжелым компонентами смеси, на фиг. 5 приведена координата η_* , при которой $\varphi_1 = \varphi_{1\infty}$ (обозначения такие же, как на фиг. 4). Эти результаты показывают, что с ростом числа Маха все большая часть пограничного слоя, эффективная толщина которого, как известно, при этом возрастает, обогащается легким компонентом. В связи с последними данными необходимо еще отметить, что в отличие от классической термодиффузионной колонны, противоточное движение в которой может быть неустойчивым, течение в гиперзвуковом пограничном слое при отрицательных градиентах давления (например, течение в сопле) будет всегда устойчивым.

Поступила 24 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонс К., Ферри В. Разделение изотопов методом термодиффузии. М.: ИЛ, 1947.
2. Гусев В. Н., Рябов В. В. Сферическое расширение бинарной смеси газов в затопленное пространство. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.
3. Cheng H. K. The blunt body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. JAS Paper N 63—92, 1963.
4. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963.
5. Keller H. B. A new difference scheme for parabolic problems. — In: Numerical Solution of Partial Differential Equations. Vol. 2. N. Y.: Academic Press, 1971.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М.: Наука, 1966.
7. Бочкарев А. А., Косинов В. А. и др. Обтекание затупленного тела сверхзвуковой струей азота и азотоводородной смеси низкой плотности. — ПМТФ, 1972, № 6.
8. Рябов В. В. Численное исследование сверхзвукового обтекания сферы бинарной смесью газов. — В кн.: Молекулярная газовая динамика. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
9. Romani F., Schilder R., Wortberg G. Theoretical and experimental investigation of thermal diffusion in binary mixtures of noble Gases. — In: Rarefied Gas Dynamics. Vol. 2. Paris: CEA, 1979.
10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

УДК 532.516

ЗАХВАТ ЖИДКОСТИ ПРИ ИЗВЛЕЧЕНИИ ИЗ НЕЕ ЦИЛИНДРА

В. И. Байков, З. П. Шульман, К. Энгельгардт

(Минск, Берлин)

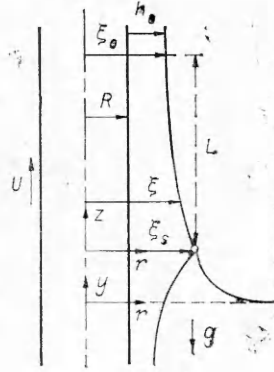
Знание толщины пленки на поверхности извлекаемого из жидкости цилиндрического тела важно, например, при нанесении изоляции на провода, а также в производстве стеклянного и синтетического волокон. Рассматривавшаяся в [1—3] теория ограничена областью малых скоростей извлечения цилиндра. Развиваемый ниже подход пригоден для весьма широкого диапазона скоростей извлечения.

1. Пусть из достаточно большого объема жидкости с постоянной скоростью U вертикально вверх извлекается цилиндр радиуса R (фиг. 1). Толщина пленки, остающейся на его поверхности, определяется взаимодействием внутреннего трения, массовых сил и поверхностного натяжения. Степень влияния перечисленных сил на захват жидкости определяется в первую очередь скоростью извлечения и физическими свойствами среды. Жидкость в пленке одновременно увлекается цилиндром и стекает под действием сил тяжести обратно в ванну. Поэтому на поверхности пленки должна существовать линия застоя, где направление течения изменяется на противоположное. Проходящие через нее линии тока отделяют

пристеночную часть жидкости, уносимую цилиндром от остающейся в ванне. Выпишем для каждой из этих областей уравнения движения и найдем условие сшивки их решений.

2. Ось z направим вдоль течения по оси цилиндра, ось r перпендикулярна к ней и проходит через линию застоя. Область увлечения снизу ограничена плоскостью, перпендикулярной к оси цилиндра и проходящей через линию застоя, а сверху переходит в область постоянной толщины пленки $h_0 = \xi_0 - R$. Из физических соображений ясно, что характерный размер этой области L значительно превышает h_0 , т. е. $h_0/L = \varepsilon \ll 1$.

Запишем уравнения Навье — Стокса и граничные условия для области увлечения:



Фиг. 1

$$(2.1) \quad u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0;$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{2d\xi}{dz} \left[1 - \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 \right]^{-1} \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0 \quad \text{при } r = \xi,$$

$$p - p_0 + \sigma \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d^2 \xi}{dz^2} \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 \right]^{-1} - \frac{1}{\xi} \right\} =$$

$$= 2\mu \left[1 - \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right\} \quad \text{при } r = \xi;$$

$$(2.3) \quad u = U, \quad v = 0 \quad \text{при } r = R;$$

$$(2.4) \quad v = u \frac{d\xi}{dz} \quad \text{при } r = \xi,$$

где z, r — цилиндрические координаты; u, v — составляющие скорости по осям z, r соответственно; p — давление; $p_0 = \text{const}$ — давление в газе; ρ — плотность; μ, ν — динамическая и кинематическая вязкости соответственно; g — ускорение свободного падения; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ξ — радиус свободной поверхности пленки.

Уравнения (2.2) выражают отсутствие касательных и нормальных напряжений на поверхности пленки, а равенство (2.4) является обычным кинематическим условием на свободной поверхности. Полагаем толщину увлекаемой пленки соизмеримой с радиусом цилиндра R . Введем безразмерные величины:

$$u^* = u/U, \quad v^* = v/\varepsilon U, \quad z^* = \varepsilon z/R, \quad r^* = r/R, \quad p^* = pa/\sigma,$$

$$Ca = \mu U \sigma, \quad Go = R(\rho g/2\sigma)^{1/2}, \quad \gamma = (\sigma/\rho)(g\nu^4)^{-1/3}, \quad a = (2\sigma/\rho g)^{1/2}.$$

Здесь Ca — безразмерная скорость извлечения; Go — число Гоучера; a — капиллярная постоянная; γ — параметр, связывающий физические свойства жидкости. Пренебрегая в системе (2.1)—(2.4) членами порядка ε^2 , получим

$$(2.5) \quad u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right);$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right], \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0;$$

$$(2.7) \quad p - p_0 + \sigma \left(\frac{d^2 \xi}{dz^2} - \frac{1}{\xi} \right) = 2 \frac{\mu}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \quad \text{при } r = \xi, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

при $r = \xi$.

Граничные условия (2.3), (2.4) остаются неизменными. Инерционные члены в (2.5) имеют порядок $\epsilon Ca Go \gamma^{3/2}$ и в зависимости от соотношения Ca , Go и γ могут быть порядка ϵ^2 и меньше. В дальнейшем будем их игнорировать.

Проинтегрируем (2.6) и воспользуемся (2.7), тогда

$$(2.8) \quad p - p_0 = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \Big|_{r=\xi} \right] - \sigma \left(\frac{d^2 \xi}{dz^2} - \frac{1}{\xi} \right).$$

Подстановкой (2.8) в (2.5) и отбрасыванием появляющихся членов порядка ϵ^2 окончательно находим уравнения для области увлечения:

$$(2.9) \quad \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{d^3 \xi}{dz^3} + \frac{1}{\xi^2} \frac{d\xi}{dz} \right) - g = 0;$$

$$(2.10) \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0;$$

$$(2.11) \quad u = U \quad \text{при} \quad r = R, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = \xi, \quad v = u \frac{d\xi}{dz} \quad \text{при} \quad r = \xi.$$

Уравнение неразрывности (2.10) представим в интегральном виде. Для этого осредним (2.10) по r от R до ξ , изменим порядок дифференцирования и интегрирования, учтем второе условие (2.11) и введем расход жидкости

$$Q = 2\pi \int_R^{\xi} r u dr,$$

в результате получаем

$$2\pi \frac{\partial}{\partial z} \int_R^{\xi} r u dr = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, для расхода имеем $Q = \text{const}$.

Двукратное интегрирование (2.9) с последующим удовлетворением граничных условий (2.11) дает

$$(2.12) \quad u = U - \frac{AR^2}{4\mu} \left(2 \frac{\xi^2}{R^2} \ln \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2} + 1 \right),$$

$$\text{где} \quad A = \rho g - \sigma \left(\frac{d^3 \xi}{dz^3} + \frac{1}{\xi^2} \frac{d\xi}{dz} \right).$$

Для расхода Q находим

$$(2.13) \quad \frac{Q}{2\pi} = \frac{UR^2}{2} \left(\frac{\xi^2}{R^2} - 1 \right) - \frac{AR^4}{4\mu} \left(\frac{\xi^4}{R^4} \ln \frac{\xi}{R} - \frac{3\xi^4}{4R^4} + \frac{\xi^2}{R^2} - \frac{1}{4} \right).$$

В области постоянной толщины пленки все производные от толщины пленки по координате z равны нулю, и тогда

$$(2.14) \quad \frac{Q}{2\pi} = \frac{UR^2}{2} \left(\frac{\xi_0^2}{R^2} - 1 \right) - \frac{\rho g R^4}{4\mu} \left(\frac{\xi_0^4}{R^4} \ln \frac{\xi_0}{R} - \frac{3\xi_0^4}{4R^4} + \frac{\xi_0^2}{R^2} - \frac{1}{4} \right).$$

Найдем положение линии застоя ξ_s . По определению на ней поверхностная скорость пленки $u|_{r=\xi}$ равна нулю, что позволяет из (2.12) определить

$$-\frac{AR^2}{4\mu} = U \left(2 \frac{\xi_s^2}{R^2} \ln \frac{\xi_s}{R} - \frac{\xi_s^2}{R^2} + 1 \right)^{-1},$$

а из формулы (2.13)

$$(2.15) \quad \frac{Q}{2\pi} = \frac{UR^2}{2} \left(\frac{\xi_s^2}{R^2} - 1 \right) - \frac{UR^4}{2\xi_s^2 \ln \frac{\xi_s}{R} - \xi_s^2 + R^2} \left(\frac{\xi_s^4}{R^4} \ln \frac{\xi_s}{R} - \frac{3\xi_s^4}{4R^4} + \frac{\xi_s^2}{R^2} - \frac{1}{4} \right).$$

Подстановка (2.14) в (2.13) и переход к безразмерным переменным и параметрам

$$(2.16) \quad H = \xi/R, \quad x = z/R, \quad H_s = \xi_s/R, \quad S = \xi_0/R, \quad \text{Ca} = \mu U/\sigma, \\ \text{Go} = R(\rho g/2\sigma)^{1/2}$$

приводит к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению для толщины пленки в области увлечения

$$(2.17) \quad \frac{d^3 H}{dx^3} = -\frac{1}{H^2} \frac{dH}{dx} + \frac{8(\text{Ca} S^2 - H^2) - 2\text{Go}^2(4S^2 \ln S - 3S^4 + 4S^2 - 1)}{4H^4 \ln H - 3H^4 + 4H^2 - 1} + 2\text{Go}^2.$$

Оно справедливо в диапазоне изменения H от S до H_s , определяемого из обезразмеренного соотношения (2.15):

$$(2.18) \quad H_s^2 - \frac{4H_s^4 \ln H_s - 3H_s^4 + 4H_s^2 - 1}{2(2H_s^2 \ln H_s - H_s^2 + 1)} = S^2 - \frac{\text{Go}^2}{4\text{Ca}} (4S^4 \ln S - 3S^4 + 4S^2 - 1).$$

При интегрировании уравнения (2.17) появляются три произвольные постоянные. Их можно найти из условий

$$H \rightarrow S, \quad \frac{dH}{dx} \rightarrow 0, \quad \frac{d^2 H}{dx^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

В уравнении (2.17) фигурирует еще одна неизвестная величина S (или в размерном виде ξ_0 , связанная с расходом Q соотношением (2.14)). Для ее определения рассмотрим область течения, находящуюся ниже линии застоя.

3. Здесь характерная скорость движения жидкости меньше темпа извлечения пластины, а характерный масштаб движения жидкости для случая широкой и глубокой ванны много больше толщины увлекаемой пленки. Поэтому пространственные производные скоростей будут значительно меньше, чем в области увлечения, и ими можно в системе уравнений (2.1)–(2.4) пренебречь. Тогда форму поверхности определяют соотношения Эйлера

$$(3.1) \quad \partial p/\partial y + \rho g = 0, \quad \partial p/\partial r = 0$$

с граничным условием

$$(3.2) \quad p_0 - p = \frac{\sigma}{\left[1 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2\right]^{1/2}} \left\{ \frac{d^2 \xi}{dy^2} \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2\right]^{-1} - \frac{1}{\xi} \right\} \quad \text{при } r = \xi.$$

Здесь координата y совпадает с осью z , но отсчитывается от горизонтальной поверхности жидкости в ванне. Из (3.1), (3.2) получаем уравнение

$$(3.3) \quad \frac{d^2 \xi}{dy^2} \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2\right]^{-3/2} - \frac{1}{\xi} \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{\rho g}{\sigma} y,$$

совпадающее с уравнением для формы поверхности жидкости в условиях статического мениска. Решение уравнения (3.3) следует искать при граничных условиях

$$(3.4) \quad d\xi/dy = 0 \quad \text{при } y = b, \quad d\xi/dy \rightarrow -\infty \quad \text{при } y \rightarrow 0,$$

где b — высота подъема жидкости по поверхности цилиндра под дейст-

вием капиллярных сил. В результате численного интегрирования краевой задачи (3.3), (3.4) для неподвижного цилиндра была найдена эмпирическая формула [4]

$$b = \left(\frac{2\rho g}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2,4 \text{Go}^{0,85}}{1 + 2,4 \text{Go}^{0,85}}$$

которая при $\text{Go} = 3$ дает погрешность до 1%, уменьшающуюся с падением числа Go . При движении цилиндра необходимо учесть влияние извлеченной пленки на форму поверхности статического мениска. Полагаем, что статический мениск примыкает не к твердой стенке, а к жидкой пленке с толщиной $h_0 = \xi_0 - R$. Это означает, что при определении максимальной высоты подъема b следует за радиус цилиндрического тела принимать не R , а ξ_0 . Тогда для статического мениска при увлечении

$$(3.5) \quad b = \left(\frac{2\rho g}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2,4 (\text{Go} S)^{0,85}}{1 + 2,4 (\text{Go} S)^{0,85}}$$

Теперь задача (3.3), (3.4) с учетом (3.5) из краевой превратилась в задачу Коши. Ее решение несложно найти путем численного интегрирования.

4. Для сшивки решений (2.17), (3.3) потребуем выполнения на линии застоя ξ_s равенства нормальных напряжений, действующих со стороны жидкости в каждой из областей течения, т. е. приравняем правые части соотношений (2.8) и (3.2). Поскольку первый член в правой части (2.8) по линии застоя того же порядка малости, что и члены, отброшенные в уравнении (3.2), то его необходимо опустить. Тогда

$$\left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} - \frac{1}{\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_s} = \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d^2 \xi}{dy^2} \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dy} \right)^2 \right]^{-1} - \frac{1}{\xi} \right\} \Big|_{\xi=\xi_s},$$

или в безразмерном виде с учетом (2.16), (3.3)

$$(4.1) \quad \left(\frac{d^2 H}{dx^2} - \frac{1}{H} \right) \Big|_{H=H_s} = 2 \text{Go}^2 x_1 \Big|_{H=H_s},$$

где $x_1 = y/R$.

Таким образом, схема решения задачи такова. Задаем параметры Ca и Go и выбираем некоторое значение S и по соотношению (2.18) методом Ньютона находим H_s . Затем методом Рунге — Кутты численно решаем уравнения (2.17), (3.3) и определяем из (2.17) величину $(d^2 H/dx^2 - 1/H) \Big|_{H=H_s}$, а из (3.3) — значение x_1 , при котором $H = H_s$, и проверяем выполнение условия (4.1). Простым итерационным способом находим выполняющее это требование значение S при заданных Ca и Go . Результаты вычислений приведены на фиг. 2, где на оси ординат отложена безразмерная толщина пленки

$$T_0 = (\xi_0 - R)(\rho g/\mu U)^{1/2},$$

которая связана с безразмерным радиусом пленки S соотношением

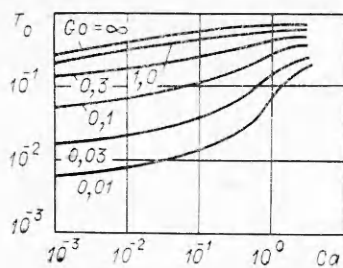
$$T_0 = (S - 1)(2/\text{Ca})^{1/2} \text{Go}.$$

В экспериментах зачастую измеряется не толщина пленки $h_0 = \xi_0 - R$, а расход жидкости Q , и в качестве толщины вводится расходная толщина пленки h_∞

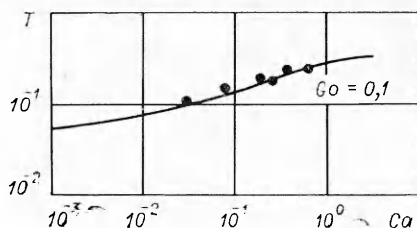
$$\pi(h_\infty + R)^2 - \pi R^2 = Q/U.$$

Тогда с учетом (2.14), (1.16)

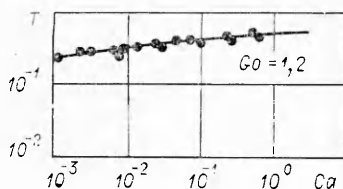
$$\left(\frac{h_\infty}{R} + 1 \right)^2 = S^2 - \frac{\text{Go}^2}{\text{Ca}} \left(S^4 \ln S - \frac{3}{4} S^4 + S^2 - \frac{1}{4} \right).$$



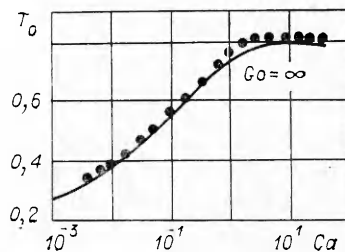
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Введем безразмерную расходную толщину $T = h_{\infty}(\rho g/\mu U)^{1/2}$, в результате

$$[T Go (2/Ca)^{1/2} + 1]^2 = S^2 - \frac{Go^2}{Ca} \left(S^4 \ln S - \frac{3}{4} S^4 + S^2 - \frac{1}{4} \right).$$

На фиг. 3—5 приведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов, заимствованных из [3, 5], которое показывает их хорошее согласие во всем диапазоне скоростей извлечения, полученных в эксперименте.

Поступила 24 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерягин Б. В. Теория нанесения вязкой жидкости на вытаскиваемое из нее волокно или проволоку. — ПМТФ, 1963, № 3.
2. White D. A., Tallmadge J. A. A theory of withdrawal of cylinders from liquid baths. — AIChE Journ., 1966, vol. 12, N 2.
3. White D. A., Tallmadge J. A. A gravity corrected theory cylinder withdrawal. — AIChE Journ., 1967, vol. 13, N 4.
4. White D. A., Tallmadge J. A. Static menisci on the outside of cylinders. — J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, N 2.
5. Spiers R. P., Subbaraman C. V., Wilkinson W. L. Free coating of a newtonian liquid onto a vertical surface. — Chem. Engng Sci., 1974, vol. 29, N 3.

УДК 532.52

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЯЗКИХ СТРУЙ

В. Н. Коровкин, Ю. А. Соковинин

(Новополоцк, Ленинград)

Известны автомодельные решения [1—3] задачи о распространении ламинарной плоской (свободной и полуограниченной) струи — источника в затопленном пространстве. Полученные в этих работах зависимости имеют существенный недостаток: возникает особенность при $x \rightarrow 0$. Это означает, что с помощью полученных формул можно правильно описать течение только при больших значениях x . При разыскании неавтомодельного решения для струи, истекающей из щели конечного размера, был установлен вид функции тока и найдены в аналитическом виде первые три члена разложения (динамическая задача) [4]. Неавтомодельные тепловые задачи рассмотрены в [5, 6],