

УДК 532.593.2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРУШЕНИЯ “НЫРЯЮЩИХ” ВОЛН МЕТОДОМ СЛАБОСЖИМАЕМЫХ СГЛАЖЕННЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

М. Дж. Кетабдари, А. Н. Рузбахани

Технологический университет им. Амиркабира, 15875-4413 Тегеран, Иран
E-mail: ketabdar@aut.ac.ir

С использованием так называемой модели слабосжимаемых сглаженных гидродинамических частиц (МСССГЧ), представляющей собой двумерную модель слабосжимаемой жидкости, проведено численное моделирование обрушения “ныряющих” волн. С помощью данной модели решаются уравнения вязкой жидкости для определения полей скорости и плотности, для определения поля давления используется уравнение состояния. Показано, что вычисления с помощью МСССГЧ являются более эффективными по сравнению с вычислениями на основе базовой модели сглаженных гидродинамических частиц. Для моделирования турбулентного течения в волне обрушения используется модель частиц различных масштабов, которая строится на основе модели крупных вихрей. Для оценки точности стандартной МСССГЧ без учета турбулентности рассмотрена задача о разрушении плотины и проведено сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: обрушение “ныряющих” волн, слабосжимаемые сглаженные гидродинамические частицы, модель больших вихрей, модель частиц различных масштабов.

Введение. Результаты исследования волн обрушения вблизи берегов очень важны при строительстве береговых сооружений. В последние десятилетия большое внимание уделяется изучению нелинейного характера этого явления.

Во многих работах используются новые экспериментальные методы измерения свободной поверхности и других характеристик волн обрушения, например их высоты, а также методы определения в них поля скоростей [1–5]. Определение качественных и количественных характеристик волн обрушения в полевых и лабораторных условиях является весьма дорогостоящим. Поэтому в последние десятилетия для моделирования сложных течений часто используются численные методы.

Существует ряд численных методов, позволяющих проследить изменение свободной поверхности волн по мере их продвижения к берегу. Некоторые из этих методов основаны на использовании сеток, например метод маркеров и ячеек (ММЯ) [6] и метод жидких объемов (МЖО) [7]. Эти методы применялись при решении различных задач моделирования волн [8, 9]. В обоих методах используется эйлерова сетка, что затрудняет их применение: во-первых, вследствие наличия адвективных членов в уравнениях Навье — Стокса появляется численная диффузия; во-вторых, при моделировании сильнозакрученных свободных поверхностей волн обрушения необходимо использовать большое число элементов сетки.

В последнее время разработаны бессеточные численные методы, такие как лагранжев метод или метод частиц. Среди указанных методов наиболее эффективным является метод сглаженных гидродинамических частиц (МСГЧ), в котором для описания движения частиц используется лагранжева система координат и адвекция (перенос) вещества вычисляется непосредственно при движении частиц без численной диффузии.

Впервые МСГЧ был предложен для решения задач астрофизики [10, 11], позднее он использовался при моделировании течения несжимаемой жидкости. При этом жидкость считалась слабосжимаемой с соответствующим уравнением состояния, поэтому метод получил название метода слабосжимаемых сглаживаемых гидродинамических частиц (МСССГЧ) [12, 13].

МСГЧ использовался при решении различных прикладных задач, таких как задачи о разрушении плотины, о распространении волн [14], о волнах разрушения в конструкциях [15], о движении уединенной волны на пологом склоне [16]. Кроме того, метод был модифицирован и применялся для решения сложных задач при наличии свободной поверхности [17].

В настоящее время МСГЧ используется при численном решении задач динамики жидкости, также представляется перспективным применение его при описании сложных течений со свободной поверхностью. Однако при описании очень сложных течений необходимо учитывать явление турбулентности. Модели турбулентности, адаптированные к МСГЧ, фактически являются одномерными моделями, учитывающими перемешивание. Подобные модели могут быть и более сложными, например алгебраическая модель напряжений Рейнольдса или модель крупных вихрей [18]. Метод частиц различных масштабов (МЧРМ), учитывающий турбулентность и построенный на основе модели крупных вихрей (МКВ), использовался для моделирования течений со свободной поверхностью, таких как движение волн, перехлестывающих через береговые сооружения [19].

В настоящей работе двумерная МСССГЧ–МСГЧ, учитывающая турбулентность, применяется для моделирования распространения и обрушения волны на слое воды постоянной толщины.

1. Управляющая система уравнений. Уравнения неразрывности и сохранения количества движения для сжимаемой вязкой жидкости в лагранжевых переменных записываются в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla \tau + \mathbf{g}. \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность; t — время; \mathbf{u} — вектор скорости; P — изотропное давление; τ — тензор вязких напряжений; \mathbf{g} — ускорение свободного падения.

2. Метод сглаженных гидродинамических частиц. МСГЧ, развитый в [12], основан на интерполяции по множеству точек, которое может быть неупорядоченным. В качестве интерполянта используются интегралы с ядром, аппроксимирующим дельта-функцию. Информация об интерполируемой функции известна только в отдельных точках, поэтому интегралы вычисляются суммированием по ближайшим частицам. В соответствии с МСГЧ интерполяционные суммы некоторой функции A и ее градиента могут быть записаны в виде

$$(A)_a = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|, h), \quad (\nabla A)_a = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla_a W(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|, h),$$

где a, b — рассматриваемая точка и соседние с ней точки соответственно; m — масса; W — ядро интерполянта; h — размер области сглаживания, который определяет размер

области ядра и в конечном счете точность метода; \mathbf{r} — радиус-вектор точки; A_b — значение некоторой величины A в точке с радиус-вектором \mathbf{r}_b ; ∇_a — градиент места в точке расположения частицы a .

2.1. *Ядро интерполянта.* От вида ядра интерполянта непосредственно зависит точность МСГЧ, поэтому оно должно обладать определенными свойствами: быть положительно определенным, нормированным, монотонно убывающим, иметь компактный носитель и быть ядром типа дельта-функции. Для двумерной задачи в данной работе используется ядро, построенное с помощью сплайн-функции, а именно кубическое В-сплайн-ядро [20]:

$$W(r, h) = \begin{cases} 10(1 - 3q^2/2 + 3q^3/4)/(7\pi h^2), & 0 \leq q \leq 1, \\ 10(2 - q)^3/(28\pi h^2), & 1 < q \leq 2, \\ 0, & q > 2. \end{cases}$$

Здесь $q = r_{ab}/h$; $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$. В МСССГЧ учитывается сжимаемость жидкости, поэтому размер области сглаживания меняется на каждом шаге по времени в зависимости от плотности.

Для изменения размера области сглаживания h с сохранением числа ближайших частиц используется закон [21]

$$h = h_0(\rho_0/\rho)^{1/\nu},$$

где h_0 — начальный размер области сглаживания, который в данной работе принимается равным 1,3 начального расстояния между частицами; ρ_0 — начальная плотность, в качестве которой обычно принимается плотность на свободной поверхности; ν — размерность пространства.

2.2. *Учет вязкости.* Ниже рассматриваются различные модели вязкости, используемые в данной работе: модель искусственной вязкости, модель ламинарной вязкости в рамках МСГЧ.

Во многих расчетах с помощью МСГЧ используется так называемая искусственная вязкость [12], что позволяет исключить численную диффузию на граничных поверхностях и сделать вычисления устойчивыми. Для этого в правую часть уравнения движения добавляется искусственная вязкость Π :

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} -\alpha \bar{c}_{ab} \mu_{ab} / \bar{\rho}_{ab}, & \mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} < 0, \\ 0, & \mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} > 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ab} &= 0,5(c_a + c_b), & \bar{\rho}_{ab} &= 0,5(\rho_a + \rho_b), & \mathbf{u}_{ab} &= \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b, \\ \mu_{ab} &= h \mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} / (\mathbf{r}_{ab}^2 + \eta^2), & \eta^2 &= 0,01h^2, \end{aligned}$$

α — эмпирический коэффициент; c — скорость звука; η — малое число, которое вводится для того, чтобы знаменатель не обращался в нуль. В случае введения искусственной вязкости основные уравнения задачи дискретизируются следующим образом:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_a = \sum_b m_b (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b) \cdot \nabla_a W_{ab}; \quad (2)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_a = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \cdot \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g}. \quad (3)$$

Для того чтобы получить адекватное описание турбулентного движения вязкой жидкости, особенно в случае эволюции волн обрушения, ламинарную вязкость, используемую

в МСГЧ [22], следует заменить искусственной вязкостью. В модели крупных вихрей уравнения отфильтровываются, для того чтобы отделить крупные вихри от мелких. Предполагается, что наиболее крупные вихри непосредственно взаимодействуют со средним потоком и содержат большую часть энергии, поэтому основные эффекты, обусловленные наличием турбулентности, этой моделью описываются точно [23]. В МКВ для сжимаемой жидкости требуется специальная процедура осреднения. В [24] используется процедура осреднения по Фавру

$$\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$$

(черта над буквой обозначает произвольную пространственную фильтрацию). С использованием фильтра, срезающего вершину спектра, уравнения задачи записываются в виде

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0,$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{P} + \mathbf{g} + \frac{1}{\bar{\rho}} (\nabla \cdot \overline{\rho \nu_0} \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \tau^*,$$

где ν_0 — ламинарная кинематическая вязкость; τ^* — обусловленная турбулентностью составляющая тензора напряжений, которая в МЧРМ определяется по формуле

$$\frac{\tau_{ab}^*}{\bar{\rho}} = 2\nu_t \tilde{S}_{ab} - \frac{2}{3} k \delta_{ab} - \frac{2}{3} C_I \Delta^2 \delta_{ab},$$

S_{ab} — осредненный по Фавру тензор скоростей деформаций:

$$\tilde{S}_{ab} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_a}{\partial \mathbf{r}_b} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_b}{\partial \mathbf{r}_a} \right),$$

k — кинетическая энергия в МЧРМ, обусловленная турбулентностью; δ_{ab} — дельта-функция; в соответствии с [25] $C_I = 0,000\ 66$. Кроме того, для определения вязкости вихрей и локальной скорости деформаций используется модель Смагоринского [26]:

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|, \quad |\bar{S}| = (2\bar{S}_{ab} \bar{S}_{ab})^{1/2}.$$

Здесь C_S — константа Смагоринского (в данной работе $C_S = 0,12$); Δ — начальное расстояние между частицами; \bar{S} — тензор скоростей деформаций в МЧРМ. Согласно [27, 28] уравнение сохранения количества движения с учетом турбулентности в обозначениях, принятых в МСГЧ, записывается следующим образом:

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_a = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{\tau_a^*}{\rho_a^2} + \frac{\tau_b^*}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla_a W_{ab} +$$

$$+ \sum_b m_b \frac{4\nu_0 \mathbf{r}_{ab} \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)(|\mathbf{r}_{ab}|^2 + \eta^2)} \mathbf{u}_{ab} + \mathbf{g}. \quad (4)$$

2.3. *Уравнение состояния.* В МСССГЧ давление вычисляется с использованием уравнения состояния Тэйта [29]

$$P = B[(\rho/\rho_0)^\gamma - 1], \quad (5)$$

где $B = \rho_0 c_s^2 / \gamma$ — константа, имеющая смысл модуля упругости жидкости; c_s — скорость звука, которая полагается в 10 раз превышающей максимальную скорость частиц в течение всего вычислительного процесса; γ — константа политропии (в данной работе $\gamma = 7$).

2.4. *Движение частиц.* Положение частицы можно определить с использованием модифицированного МСГЧ [30]:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_a = \mathbf{u}_a + \varepsilon \sum_b \frac{m_b}{\bar{\rho}_{ab}} \mathbf{u}_{ab} W_{ab}. \quad (6)$$

Здесь $0 \leq \varepsilon \leq 1$ (как правило, принимается $\varepsilon = 0,5$). Эта поправка сохраняет упорядоченность частиц.

2.5. *Схема интегрирования по времени.* Уравнение неразрывности, уравнение сохранения количества движения и уравнение, определяющее положение частицы, могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_a = D_a, \quad \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_a = \mathbf{F}_a, \quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_a = \mathbf{U}_a,$$

где D , \mathbf{F} , \mathbf{U} — правые части соответствующих уравнений. В данной работе для определения величин на $(n+1)$ -м шаге по времени используется схема предиктор-корректор с аппроксимацией второго порядка по времени [30]. Сначала определяются величины на $(n+1/2)$ -м шаге (предиктор):

$$\rho_a^{n+1/2} = \rho_a^n + \frac{\Delta t}{2} D_a^n, \quad \mathbf{u}_a^{n+1/2} = \mathbf{u}_a^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_a^n, \quad \mathbf{r}_a^{n+1/2} = \mathbf{r}_a^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{U}_a^n. \quad (7)$$

Давление на $(n+1/2)$ -м шаге вычисляется по уравнению (5) с использованием значения плотности на этом шаге:

$$P_a^{n+1/2} = B[(\rho_a^{n+1/2}/\rho_0)^\gamma - 1]. \quad (8)$$

Значения (7), (8) корректируются с использованием значений выражений в правых частях уравнений на $(n+1/2)$ -м шаге:

$$\rho_a^{n+1/2} = \rho_a^n + \frac{\Delta t}{2} D_a^{n+1/2}, \quad \mathbf{u}_a^{n+1/2} = \mathbf{u}_a^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_a^{n+1/2}, \quad \mathbf{r}_a^{n+1/2} = \mathbf{r}_a^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{U}_a^{n+1/2}.$$

Наконец, вычисляются все величины на $(n+1)$ -м временном слое:

$$\rho_a^{n+1} = 2\rho_a^{n+1/2} - \rho_a^n, \quad \mathbf{u}_a^{n+1} = 2\mathbf{u}_a^{n+1/2} - \mathbf{u}_a^n, \quad \mathbf{r}_a^{n+1} = 2\mathbf{r}_a^{n+1/2} - \mathbf{r}_a^n.$$

Давление на $(n+1)$ -м временном слое вычисляется по значению плотности на нем:

$$P_a^{n+1} = B[(\rho_a^{n+1}/\rho_0)^\gamma - 1].$$

2.6. *Шаг по времени.* Шаг по времени определяется в соответствии с условием Куранта и условием вязкости [14]:

$$\Delta t = \min_a \left(\frac{0,3h}{c_a + \sigma_a} \right), \quad \sigma_a = \max_b \left| \frac{h\mathbf{u}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{\mathbf{r}_{ab}^2} \right|,$$

где максимум и минимум берутся по всем частицам; величина σ_a зависит от вязкости частицы a .

2.7. *Краевые условия.* При формулировке задач гидродинамики важной проблемой является постановка краевых условий. В данной работе при формулировке краевых условий в МСССГЧ используется динамика граничных частиц. Для фиксированных границ множество таких частиц строится из определенных частиц, располагаемых в шахматном порядке [31]. Движение этих частиц удовлетворяет уравнениям (1) и уравнению состояния (5), однако запрещается их движение в соответствии с уравнением (6). Кроме того, необходимо определить положение и скорость частиц, расположенных на движущихся границах (например, таких, которые образуются при движении волн), на каждом шаге по времени.

Краевые условия такого типа легко реализуются при численном решении, поскольку они выполняются в процессе определения движения частиц. Механизм отталкивания частиц, приближающихся к граничной поверхности, следующий. Когда частица приближается к границе, плотность частиц на границе увеличивается в соответствии с уравнением (2), в результате чего давление увеличивается в соответствии с уравнением (5). Таким образом, сила, действующая на частицу, увеличивается вследствие наличия члена P/ρ^2 в уравнении движения (3), (4). Детально этот механизм обсуждается в [32].

2.8. *Фильтр плотности.* Использование модели крупных вихрей в МСССГЧ может приводить к возникновению нефизических эффектов на свободной поверхности вследствие увеличения малой вариации плотности, обусловленного уравнением состояния. Простой и не требующий больших вычислительных затрат способ преодолеть это затруднение — отфильтровать плотность частиц и вновь присвоить каждой частице ее значение. В данной работе через каждые 30 шагов по времени используется обобщенный на движущиеся системы метод наименьших квадратов [15]. Эта процедура является процедурой коррекции первого порядка. Поэтому вариация линейного поля плотности может быть репродуцирована точно:

$$\bar{\rho}_a = \sum_b m_b W_{ab}^{\text{MLS}}, \quad W_{ab}^{\text{MLS}} = [\beta_0(\mathbf{r}_a) + \beta_{1x}(\mathbf{r}_a) \cdot (x_a - x_b) + \beta_{1z}(\mathbf{r}_a) \cdot (z_a - z_b)] W_{ab},$$

$$\beta(\mathbf{r}_a) = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1x} \\ \beta_{1z} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \sum_b W_b(\mathbf{r}_a) \frac{m_b}{\rho_b} \tilde{A},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_a - x_b & z_a - z_b \\ x_a - x_b & (x_a - x_b)^2 & (z_a - z_b)(x_a - x_b) \\ z_a - z_b & (z_a - z_b)(x_a - x_b) & (z_a - z_b)^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь W_{ab}^{MLS} — скорректированное ядро, которое конструируется умножением основного ядра на линейный полином; β — корректирующий вектор.

3. Тестирование модели. В данном пункте проведено сравнение результатов решения тестовой задачи о разрушении плотины, полученных с использованием МСССГЧ и МСССГЧ–МЧРМ. В этой задаче объем, состоящий из частиц жидкости и заключенный в прямоугольную область, внезапно обрушиваясь, начинает движение. Экстремальные условия движения жидкости в этой задаче являются оптимальными для тестирования устойчивости численной схемы и проверки адекватности описания свободной поверхности с помощью предлагаемой модели.

3.1. *Стандартная МСССГЧ.* Для тестирования стандартной МСССГЧ в области численного решения длиной $4a$ ($a = 5,7$ см) из частиц жидкости был сгенерирован столб длиной a и высотой $2a$ (рис. 1). Были выбраны следующие значения параметров модели: начальные расстояния между частицами в направлениях x и z соответственно $dx = 0,114$ см, $dz = 0,114$ см, размер области сглаживания $h = 0,148$ см, число частиц $n_p = 11\,103$, коэффициент искусственной вязкости $\alpha = 0,3$.

С момента обрушения столба вплоть до его столкновения с правой стенкой резервуара записывается продольная координата частицы p , расположенной на фронте волны (см. рис. 1). Результаты численного расчета сравниваются с результатами, полученными по МЖО [33], и с экспериментальными данными [34] (рис. 2). На рис. 2 X — продольная координата точки p , $T = t\sqrt{2g/a}$. Видно, что результаты, полученные МСССГЧ, лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты, полученные МЖО. Это свидетельствует о точности стандартной МСССГЧ.

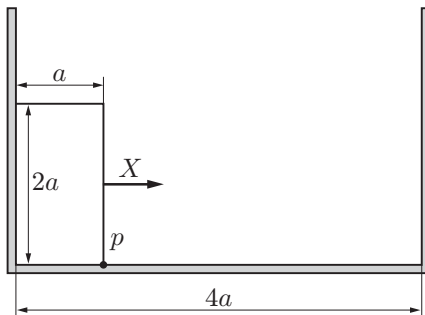


Рис. 1

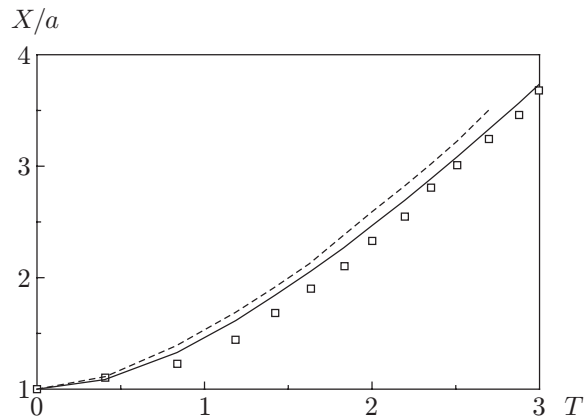


Рис. 2

Рис. 1. Область численного решения в задаче о разрушении плотины

Рис. 2. Зависимость безразмерной продольной координаты точки p от времени в задаче о разрушении плотины:

точки — экспериментальные данные [34], сплошная линия — результаты расчета с использованием МСССГЧ, штриховая — результаты расчета, полученные в работе [33]

3.2. МСССГЧ–МЧРМ. В данной работе МЧРМ с учетом турбулентности, основанная на МКВ, встраивается в МСССГЧ.

Для того чтобы оценить МСССГЧ–МЧРМ, проведено качественное сравнение движения частиц в задаче о разрушении дамбы с экспериментальными данными [35]. Двумерная расчетная область для этой задачи показана на рис. 3. Столб частиц жидкости длиной и высотой $a = 30$ см был сгенерирован в области длиной $3a$. Были выбраны следующие параметры модели: $dx = 0,5$ см, $dz = 0,5$ см, $n_p = 7983$, $h = 0,65$ см. Сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными показано на рис. 3. Из приведенных результатов следует, что данная модель удовлетворительно описывает движение волны. Из рис. 3 (кадры б) следует, что волна обрушения, полученная в численных расчетах МСССГЧ–МЧРМ, качественно согласуется с экспериментальной.

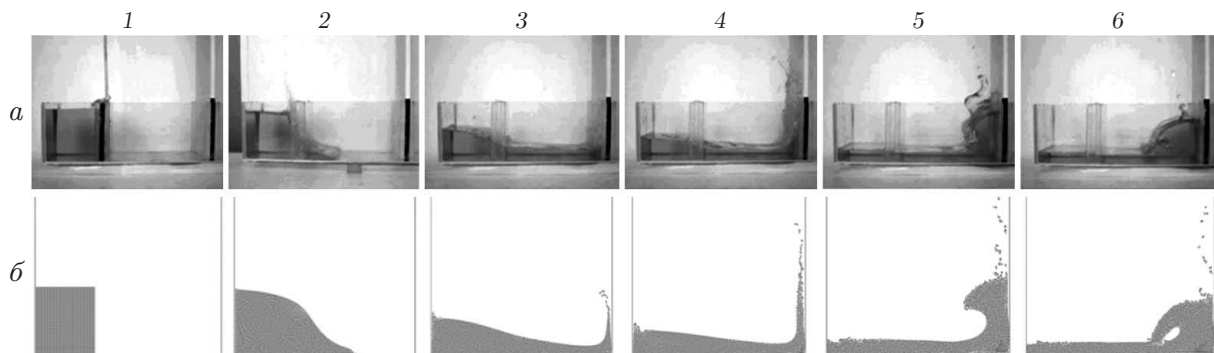


Рис. 3. Результаты качественного сравнения численных результатов, полученных МСССГЧ–МЧРМ (а), с экспериментальными данными [35] (б):

1 — $t = 0$; 2 — $t = 0,160$ с; 3 — $t = 0,364$ с; 4 — $t = 0,485$ с; 5 — $t = 0,809$ с; 6 — $t = 0,890$ с

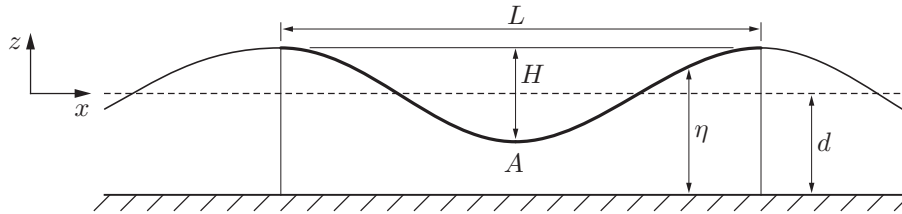


Рис. 4. Начальный профиль неустойчивой монохроматической волны большой амплитуды ($t = 0$)

4. Результаты исследования и их обсуждение. В данном пункте описывается модель генерации “ныряющей” волны и ее обрушения на слое воды постоянной толщины.

4.1. *Описание модели.* Среднее сечение волны в лотке показано на рис. 4 (d , L , H — толщина слоя воды, длина и высота волны соответственно). Подбирая безразмерные параметры H/L и d/L , можно создать различные волны разрушения и исследовать нелинейную зависимость от них поведения волны, а также влияние наличия дна на волновое движение.

4.2. *Моделирование волны.* Для генерации линейных волн использовалась подвижная заслонка, движение которой задавалось уравнениями [36]

$$X_w(t) = \frac{S}{2} \sin(\omega t), \quad U_w(t) = \omega \frac{S}{2} \cos(\omega t), \quad \frac{H}{S} = 4 \frac{\text{sh}(kd)}{kd} \frac{kd \text{sh}(kd) - \text{ch}(kd) + 1}{\text{sh}(2kd) + 2kd},$$

где $X_w(t)$, $U_w(t)$ — закон движения заслонки и ее скорость соответственно; $\omega = 2\pi/T_w$ — круговая частота; T_w — период; $k = 2\pi/L$ — волновое число; S — ход заслонки. Для того чтобы оценить результат генерации волн, на слое воды постоянной толщины с помощью заслонки была сгенерирована необрушающаяся линейная регулярная волна. Были выбраны следующие значения параметров модели: $H = 1,02$ м, $L = 27,3$ м, $T_w = 4,7$ с, $d = 4$ м, $S = 2,11$ м.

На рис. 5 показаны зависимости амплитуды волны от времени на расстоянии от генератора волн $x = L$. Приведены теоретическая зависимость и зависимость, полученная МСССГЧ. Из представленных результатов следует, что между первой сгенерированной волной ($t = 0 - T_w$) и теоретической волной имеется большое расхождение, особенно на первом полупериоде. Однако между второй сгенерированной волной ($t = T_w - 2T_w$) и тео-

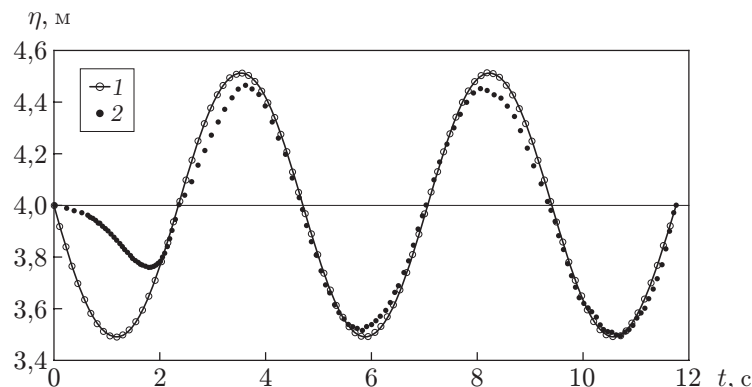


Рис. 5. Зависимости от времени амплитуд смоделированной и теоретической волн на расстоянии $x = L$ от генератора волн:

1 — теоретическая волна, 2 — волна, полученная с использованием МСССГЧ, сплошная линия — уровень воды (ватерлиния)

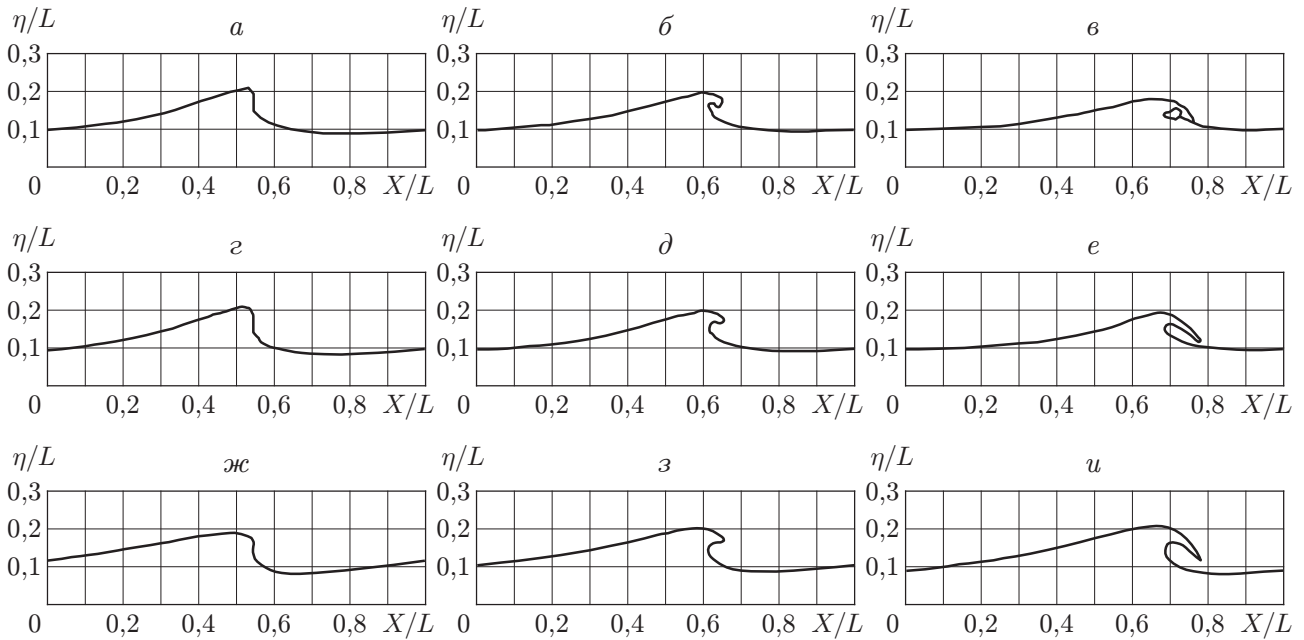


Рис. 6. Результаты расчета обрушения волны с использованием стандартной МСССГЧ (а–в), МСССГЧ–МЧРМ (г–е) и метода граничных элементов (ж–и): а, г, ж — $t = 0,3T_w$; б, д, з — $t = 0,38T_w$; в, е, и — $t = 0,46T_w$

ретической волной имеется хорошее соответствие, различие высот этих волн составляет порядка 8 %.

4.3. Обрушение “ныряющей” волны. В рассматриваемой тестовой задаче $d/L = 0,13$, что соответствует средней толщине слоя воды. Были выбраны следующие значения параметров волны и основных параметров модели: $H = 0,013$ м, $L = 0,1$ м, $T_w = 0,308$ м, $d = 0,013$ м, $S = 0,305$ м; $dx = 0,05$ см, $dz = 0,05$ см, $n_p = 35\,232$, $h = 0,065$ см.

На рис. 6 представлены результаты расчета опрокидывания волны в области А (см. рис. 4) с помощью МСССГЧ при $\alpha = 0,01$, а также с помощью МСССГЧ–МЧРМ и метода граничных элементов [37] в различные моменты времени. В силу замечания, сделанного при обсуждении рис. 5, рассматривается разрушение второй сгенерированной волны.

По мере продвижения сгенерированной волны по каналу ее форма становится более асимметричной. Фронт волны становится более крутым, а при $t = 0,38T_w$ (время измеряется в секундах) — вертикальным. В этот момент струя жидкости готова выплеснуться в вершине волны. Затем струя воды в виде языка выбрасывается из вершины и свободно падает.

Все вычисления выполнены для постоянной длины волны. На рис. 6 четко видно различие между результатами, полученными с использованием стандартной МСССГЧ и МСССГЧ–МЧРМ.

Сравнение приведенных результатов показывает, что профиль волны, полученный с помощью МСССГЧ–МЧРМ, более крутой и аналогичен профилю, полученному в [37]. При $t = 0,46T_w$ в результате вычислений по стандартной МСССГЧ объем области между струей и свободной поверхностью меньше, чем в результате вычислений с использованием МСССГЧ–МЧРМ, и струя ударяется о свободную поверхность (см. рис. 6, в).

Заключение. В работе проведено исследование генерации и обрушения “ныряющей” волны на слое воды постоянной толщины с использованием стандартной МСССГЧ и МСССГЧ–МЧРМ. Для оценки этих двух моделей рассмотрена задача о разрушении

дамбы. Результаты численных расчетов сравниваются с экспериментальными данными и результатами, полученными с помощью МЖО [33].

Сравнение показывает, что результаты, полученные по стандартной МСССГЧ, лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты, полученные по МЖО. Проведено качественное сравнение результатов, полученных по МСССГЧ–МЧРМ, с экспериментальными данными [35]. Установлено, что модель удовлетворительно описывает свободную поверхность при турбулентном течении, в частности в задаче об обрушении “ныряющей” волны.

В заключение решена задача об обрушении “ныряющей” волны с использованием стандартной МСССГЧ и предложенной МСССГЧ–МЧРМ. Сравнение результатов, полученных с использованием этих моделей, с результатами работы [37] показывает, что с помощью МСССГЧ–МЧРМ можно эффективно моделировать свободные поверхности при турбулентном движении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Stive M. J. F.** Energy dissipation in waves breaking on gentle slopes // *Coastal Engng.* 1984. V. 8, N 2. P. 99–127.
2. **Skyner D. J., Gray C., Greated C. A.** A comparison of time-stepping numerical predictions with whole-field flow measurement in breaking waves // *NATO ASI ser. Ser. E. Appl. Sci.* 1990. V. 178. P. 490–508.
3. **Lin J. C., Rockwell D.** Evolution of a quasi-steady breaking wave // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 302. P. 29–44.
4. **Ting F. C. K., Kirby J. T.** Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker // *Coastal Engng.* 1996. V. 27, N 3/4. P. 131–160.
5. **Hull P., Müller G.** An investigation of breaker heights, shapes and pressures // *Ocean Engng.* 2002. V. 29, N 1. P. 59–79.
6. **Harlow F., Welch E.** Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Phys. Fluids.* 1965. V. 8, N 12. P. 2182–2189.
7. **Hirt C. W., Nichols B. D.** Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comput. Phys.* 1981. V. 39, N 1. P. 201–225.
8. **Chan R. K. C., Street R. L.** A computer study of finite-amplitude water waves // *J. Comput. Phys.* 1970. V. 6, N 1. P. 68–94.
9. **Lin P., Liu P. L. F.** A numerical study of breaking waves in the surf zone // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 359, N 1. P. 239–264.
10. **Lucy L.** A numerical approach to testing the fission hypothesis // *Astronom. J.* 1977. V. 82, N 12. P. 1013–1024.
11. **Gingold R. A., Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars // *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 1977. V. 181. P. 375–389.
12. **Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics // *Annual Rev. Astronomy Astrophys.* 1992. V. 30. P. 543–574.
13. **Morris J. P., Fox P. J., Zhu Y.** Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH // *J. Comput. Phys.* 1997. V. 136, N 1. P. 214–226.
14. **Monaghan J. J., Kos A.** Solitary waves on a Cretan beach // *J. Waterway Port, Coast. Ocean Engng.* 1999. V. 125, N 3. P. 145–154.
15. **Colagrossi A., Landrini M.** Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics // *J. Comput. Phys.* 2003. V. 191, N 2. P. 448–475.
16. **Shao S., Gotoh H.** Turbulence particle models for tracking free surfaces // *J. Hydraul. Res.* 2005. V. 43, N 3. P. 276–289.

17. **Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics // Rep. Prog. Phys. 2005. V. 68. P. 1703–1759.
18. **Violeau D., Issa R.** Numerical modelling of complex turbulent free-surface flows with the SPH method: an overview // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2007. V. 53, N 2. P. 277–304.
19. **Shao S., Ji C., Graham D. I., et al.** Simulation of wave overtopping by an incompressible SPH model // Coastal Engng. 2006. V. 53, N 9. P. 723–735.
20. **Monaghan J. J., Lattanzio J. C.** A refined method for astrophysical problems // Astronom. Astrophys. 1985. V. 149. P. 135–143.
21. **Liu G. R.** Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method / G. R. Liu, M. B. Liu. S. l.: World Sci., 2003.
22. **Rogers B. D., Dalrymple R. A.** A SPH modeling of breaking waves // Coastal Engng Conf. (ASCE). 2004. V. 9, N 1. P. 415–427.
23. **Ketabdari M. J., Saghi H.** Large eddy simulation of laminar and turbulent flow on collocated and staggered grids // ISRN Mech. Engng. 2011. N 2011. P. 1–13.
24. **Yoshizawa A.** Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling // Phys. Fluids. 1986. V. 29. P. 2152–2164.
25. **Blin L., Hadjadj A., Vervisch L.** Large eddy simulation of turbulent flows in reversing systems // J. Turbulence. 2003. V. 4, N 1. P. 1–12.
26. **Smagorinsky J.** General circulation experiments with the primitive equations // Monthly Weather Rev. 1963. V. 91, N 3. P. 99–164.
27. **Dalrymple R. A., Rogers B. D.** Numerical modeling of water waves with the SPH method // Coastal Engng. 2006. V. 53, N 2/3. P. 141–147.
28. **Lo E. Y. M., Shao S.** Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method // Appl. Ocean Res. 2002. V. 24, N 5. P. 275–286.
29. **Batchelor G. K.** Introduction to fluid dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1967.
30. **Monaghan J. J.** On the problem of penetration in particle methods // J. Comput. Phys. 1989. V. 82, N 1. P. 1–15.
31. **Dalrymple R. A., Knio O.** SPH modeling of water waves // Proc. Coastal Dynamics (ASCE). 2001. P. 779–787.
32. **Crespo A. J. C., Gómez-Gesteira M., Dalrymple R. A.** Boundary conditions generated by dynamic particles in SPH methods // Computers, Materials, Continua. 2007. V. 5, N 3. P. 173–184.
33. **Ketabdari M. J., Nobari M. R. H., Moradi Larmaei M.** Simulation of waves group propagation and breaking in coastal zone using a Navier — Stokes solver with an improved VOF free surface treatment // Appl. Ocean Res. 2008. V. 30, N 2. P. 130–143.
34. **Martin J. C., Moyce W. J.** Pt 4. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci. 1952. V. 244, N 882. P. 312–324.
35. **Issa R.** Numerical assessment of the smoothed particle hydrodynamics gridless method for incompressible flows and its extension to turbulent flows. Manchester: Univ. Manchester Inst. of Sci. and Technol., 2005.
36. **Dean R. G.** Water wave mechanics for engineers and scientists / R. G. Dean, R. A. Dalrymple. S. l.: World Sci., 1991.
37. **Vinje T., Brevig P.** Numerical simulation of breaking waves // Advances Water Res. 1981. V. 4. P. 77–82.

*Поступила в редакцию 12/XII 2011 г.,
в окончательном варианте — 30/I 2012 г.*