

УДК 532.5

ТЕПЛОПЕРЕНОС В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ КАРРО, ОБУСЛОВЛЕННОМ РАСТЯЖЕНИЕМ ПЛАСТИНЫ В РАДИАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ: ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

М. Хан, Хашим

Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан
E-mails: mkhan_21@yahoo.com, hashim_alik@yahoo.com

Изучается теплоперенос в осесимметричном течении жидкости Карро на растягиваемой в радиальном направлении пластине. С использованием уравнения состояния Карро описывается движение как псевдопластической, так и дилатантной жидкости. В предположении пограничного слоя строятся уравнения двумерного течения жидкости Карро. С использованием локальных преобразований подобия уравнения задачи сводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения для скорости и температуры решаются методом Рунге — Кутты пятого порядка совместно с методом стрельбы. Получены численные решения задачи при различных значениях параметров. Обнаружено, что в случае псевдопластической жидкости с увеличением числа Вайсенберга существенно уменьшаются скорость потока и толщина теплового пограничного слоя, в случае дилатантной жидкости имеют место обратные зависимости. Проведено сравнение полученных результатов численных расчетов с известными данными.

Ключевые слова: осесимметричное течение, жидкость Карро, теплоперенос, растяжение листа, метод стрельбы.

DOI: 10.15372/PMTF20170305

Введение. В последнее время течения вдоль растягивающейся поверхности изучаются многими исследователями, поскольку такие течения встречаются в различных технологических процессах (аэродинамическая экструзия полимерных пластин, охлаждение металлических пластин, изготовление электронных чипов, кристаллизация жидких пленок при конденсации, горячая прокатка металла и др.). Во многих работах содержатся результаты исследований плоского течения пограничного слоя вдоль растягивающейся поверхности. В то же время имеется незначительное число работ, посвященных изучению осесимметричного течения вдоль пластины, растягиваемой в радиальном направлении.

В работе [1] получены точное асимптотическое и численное решения классической задачи об осесимметричном течении, обусловленном растяжением пластины. В [2] также получены точное и численное решения задачи об осесимметричном течении вдоль растягиваемой пластины с учетом частичного проскальзывания. Влияние проскальзывания на осесимметричное течение электропроводящей вязкоупругой жидкости вдоль поверхности, растягиваемой в радиальном направлении со скоростью, изменяющейся по линейному

закону, изучалось в [3]. В работе [4] показано, что в случае, когда скорость растяжения пластины пропорциональна x^3 , существует точное решение задачи об осесимметричном течении вдоль растягиваемой пластины. В [5] получены аналитическое и численное решения задачи об осесимметричном течении с учетом проскальзывания электропроводящей вязкой жидкости в случае, когда скорость растяжения пластины в радиальном направлении меняется по нелинейному закону. В работе [6] исследовано влияние диффузии тепла на осесимметричное течение неньютоновской жидкости. В [7] получены численное и аналитическое решения задачи об осесимметричном течении наножидкости вдоль пластины, растягиваемой по нелинейному закону. Проведено сравнение этих решений и показано, что они различаются незначительно.

В последнее время существенно возрос интерес к исследованию течений неньютоновской жидкости с учетом теплопереноса, поскольку такие течения встречаются во многих технологических процессах (течение ядерного суспензированного топлива, нефтедобыча, обработка пищевых продуктов, производство бумаги, стекла, полимеров, экструзия полимеров и металлов). Особое внимание уделяется изучению течения в пограничном слое неньютоновской жидкости. Некоторые подходы к построению математических моделей течения неньютоновской жидкости и методы решения задач приведены в работе [8]. Для моделирования течения неньютоновской жидкости были предложены различные уравнения состояния (степенная модель, модель Эллиса, модель Карро, модель Бингама) [8]. При использовании степенной модели вязкой жидкости для описания движения псевдопластической жидкости кажущаяся вязкость (вязкость при данном напряжении сдвига) при малой скорости сдвига практически равна нулю. Вне пограничного слоя при малых скоростях сдвига большинство жидкостей имеют конечную достаточно малую вязкость. Следовательно, модели вязкой жидкости, в соответствии с которыми вязкость отлична от нуля при стремлении скорости сдвига к нулю, более точно описывают движение реальных жидкостей. Такие модели широко использовались при изучении химико-технологических процессов и практически не применялись при моделировании движения вязких жидкостей.

В отличие от уравнения состояния ньютоновской жидкости уравнение состояния, предложенное П. Карро [9], содержит четыре дополнительных параметра и может быть использовано при моделировании движения широкого класса вязких жидкостей. В частности, модель Карро применима для моделирования движения некоторых водных и полимерных растворов, а также расплавов. Впервые модель Карро была использована при изучении течения сильновязкой жидкости вокруг сферы [10]. С помощью вариационного принципа в [10] получена верхняя оценка коэффициента сопротивления. Результаты согласуются с полученными авторами этой работы экспериментальными данными и результатами численных расчетов [11]. В [12] численно решена задача о теплопереносе в неньютоновской жидкости Карро, движущейся между двумя вращающимися соосными вертикальными цилиндрами. В [13] методом Галеркина решена задача об осесимметричном течении псевдопластической жидкости Карро.

В данной работе численно решается задача об осесимметричном течении в пограничном слое жидкости Карро на пластине, растягиваемой в радиальном направлении. При исследовании теплового пограничного слоя учитывается теплоперенос. Математическая модель с учетом предположений, используемых в теории пограничного слоя, представляет собой систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. С помощью локальных преобразований подобия задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом Рунге — Кутты пятого порядка. Исследуются зависимости скорости и температуры от показателя степени n в уравнении состояния, чисел Вайсенберга We и Прандтля Pr . Авторам неизвестны работы, в которых решалась такая задача.

1. Определяющие уравнения. Уравнение закона сохранения массы и линейное уравнение закона изменения количества движения для установившегося движения несжимаемой жидкости имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \rho(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= -\nabla p + \operatorname{div} S,\end{aligned}$$

где \mathbf{V} — вектор скорости; ρ — плотность жидкости; p — давление; S — тензор избыточных напряжений. Тензор избыточных напряжений S для несжимаемой жидкости Карро определяется соотношением

$$S = \mu A_1, \quad \mu = \mu(\dot{\gamma}),$$

где $A_1 = \nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T$ — тензор скоростей деформаций; $\mu(\dot{\gamma})$ — эффективная вязкость ньютоновской жидкости,

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\operatorname{tr}(A_1^2)/2}, \quad (1)$$

tr — след тензора.

Эффективная вязкость в модели Карро определяется следующим образом [9]:

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + (\Gamma\dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2}.$$

Здесь n — показатель степени (при $0 < n < 1$ жидкость является псевдопластической, при $n > 1$ — дилатантной, при $n = 1$ — ньютоновской); μ_∞ , μ_0 — значения вязкости при бесконечной и нулевой скоростях сдвига соответственно; Γ — время релаксации. Далее используется уравнение состояния при $\mu_\infty = 0$:

$$\mu = \mu_0 [1 + (\Gamma\dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2}.$$

Задача формулируется в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . В случае осесимметричной задачи $\partial/\partial\theta = 0$. В двумерной осесимметричной задаче вектор скорости представляется в следующем виде:

$$\mathbf{V} = [u(r, z), 0, w(r, z)] \quad (2)$$

(u, w — компоненты вектора скорости в радиальном и осевом направлениях соответственно).

С учетом (2) выражение (1) принимает вид

$$\dot{\gamma} = \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right]^{1/2}.$$

С учетом сказанного выше система дифференциальных уравнений задачи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0; \\ \rho\left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r}, \\ \rho\left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rz}) + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z}.\end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$S_{rr} = 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial r} \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2},$$

$$\begin{aligned}
S_{\theta\theta} &= 2 \frac{u}{r} \mu_0 \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2}, \\
S_{zz} &= 2\mu_0 \frac{\partial w}{\partial z} \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2}, \\
S_{rz} &= \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя выражения для S_{rr} , $S_{\theta\theta}$, S_{zz} , S_{rz} (4) в уравнения (3), получаем

$$\begin{aligned}
\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
&\quad + 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
&\quad + \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2}, \\
\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \times \\
&\quad \times \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
&\quad + 2\mu_0 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
&\quad + \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
&\quad + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \left\{ 1 + \Gamma^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2u^2}{r^2} \right] \right\}^{(n-1)/2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

При $n = 1$ или $\Gamma = 0$ уравнения (5) переходят в уравнения для ньютоновской жидкости.

Введем следующие безразмерные величины:

$$u^* = \frac{u}{U}, \quad w^* = \frac{w}{U}, \quad r^* = \frac{r}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

(L , U — характерные длина и скорость растяжения).

В безразмерных переменных уравнения (5) записываются в виде

$$\begin{aligned}
u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \varepsilon_1 \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{u^*}{r^*} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left\{ 1 + \varepsilon_2 \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{2u^{*2}}{r^{*2}} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
&\quad + 2\varepsilon_1 \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ 1 + \varepsilon_2 \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{2u^{*2}}{r^{*2}} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
&\quad + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ 1 + \varepsilon_2 \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{2u^{*2}}{r^{*2}} \right] \right\}^{(n-1)/2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = & -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) \times \\
 & \times \left\{ 1 + \varepsilon_2 \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{2u^{*2}}{r^{*2}} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
 & + 2\varepsilon_1 \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ 1 + \varepsilon_2 \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{2u^{*2}}{r^{*2}} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
 & + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ 1 + \varepsilon_2 \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{2u^{*2}}{r^{*2}} \right] \right\}^{(n-1)/2} + \\
 & + \frac{\varepsilon_1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \left\{ 1 + \varepsilon_2 \left[2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{2u^{*2}}{r^{*2}} \right] \right\}^{(n-1)/2},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — безразмерные параметры:

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu_0/\rho}{LU}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\Gamma^2}{(L/U)^2}.$$

При выводе уравнений пограничного слоя используются следующие оценки. Предполагается, что $O(u) = 1, O(r) = 1, O(p) = 1$, а w, z — величины порядка δ : $O(w) = \delta = O(z)$, безразмерные параметры ε_1 и ε_2 — величины порядка δ^2 : $O(\varepsilon_1) = \delta^2 = O(\varepsilon_2)$ (δ — толщина пограничного слоя). С учетом этих предположений уравнения (6) упрощаются и приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = & -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \left[1 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} + \\
 & + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \frac{\partial}{\partial z^*} \left[1 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{(n-1)/2}, \\
 0 = & -\frac{\partial p^*}{\partial z^*}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В размерных переменных уравнения (7) имеют вид

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left[1 + \Gamma^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[1 + \Gamma^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]^{(n-1)/2}, \\
 0 = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},
 \end{aligned}$$

где $\nu = \mu_0/\rho$ — кинематическая вязкость.

2. Постановка задачи. Рассматривается двумерная осесимметричная задача о течении несжимаемой жидкости Карро вдоль растягиваемой пластины. Пластина расположена в плоскости $z = 0$, жидкость занимает полупространство $z > 0$. Пластина растягивается в своей плоскости в радиальном направлении со скоростью $U = br^m$. Поверхность пластины имеет постоянную температуру T_w , температура жидкости на бесконечности равна T_∞ , причем $T_w > T_\infty$.

Следует отметить, что в рассматриваемой задаче движение жидкости в основном обусловлено растяжением пластины, поэтому градиент давления не влияет на характер течения.

С учетом принятых допущений уравнения конвективного течения в пограничном слое записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left[1 + \Gamma^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} + \nu(n-1) \Gamma^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left[1 + \Gamma^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]^{(n-3)/2},$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

$$z = 0: \quad u = U = br^m, \quad w = 0, \quad T = T_w,$$

$$z \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty,$$

где $\alpha = k/(\rho c_p)$; c_p — удельная теплоемкость; k — теплопроводность; $m > 0$ — показатель степени в законе для скорости растяжения пластины; T — температура жидкости.

Рассмотрим локальные преобразования подобия

$$\psi(r, z) = -r^2 U \text{Re}^{-1/2} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \eta = \frac{z}{r} \text{Re}^{1/2}, \quad (8)$$

где $\psi(r, z)$ — функция тока Стокса; $\text{Re} = rU/\nu$ — локальное число Рейнольдса. С учетом (8) выражения для компонент вектора скорости записываются в виде

$$u = U f'(\eta), \quad w = -U \text{Re}^{-1/2} \left(\frac{m+3}{2} f(\eta) + \frac{m-1}{2} \eta f'(\eta) \right),$$

уравнения задачи — в виде

$$[1 + n \text{We}^2 (f'')^2] [1 + \text{We}^2 (f'')^2]^{(n-3)/2} f''' + [(3+m)/2] f f'' - m (f')^2 = 0, \quad (9)$$

$$\theta'' + [(3+m)/2] \text{Pr} f \theta' = 0;$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad \theta(0) = 1; \quad (10)$$

$$f'(\infty) \rightarrow 0, \quad \theta(\infty) \rightarrow 0. \quad (11)$$

Здесь $\text{We} = (b^3 \Gamma^2 r^{3m-1} / \nu)^{1/2}$ — локальное число Вайсенберга; $\text{Pr} = \mu_0 c_p / k$ — число Прандтля.

Для локального напряжения сдвига и локального потока тепла на поверхности пластины имеют место следующие выражения:

$$\tau_w = \mu_0 \frac{\partial u}{\partial z} \left\{ \left[1 + \Gamma^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \right\} \Big|_{z=0}, \quad q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}.$$

С использованием величин τ_w , q_w записываются выражения для локального коэффициента поверхностного трения C_f и локального числа Нуссельта:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U^2}, \quad \text{Nu} = \frac{r q_w}{k(T_w - T_\infty)},$$

следовательно,

$$\text{Re}^{1/2} C_f = f''(0) [1 + \text{We}^2 (f''(0))^2]^{(n-1)/2}, \quad \text{Re}^{-1/2} \text{Nu} = -\theta'(0).$$

3. Численный метод. Система нелинейных уравнений (9) с краевыми условиями (10), (11) заменялась системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f' = p, \quad p' = q, \quad (12)$$

$$q' = \frac{mp^2 - [(m+3)/2]fq}{(1+n\text{We}^2q^2)(1+\text{We}^2q^2)^{(n-3)/2}}, \quad \theta' = s, \quad s' = -\frac{3+m}{2} \text{Pr} fs$$

с начальными условиями

$$f(0) = 0, \quad p(0) = 1, \quad \theta(0) = 1. \quad (13)$$

Для корректной формулировки начальной задачи для системы уравнений (12) условий (13) недостаточно. Необходимо задать также значения $q(0)$ (значение $f''(0)$) и $s(0)$ (значение $\theta'(0)$), которые не известны. Методом Рунге — Кутты пятого порядка решается задача Коши. По вычисленному решению определяются значения $f'(\eta)$ и $\theta(\eta)$, которые сравниваются со значениями $f'(\eta_\infty) = 0$ и $\theta(\eta_\infty) = 0$. Затем с использованием метода Ньютона — Рафсона находят новые приближения для $f''(0)$ и $\theta'(0)$. Итерации продолжают до тех пор, пока вычисленные значения $f'(\eta_\infty)$ и $\theta(\eta_\infty)$ не будут отличаться от значений, заданных в краевых условиях (11), в пятом знаке после запятой. Вычисления проводятся с шагом $\Delta\eta = 0,01$.

4. Результаты исследования и их обсуждение. Результаты численного решения задачи представлены на рис. 1–4.

На рис. 1,а приведена зависимость $f'(\eta)$ ($u = Uf'(\eta)$) при различных значениях показателя n для случаев линейного и нелинейного законов растяжения пластины. Видно, что радиальная скорость возрастает с увеличением показателя n . На рис. 1,б представлена зависимость $\theta(\eta)$. Видно, что с увеличением показателя n температура уменьшается. Из приведенных на рис. 1 зависимостей следует, что с увеличением показателя n толщина гидродинамического пограничного слоя увеличивается, а толщина теплового — уменьшается.

На рис. 2 показана зависимость $f'(\eta)$ для псевдопластической ($n = 0,5$) и дилатантной ($n = 1,5$) жидкостей Карро при различных значениях параметра m . С увеличением параметра m скорость и толщина гидродинамического пограничного слоя как для псевдопластической, так и для дилатантной жидкости уменьшаются. В случае псевдопластической жидкости толщина гидродинамического пограничного слоя меньше, чем в случае дилатантной жидкости.

На рис. 3 приведены зависимости $f'(\eta)$ и $\theta(\eta)$ для псевдопластической ($n = 0,5$) и дилатантной ($n = 1,5$) жидкостей Карро при различных значениях числа Вайсенберга We . Из рис. 3,а следует, что с увеличением числа Вайсенберга скорость псевдопластической жидкости Карро уменьшается, а дилатантной — увеличивается. Из рис. 3,б следует, что с увеличением числа Вайсенберга температура псевдопластической жидкости увеличива-

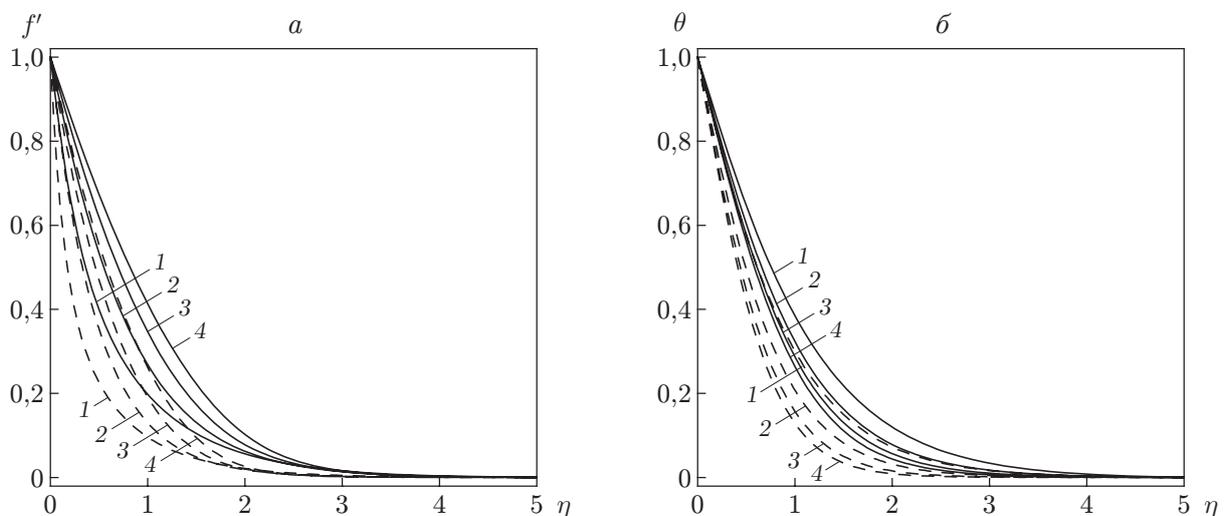


Рис. 1. Зависимости $f'(\eta)$ (а) и $\theta(\eta)$ (б) при $Pr = 1$, $We = 3$ и различных значениях показателей m , n :

сплошные линии — $m = 1$, штриховые — $m = 5$; 1 — $n = 0,5$, 2 — $n = 1,0$, 3 — $n = 1,5$, 4 — $n = 2,0$

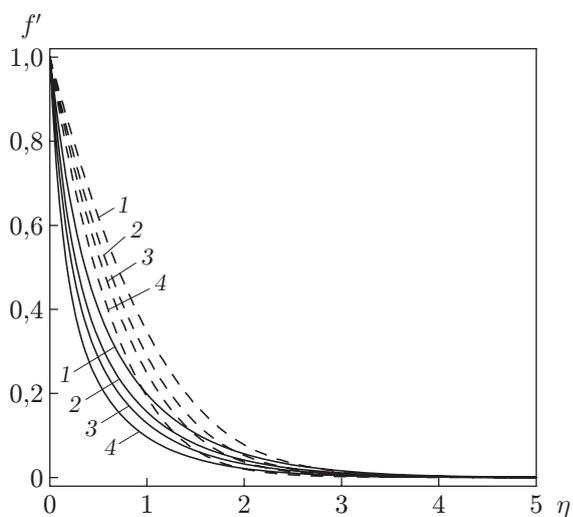


Рис. 2. Зависимость $f'(\eta)$ при $We = 3$ и различных значениях параметров n, m : сплошные линии — $n = 0,5$, штриховые — $n = 1,5$; 1 — $m = 1$, 2 — $m = 2$, 3 — $m = 3$, 4 — $m = 5$

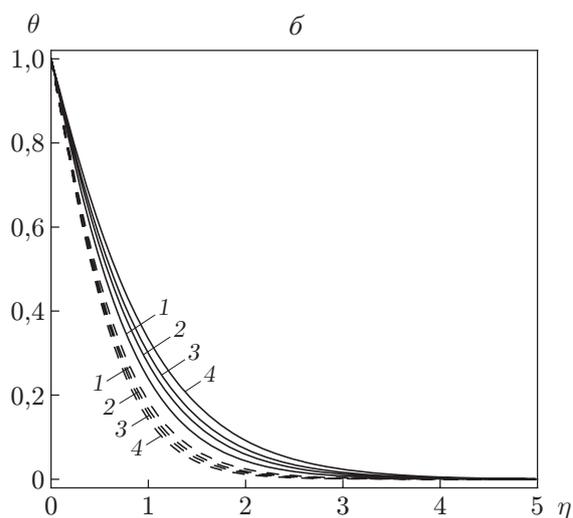
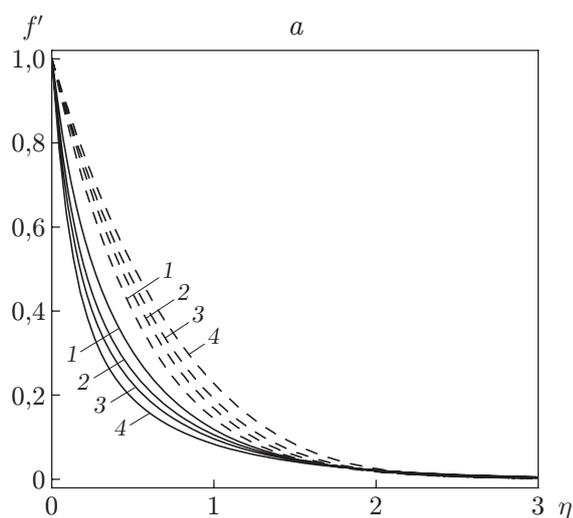


Рис. 3. Зависимости $f'(\eta)$ (а) и $\theta(\eta)$ (б) при $m = 5$, $Pr = 1$ и различных значениях параметра n и числа Вейсенберга We : сплошные линии — $n = 0,5$, штриховые — $n = 1,5$; 1 — $We = 1$, 2 — $We = 2$, 3 — $We = 3$, 4 — $We = 5$

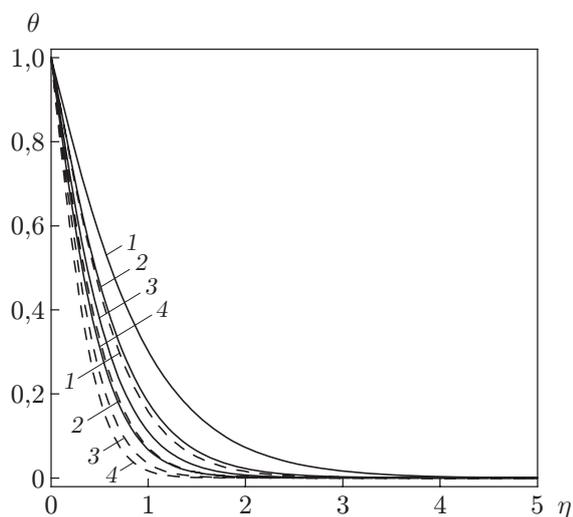


Рис. 4. Зависимость $\theta(\eta)$ при $m = 5$, $We = 3$ и различных значениях параметра n и числа Прандтля Pr : сплошные линии — $n = 0,5$, штриховые — $n = 1,5$; 1 — $Pr = 1,0$, 2 — $Pr = 1,5$, 3 — $Pr = 2,0$, 4 — $Pr = 2,5$

Таблица 1

Значения коэффициента
поверхностного трения $-Re^{1/2} C_f$
при различных значениях
параметров n, m, We

n	m	We	$-Re^{1/2} C_f$
0,5	1,0	3,0	0,829 955
1,0	1,0	3,0	1,173 718
1,5	1,0	3,0	1,452 433
2,0	1,0	3,0	1,689 011
2,5	1,0	3,0	1,895 859
0,5	2,0	3,0	0,983 864
0,5	3,0	3,0	1,102 205
0,5	4,0	3,0	1,200 064
0,5	5,0	3,0	1,284 402
0,5	1,0	0,5	1,143 505
0,5	1,0	1,0	1,072 888
0,5	1,0	2,0	0,929 754
0,5	1,0	5,0	0,708 754
1,5	1,0	0,5	1,201 224
1,5	1,0	1,0	1,255 584
1,5	1,0	2,0	1,363 428
1,5	1,0	5,0	1,588 778

Таблица 2

Значения числа
Нуссельта $-Re^{-1/2} Nu$
при различных значениях
параметров n, m, We, Pr

n	m	We	Pr	$-Re^{-1/2} Nu$
0,5	1,0	3,0	1,0	0,752 802
1,0	1,0	3,0	1,0	0,851 995
1,5	1,0	3,0	1,0	0,910 010
2,0	1,0	3,0	1,0	0,946 575
2,5	1,0	3,0	1,0	0,971 246
0,5	2,0	3,0	1,0	0,802 843
0,5	3,0	3,0	1,0	0,851 212
0,5	4,0	3,0	1,0	0,897 078
0,5	5,0	3,0	1,0	0,940 448
0,5	1,0	0,5	1,0	0,844 585
0,5	1,0	1,0	1,0	0,826 447
0,5	1,0	2,0	1,0	0,785 536
0,5	1,0	5,0	1,0	0,706 655
0,5	1,0	3,0	0,5	0,453 056
0,5	1,0	3,0	1,5	0,992 628
0,5	1,0	3,0	2,0	1,197 940
0,5	1,0	3,0	3,0	1,380 380

ется, а дилатантной — уменьшается. На рис. 4 приведена зависимость $\theta(\eta)$ для псевдопластической ($n = 0,5$) и дилатантной ($n = 1,5$) жидкостей Карро при различных значениях числа Прандтля Pr. Видно, что с увеличением числа Прандтля температура уменьшается.

Жидкости с меньшим числом Прандтля имеют большую теплопроводность и, следовательно, большую толщину теплового пограничного слоя. В жидкостях с меньшим числом Прандтля тепло быстрее переносится с поверхности листа. Следовательно, изменяя число Прандтля, можно увеличить скорость охлаждения. С увеличением числа Прандтля толщина теплового пограничного слоя уменьшается. В случае псевдопластических жидкостей влияние числа Прандтля является более существенным, чем в случае дилатантных жидкостей.

В табл. 1, 2 приведены значения коэффициента локального поверхностного трения и числа Нуссельта при различных значениях параметров задачи. С увеличением показателя степени n и параметра m коэффициент локального поверхностного трения увеличивается. С увеличением числа Вайсенберга коэффициент локального поверхностного трения для псевдопластических жидкостей уменьшается, для дилатантных — увеличивается (см. табл. 1). При фиксированных значениях Pr, We, m локальное число Нуссельта увеличивается с увеличением показателя степени n (см. табл. 2). Локальное число Нуссельта увеличивается с увеличением числа Прандтля и параметра m и уменьшается с увеличением числа Вайсенберга We.

Заключение. В работе методом Рунге — Кутты совместно с методом стрельбы решена двумерная осесимметричная задача о течении жидкости Карро и исследован теплоперенос в этой жидкости. Получены следующие результаты.

С увеличением показателя степени в уравнении состояния увеличивается как скорость жидкости, так и толщина гидродинамического пограничного слоя, обратная зависимость от показателя степени в уравнении состояния имеет место для температурного поля.

Коэффициент поверхностного трения увеличивается с увеличением показателя степени n в уравнении состояния и параметра m .

В случае псевдопластической жидкости при увеличении числа Вайсенберга скорость потока и толщина гидродинамического пограничного слоя существенно уменьшаются.

С увеличением числа Прандтля локальное число Нуссельта увеличивается. В случае псевдопластической жидкости с увеличением числа Вайсенберга локальное число Нуссельта уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ariel P. D.** Axisymmetric flow of a second grade fluid past a stretching sheet // Intern. J. Engng Sci. 2001. V. 39. P. 529–553.
2. **Ariel P. D.** Axisymmetric flow due to a stretching sheet with partial slip // Comput. Math. Appl. 2007. V. 54. P. 1169–1183.
3. **Sahoo B.** Effects of partial slip on axisymmetric flow of an electrically conducting viscoelastic fluid past a stretching sheet // Centr. Eur. J. Phys. 2010. V. 8, N 3. P. 498–508.
4. **Shahzad A., Ali R., Khan M.** On the exact solution for axisymmetric flow and heat transfer over a non-linear radially stretching sheet // Chinese Phys. Lett. 2012. V. 29. 084705.
5. **Ali R., Shahzad A., Khan M., Ayub M.** Analytical and numerical solutions for axisymmetric flow with partial slip // Engng Comput. 2016. V. 32, iss. 1. P. 149–154.
6. **Hayat T., Nawaz M., Asghar S., Mesloub S.** Thermal-diffusion and diffusion-thermo effects on axisymmetric flow of a second grade fluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 3031–3041.
7. **Mustafa M., Khan J. A., Hayat T., Alsaedi A.** Analytical and numerical solutions for axisymmetric flow of nanofluid due to non-linearly stretching sheet // Intern. J. Non-Linear Mech. 2015. V. 71. P. 22–29.
8. **Bird R. B.** Dynamics of polymeric liquids / R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, O. Hassager. N. Y.: Wiley, 1987.
9. **Carreau P. J.** Rheological equations from molecular network theories // Trans. Soc. Rheol. 1972. V. 116. P. 99–127.
10. **Chhabra R. P., Uhlherr P. H. T.** Creeping motion of spheres through shear-thinning elastic fluids described by the Carreau viscosity equation // Rheol. Acta. 1980. V. 19. P. 187–195.
11. **Bush M. B., Phan-Thein N.** Drag force on a sphere in creeping motion through a Carreau model fluid // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1984. V. 16. P. 303–313.
12. **Khellaf K., Lauriat G.** Numerical study of heat transfer in a non-Newtonian Carreau-fluid between rotating concentric vertical cylinders // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2000. V. 89. P. 45–61.
13. **Martins R. R., Silveira F. S., Martins-Costa M. L., Frey S.** Numerical investigation of inertia and shear-thinning effects in axisymmetric flows of Carreau fluids by a Galerkin least-squares method // Latin Amer. Appl. Res. 2008. V. 38. P. 321–328.

*Поступила в редакцию 25/II 2016 г.,
в окончательном варианте — 15/III 2016 г.*