

УДК 532.51

# СТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ. РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ К ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Исследовано стекание вязких пленок жидкости вдоль наклонной гофрированной (синусоидальной) поверхности. Расчеты проведены с использованием интегральной модели. В рамках теории Флоке рассмотрена устойчивость нелинейных стационарных течений к произвольным возмущениям. Показано, что для каждого типа гофрирования существует критическое число Рейнольдса, при котором появляются неустойчивые возмущения. Установлено, что это значение существенно зависит от физических свойств жидкости и геометрических параметров течения. В частности, в случае стекания пленки вдоль гладкой стенки критический параметр волнообразования зависит только от угла наклона поверхности течения. Найдены значения параметров гофрирования (амплитуды и периода), при которых стекание пленки вдоль волнистой стенки устойчиво к произвольным возмущениям в диапазоне значений числа Рейнольдса вплоть до умеренных. Такие значения параметров существуют при всех рассмотренных углах наклона поверхности течения.

Ключевые слова: течение пленок, нелинейные волны, устойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20160201

**1. Введение и постановка задачи.** Стеkanie вязких пленок жидкости по гофрированным поверхностям используется во многих современных устройствах и технологиях (компактные теплообменники [1], дистилляционные колонны [2], нанесение покрытий [3], охлаждение элементов компьютеров [4], миниатюрные устройства в биомедицине [5]). В настоящее время существует большое количество работ, посвященных исследованию гидродинамики таких течений (см., например, [6]). В [7] при изучении стекания пленки вдоль волнистой стенки установлено, что в случае малой амплитуды гофрирования результаты расчетов устойчивости такого течения совпадают с выводами, следующими из линейной теории устойчивости плоскопараллельного течения Нуссельта: при значениях числа Рейнольдса  $Re > Re_{flat} = 5 \operatorname{ctg}(\beta)/6$  ( $\beta$  — угол наклона поверхности течения к горизонту) появляются неустойчивые моды. Устойчивость пленочного течения по гофрированной вертикальной поверхности рассматривалась в работах [8, 9]. Расчет проводился с использо-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.

ванием как интегрального подхода, так и полных уравнений Навье — Стокса. Показано, что при небольших числах Рейнольдса существует диапазон параметров гофрирования (амплитуды и периода), в котором все возмущения основного течения затухают. В экспериментах [10] исследовалось стекание пленки по наклонной поверхности ( $\beta = 1 \div 8^\circ$ ) с гофрированием прямоугольного типа. Показано, что в этом случае, в отличие от случая гладкой стенки, диапазон чисел Рейнольдса, в котором имеет место безволновое стекание, существенно шире и критическое число Рейнольдса увеличивается на  $20 \div 30$  %. В работах [11, 12] с использованием криволинейной системы координат и длинноволновой аппроксимации исследовалась устойчивость стекания пленки по стенке синусоидальной формы с большим периодом гофрирования. В [12] описаны также эксперименты, в которых изучалось стекание силиконового масла вдоль наклонной синусоидальной поверхности с большим периодом гофрирования. Показано, что в этом случае и в расчетах, и в эксперименте критическое значение параметра волнообразования больше, чем в случае гладкой стенки. В [13] с использованием модифицированного интегрального подхода исследовалось влияние поверхностного натяжения на устойчивость течения пленки. Установлено, что в ряде случаев гофрирование поверхности оказывает дестабилизирующее влияние и неустойчивость возникает быстрее, чем в случае гладкой стенки. В [6] экспериментально исследовалась начальная стадия волнообразования при стекании пленки вдоль наклонной поверхности с гофрированием различного типа (синусоидальным и прямоугольным). Показано, что тип гофрирования оказывает существенное влияние на момент начала волнообразования. В экспериментах [14] исследовалось стекание жидкостей по наклонной ( $\beta = 10^\circ$ ) синусоидальной поверхности. В начальном сечении задавались пульсации расхода жидкости, затем изучалось их развитие (рост или затухание) вниз по потоку. Исследовалось стекание жидкостей с относительно малым значением числа Капицы. Обнаружено существование “островов” устойчивости на плоскости параметров  $(f, Re)$  ( $f$  — частота заданных пульсаций). Установлено также, что при некоторых значениях частоты пульсаций возмущения затухали вниз по потоку даже при больших значениях числа Рейнольдса (в три-четыре раза превышающих критическое значение параметра волнообразования  $Re_{flat}$  при  $\beta = 10^\circ$ ). В работе [15] с использованием уравнения в длинноволновом приближении теоретически исследовалась устойчивость стекания пленки вдоль наклонной поверхности с синусоидальным или прямоугольным типом гофрирования при угле наклона  $\beta = 45^\circ$  и двух значениях числа Капицы. Обнаружено, что период гофрирования  $L$  оказывает существенное влияние на момент начала волнообразования. При малых значениях  $L$  гофрирование оказывает дестабилизирующее влияние при малых значениях амплитуды гофрирования  $A$  и стабилизирует течение при достаточно больших значениях  $A$ . С увеличением периода гофрирования влияние амплитуды гофрирования становится противоположным. В расчетах [15] установлено, что при достаточно больших значениях периода гофрирования оно оказывает дестабилизирующее влияние при всех значениях амплитуды  $A$ .

Таким образом, задача о влиянии типа гофрирования стенки на момент начала волнообразования при течении пленки по наклонной поверхности является актуальной. В задаче имеются пять параметров и безразмерная функция, описывающие тип гофрирования. Целью данной работы является систематическое исследование устойчивости течения пленки по наклонной гофрированной поверхности к произвольным возмущениям. Результаты, полученные ранее для случая течения пленки по вертикальной поверхности [8, 9, 16], обобщаются на случай наклонной гофрированной поверхности.

**2. Основные уравнения.** Стеkanie жидкой волновой пленки по гофрированной наклонной поверхности описывается системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями. При исследовании гидродинамики стекающих пленок часто используется интегральный подход (система уравнений Шкадова) [17]. При этом рассмат-

риваются длинноволновые возмущения. В работах [8, 9] в предположении, что период гофрирования значительно превышает толщину пленки:  $\varepsilon = H_0/L \ll 1$  ( $H_0$  — толщина пленки;  $L$  — период гофрирования), такой подход был обобщен на случай стекания вязкого слоя жидкости по волнистой вертикальной стенке. Обнаружен диапазон параметров, в котором результаты расчетов с использованием интегрального подхода количественно согласуются с результатами расчетов по полным уравнениям Навье — Стокса. Основная идея интегрального подхода заключается в использовании автомоделного профиля продольной скорости в виде функции

$$u(x, y, t) = \frac{3q(x, t)}{H(x, t)} \left( \frac{y - f(x)}{H} - \frac{(y - f(x))^2}{2H^2} \right).$$

Здесь  $x$  — координата вдоль плоскости, наклоненной под углом  $\beta$  по отношению к горизонту;  $y$  — координата в направлении, перпендикулярном оси  $x$ ;  $t$  — время;  $u(x, y, t)$  — компонента вектора скорости жидкости в направлении  $x$ ;  $f(x)$  — функция, задающая форму гофрированной стенки;  $H(x, t) = h(x, t) - f(x)$  — локальная толщина пленки;  $h(x, t)$  — функция, задающая форму свободной поверхности в данный момент времени;

$q(x, t) = \int_{y=f(x)}^{h(x,t)} u dy$  — расход жидкости в пленке. Учитывая малость параметра  $\varepsilon$  и авто-

моделность профиля продольной скорости, в результате интегрирования полных уравнений Навье — Стокса поперек слоя получаем следующую систему уравнений для исследования динамики пленочного течения по волнистой наклонной поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{H} \right) &= -\frac{3 \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{Re}} H(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left( H - \frac{q}{H^2} \right) + \varepsilon^2 \operatorname{We} H \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса;  $\operatorname{We} = (3 \operatorname{Fi})^{1/3} / (\sin^{1/3}(\beta) \operatorname{Re}^{5/3})$  — число Вебера;  $h(x, t) = H(x, t) + f(x)/\varepsilon_1$ ;  $\varepsilon_1 = H_0/A$ ;  $A$  — амплитуда гофрирования. Уравнения (1) записаны в безразмерном виде. Величины  $L$ ,  $H_0$  и  $L/u_0$  являются масштабами длины, толщины и времени соответственно:  $H_0 \equiv (3\nu^2 \operatorname{Re} / (g \sin \beta))^{1/3}$ ,  $u_0 \equiv \nu \operatorname{Re} / H_0$ ,  $\operatorname{Fi} = (\sigma/\rho)^3 / (g\nu^4)$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\sigma$  — поверхностное натяжение;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\operatorname{Fi}$  — пленочное число).

В задаче имеются пять параметров ( $\varepsilon, \varepsilon_1, \operatorname{Fi}, \operatorname{Re}, \beta$ ) и безразмерная функция  $f(x)$ , описывающие конфигурацию стенки. В качестве независимых параметров будем использовать  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ ,  $A/L$ ,  $\operatorname{Re}$ ,  $\beta$ ,  $\operatorname{Ka}$  ( $\operatorname{Ka} \equiv \operatorname{Fi}^{1/11}$  — число Капицы) и ограничимся изучением синусоидального типа гофрирования:  $f(x) = 0,5(1 - \cos(2\pi x))$ . Нетрудно показать, что параметры уравнения выражаются через выбранные независимые параметры следующим образом:  $\varepsilon = (3 \operatorname{Re} / \sin \beta)^{1/3} / [\operatorname{Ka}^{11/6} L / \sqrt{\sigma/(\rho g)}]$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon / (A/L)$ .

В отличие от случая вертикальной ( $\beta = 90^\circ$ ) гофрированной поверхности [8] в рассматриваемом случае в уравнениях (1) имеется только один дополнительный член. Численный алгоритм для нахождения стационарных решений и исследования устойчивости аналогичен соответствующему алгоритму в работе [8]. Безволновому стеканию пленки по гофрированной поверхности соответствуют стационарные решения системы (1), поэтому для их нахождения используются метод Ньютона и фурье-разложение:

$$q_b = 1, \quad H_b(x) \approx \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} H_n e^{2\pi i n x}, \quad (H_{-n})^* = H_n.$$

Здесь верхний индекс “\*” означает комплексное сопряжение. Для реализации численного алгоритма задаются начальные приближения для гармоник  $H_n$  (например, в случае малых значений параметра  $A/L$ ). Для улучшения начального приближения используется итерационный метод Ньютона. В ходе расчетов при варьировании количества гармоник  $N$  должны выполняться следующие условия аппроксимации точного решения  $H_b(x)$ :  $|H_{N/2-1}| / \sup |H_n| < 10^{-3}$ .

Подставляя в уравнения (1) выражения

$$q(x, t) = 1 + \tilde{q}(x) e^{-\lambda t} + \text{к.с.}, \quad H(x, t) = H_b(x) + \hat{H}(x) e^{-\lambda t} + \text{к.с.}$$

(к.с. — комплексно-сопряженная к возмущению величина) и линеаризуя эти уравнения, получаем систему уравнений для собственных значений с периодическими по координате  $x$  коэффициентами. Эти коэффициенты являются вещественными. В соответствии с общей теорией Флоке решения указанной линейной системы уравнений представляются в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{H} \\ \hat{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{H}_n e^{2\pi i n x} \\ \sum_{n=-N/2+1}^{n=N/2-1} \hat{q}_n e^{2\pi i n x} \end{pmatrix} e^{2\pi i Q x}.$$

Здесь  $Q \in [0, 1]$  — вещественный параметр. В результате задача сводится к задаче на собственные значения для комплексной матрицы общего вида  $A\hat{x} = \lambda\hat{x}$ ,  $\hat{x} = (\hat{H}_n, \hat{q}_n)^T$ . Матрица  $A$  имеет размерность  $[2(N-1), 2(N-1)]$ , и ее собственные значения определяются численно. Стационарное решение устойчиво, если вещественные части всех  $2(N-1)$  собственных чисел больше или равны нулю для каждого значения параметра  $Q \in [0, 1]$ . Вследствие вещественности коэффициентов линеаризованных уравнений имеет место симметрия:  $\lambda_k(-Q) = \lambda_k^*(Q)$ ,  $k = 1, \dots, 2(N-1)$ , поэтому достаточно рассмотреть собственные значения в интервале  $Q \in [0, 0,5]$ .

При  $Q = 0; 0,5$  набор собственных значений состоит как из вещественных чисел, так и из пар комплексно-сопряженных чисел. Заметим также, что при  $Q = 0$  всегда имеется одно нулевое собственное значение.

**3. Результаты расчетов.** Из уравнений (1) следует, что плоскопараллельное течение пленки по наклонной гладкой плоскости устойчиво при значениях числа Рейнольдса  $\text{Re} \leq \text{Re}_{flat} = \text{ctg } \beta$ , при этом критическое значение параметра волнообразования  $\text{Re}_{flat}$  зависит только от угла наклона  $\beta$ . В данном случае размерная длина волны  $\lambda_{neut}^*$  нейтрального возмущения рассчитывается по уравнению

$$\frac{2\pi}{\lambda_{neut}^*} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g \sin \beta}} = \sqrt{\text{Re} - \text{ctg } \beta}.$$

Устойчивость процесса стекания пленки по гофрированной поверхности исследовалась численно (рис. 1–5). При фиксированных значениях числа Капицы, угла наклона  $\beta$ , амплитуды и периода гофрирования сначала проводились расчеты при малых значениях числа Рейнольдса жидкости и вычислялись собственные значения  $\lambda_k(Q)$ ,  $k = 1, \dots, 2(N-1)$  при  $Q = 0; 0,01; 0,05; 0,10; 0,15; \dots; 0,50$ . При этом приближенно определялись значения параметра  $Q$ , при которых стационарное решение устойчиво или неустойчиво. Затем значение числа Рейнольдса увеличивалось и вновь анализировались собственные значения. С использованием специального алгоритма более точно рассчитывались формы нейтральных кривых, при которых происходит смена устойчивости.

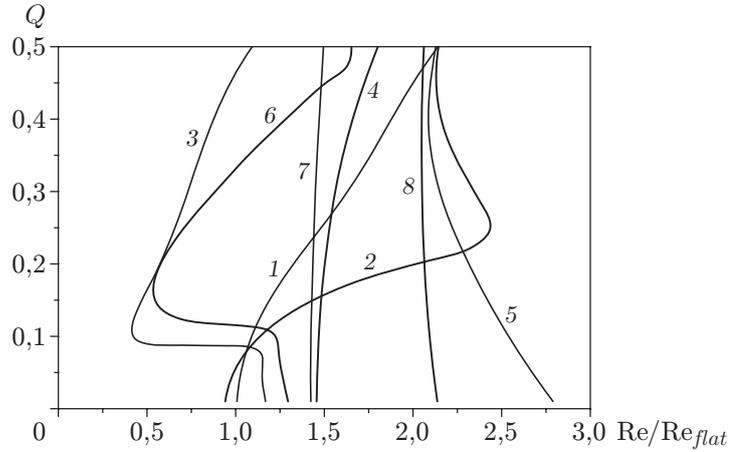


Рис. 1. Кривые нейтральной устойчивости нелинейных решений к различным возмущениям при  $Ka = 10$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  $Re_{flat} = 5,67$ :

1-3 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 3$  (1 —  $A/L = 0,01$ , 2 —  $A/L = 0,02$ , 3 —  $A/L = 0,2$ );  
 4-6 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 4$  (4 —  $A/L = 0,01$ , 5 —  $A/L = 0,02$ , 6 —  $A/L = 0,125$ ); 7, 8 —  
 $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 10$  (7 —  $A/L = 0,02$ , 8 —  $A/L = 0,05$ )

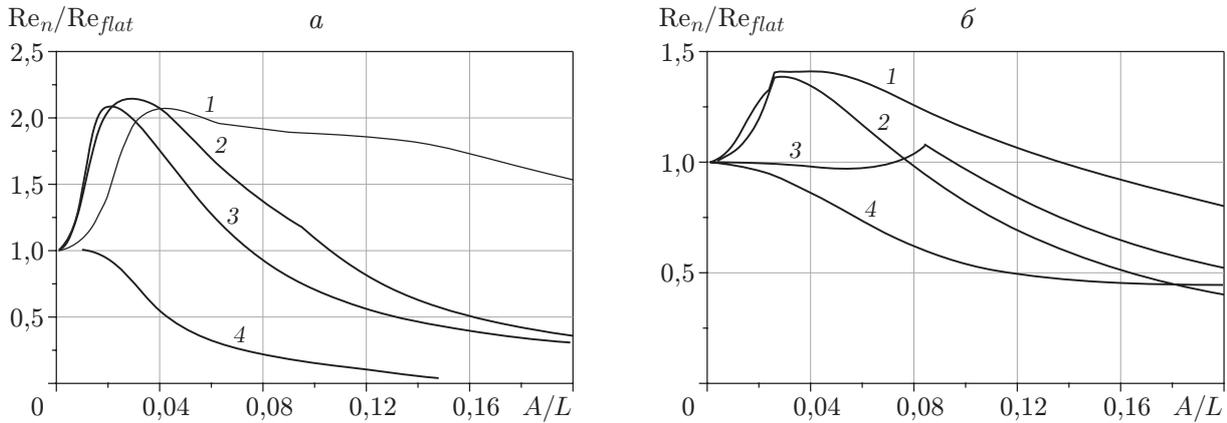


Рис. 2. Зависимость критического числа Рейнольдса, при котором появляются неустойчивые возмущения, от параметра гофрирования при  $\beta = 10^\circ$ ,  $Re_{flat} = 5,67$ :  
 а —  $Ka = 10$ , б —  $Ka = 5$ ; 1 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 10$ , 2 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 5$ , 3 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 4$ ,  
 4 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 3$

На рис. 1 представлены типичные кривые нейтральной устойчивости при различных значениях параметров  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)}$  и  $A/L$ . Отметим сильную зависимость формы этих кривых от периода гофрирования, их немонотонный характер и существование “носика”, где значение  $Re_n \equiv Re(Q_n)$  минимально и производная  $dRe/dQ$  обращается в нуль при  $Q = Q_n$ . Значение  $Re_n$  является критическим параметром волнообразования при стекании пленки по гофрированной стенке, для его вычисления разработан специальный численный алгоритм. На рис. 2, 3 приведены зависимости этого параметра от параметра гофрирования  $A/L$  при различных значениях угла наклона  $\beta$ , числа Капицы и периода гофрирования.

Из рис. 1-3 следует, что при малом значении угла наклона гофрирование может оказывать дестабилизирующее влияние ( $Re_n/Re_{flat} < 1$ ). Расчеты при  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} \leq 3$  и малых углах наклона  $\beta$  показывают, что при всех значениях параметра  $A/L < 0,2$  гоф-

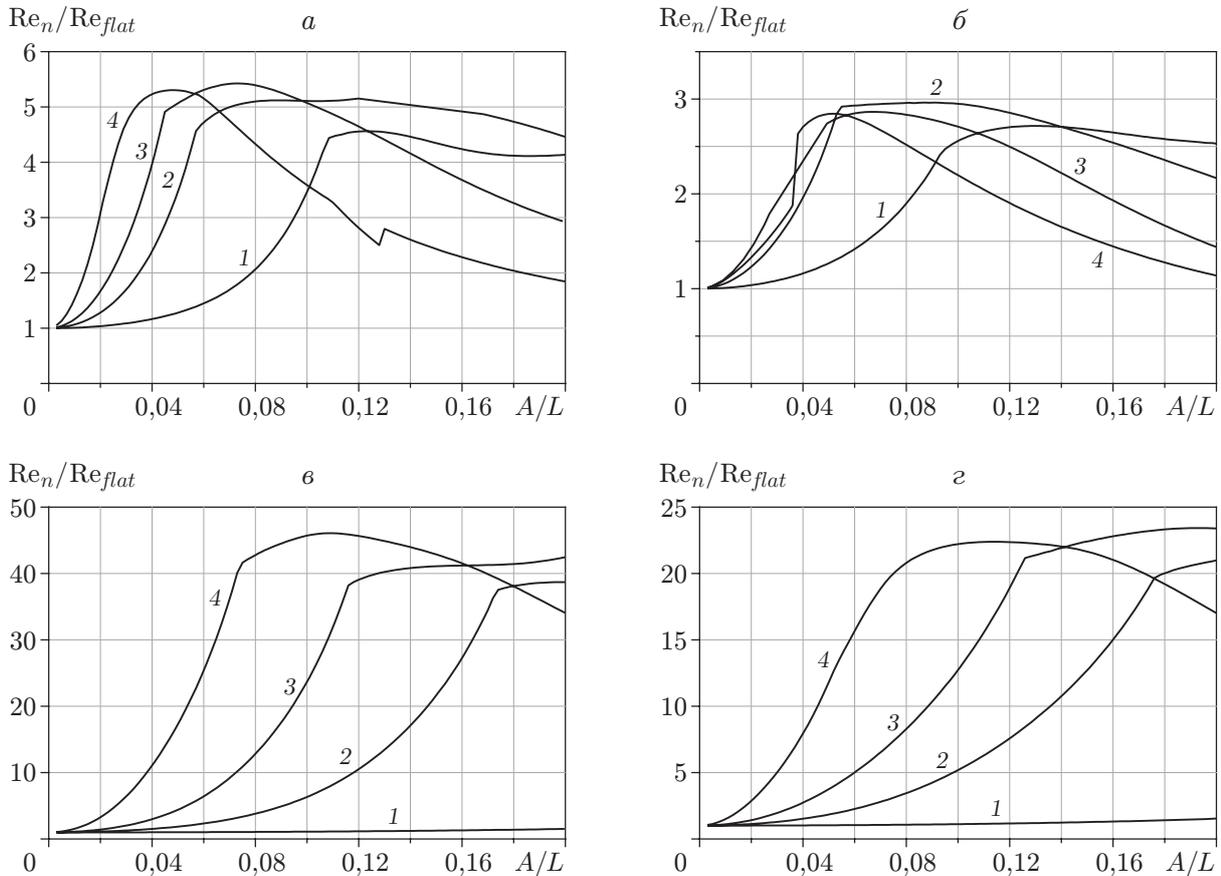


Рис. 3. Зависимость критического числа Рейнольдса, при котором появляются неустойчивые возмущения, от параметра гофрирования:

$a, б$  —  $\beta = 30^\circ$ ,  $Re_{flat} = 1,73$  ( $a$  —  $Ka = 10$ ,  $б$  —  $Ka = 5$ ),  $в, г$  —  $\beta = 80^\circ$ ,  $Re_{flat} = 0,176$  ( $в$  —  $Ka = 10$ ,  $г$  —  $Ka = 5$ ); 1 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 10$ , 2 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 5$ , 3 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 4$ , 4 —  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 3$

рирование оказывает дестабилизирующее влияние. С уменьшением числа Капицы характерные значения  $Re_n/Re_{flat}$  уменьшаются, что способствует волнообразованию при всех рассмотренных значениях угла наклона  $\beta$ . Зависимость критического параметра волнообразования от параметра  $A/L$  имеет немонотонный характер при всех рассмотренных значениях  $\beta$ ,  $Ka$ ,  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ , причем при малых значениях угла наклона имеет место четко выраженный максимум. С увеличением угла наклона  $\beta$  влияние периода гофрирования на критический параметр волнообразования изменяется на противоположное: при  $\beta = 10^\circ$  течение пленки по стенке с малым периодом гофрирования  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 3$  оказывается менее устойчивым по сравнению со случаем течения с периодом  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 10$ , а при  $\beta = 80^\circ$  — наоборот. Следует отметить, что при увеличении угла наклона  $\beta$  с  $10^\circ$  до  $80^\circ$  значение  $Re_{flat}$  уменьшается более чем в 30 раз, поэтому характерные значения  $Re_n/Re_{flat}$  на рис. 3, в, г значительно больше, чем на рис. 2, а, б. При увеличении угла наклона  $\beta$  величина  $Re_n$  меняется незначительно.

На рис. 4, 5 линии 1'–4' являются границами областей параметров  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)}$  и  $A/L$ , в которых течение пленки устойчиво к произвольным возмущениям ( $Q \in [0, 0,5]$ ). Такие области существуют при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса, при  $Re \geq 13$  на рис. 4 и  $Re \geq 10$  на рис. 5 они отсутствуют. При этом период гофрирования в

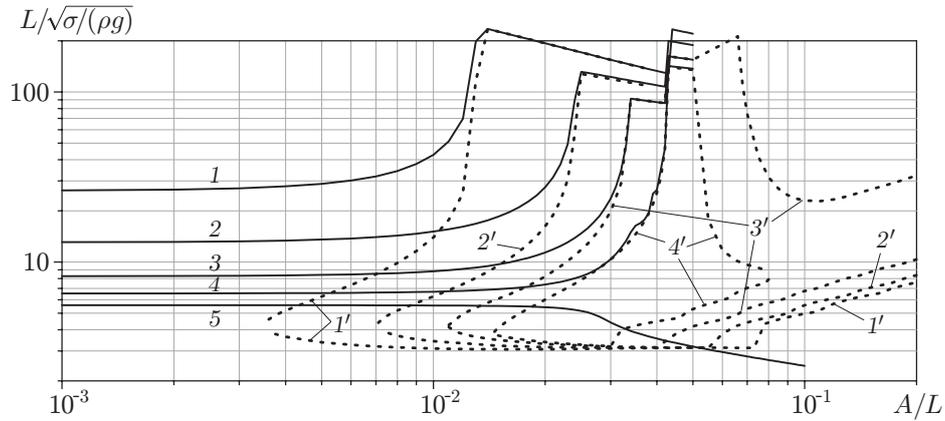


Рис. 4. Зависимость величины  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)}$  от параметра гофрирования  $A/L$  при  $\beta = 10^\circ$ ,  $Re_{flat} = 5,67$ ,  $Ka = 10$ :

1–5 — верхние границы областей, в которых стекание пленки устойчиво к периодическим возмущениям с  $Q = 0$ , 1'–4' — верхние границы областей, в которых стекание пленки устойчиво к произвольным возмущениям с  $Q \in [0, 0,5]$ ; 1, 1' —  $Re = 6$ ; 2, 2' —  $Re = 7$ ; 3, 3' —  $Re = 9$ ; 4, 4' —  $Re = 11$ ; 5 —  $Re = 13$

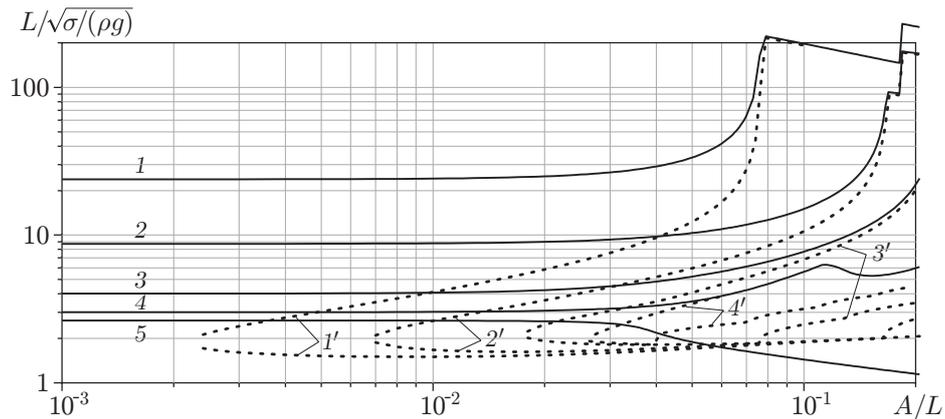


Рис. 5. Зависимость величины  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)}$  от параметра гофрирования  $A/L$  при  $\beta = 40^\circ$ ,  $Re_{flat} = 1,19$ ,  $Ka = 10$ :

1–5 — верхние границы областей, в которых стекание пленки устойчиво к периодическим возмущениям с  $Q = 0$ , 1'–4' — верхние границы областей, в которых стекание пленки устойчиво к произвольным возмущениям с  $Q \in [0, 0,5]$ ; 1, 1' —  $Re = 1,3$ ; 2, 2' —  $Re = 2$ ; 3, 3' —  $Re = 5$ ; 4, 4' —  $Re = 8$ ; 5 —  $Re = 10$

указанных областях устойчивости изменяется на несколько порядков и существенно зависит от параметра  $A/L$  и числа Рейнольдса. Линии 1–5 на рис. 4, 5 являются границами областей параметров  $L/\sqrt{\sigma/(\rho g)}$  и  $A/L$ , в которых стекание устойчиво к периодическим возмущениям ( $Q = 0$ ). Период этих возмущений равен периоду гофрирования  $L$ . Заметим, что границы таких областей устойчивости были рассчитаны в [8, 9] для случая стекания пленки вдоль вертикальной гофрированной поверхности ( $Ka = 10, 5$ ). Таким образом, результаты расчетов устойчивости при различных значениях угла наклона в диапазоне  $0 < A/L < 0,1667$  показывают, что имеется диапазон чисел Рейнольдса  $Re_{flat} < Re < Re^{**}$ , где существуют параметры гофрирования ( $A/L, L/\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ ), при которых стекание пленки по волнистой стенке устойчиво к произвольным двумерным возмущениям.

**Заключение.** В рамках интегрального подхода исследовано стекание вязких пленок жидкости вдоль наклонной гофрированной (синусоидальной) поверхности и рассмотрена устойчивость нелинейных стационарных решений к произвольным возмущениям. Показано, что критическое значение числа Рейнольдса, при котором стационарное стекание становится неустойчивым, существенно зависит от периода и амплитуды гофрирования, физических свойств жидкости (числа Капицы) и угла наклона поверхности течения. Отметим, что в случае стекания пленки вдоль гладкой стенки критический параметр волнообразования  $Re_{flat}$  зависит только от угла наклона плоскости течения. Установлено, что в диапазоне значений числа Рейнольдса вплоть до умеренных ( $Re < Re^{**}$ ) существуют значения параметров гофрирования (амплитуды и периода), при которых стекание пленки вдоль волнистой стенки устойчиво к произвольным возмущениям. Такие параметры существуют при всех рассмотренных углах наклона плоскости течения  $10^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ , при этом зависимость  $Re^{**}(\beta)$  является более слабой по сравнению с зависимостью  $Re_{flat}(\beta)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Helbig K., Nasarek R., Gambryan-Roisman T., Stephan P. Effect of longitudinal minigrooves on flow stability and wave characteristics of falling liquid films // J. Heat Transfer. 2009. V. 131. 011601.
2. Valluri P., Matar O. K., Hewitt G. F., Mendes M. A. Thin film flow over structured packings at moderate Reynolds numbers // Chem. Engng Sci. 2005. V. 60. P. 1965–1975.
3. Weinstein S. J., Ruschak K. J. Coating flows // Annual Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 29–53.
4. Kraus A., Bar-Cohen A., Wative A. A. Cooling electronic equipment. Hoboken: John Wiley and Sons, 2005. (Mechanical engineers' handbook: Energy and power; V. 4).
5. Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip // Annual Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 381–411.
6. Cao Z., Vlachogiannis M., Bontozoglou V. Experimental evidence for a short-wave global mode in film flow along periodic corrugations // J. Fluid Mech. 2013. V. 718. P. 304–320.
7. Tougou H. Long waves on a film flow of a viscous fluid down an inclined uneven wall // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. P. 1014–1019.
8. Трифонов Ю. Я. Устойчивость и нелинейные волновые режимы при стекании пленок по гофрированной поверхности // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 110–120.
9. Trifonov Y. Y. Stability of a viscous liquid film flowing down a periodic surface // Intern. J. Multiphase Flow. 2007. V. 33. P. 1186–1204.
10. Vlachogiannis M., Bontozoglou V. Experiments on laminar film flow along a periodic wall // J. Fluid Mech. 2002. V. 457. P. 133–156.
11. Wierschem A., Aksel N. Instability of a liquid film flowing down an inclined wavy plane // Physica D. 2003. V. 186. P. 221–237.
12. Wierschem A., Lepski C., Aksel N. Effect of long undulated bottoms on thin gravity-driven films // Acta Mech. 2005. V. 179. P. 41–66.
13. D'Alessio S. J. D., Pascal J. P., Jasmine H. A. Instability in gravity-driven flow over uneven surfaces // Phys. Fluids. 2009. V. 21. 062105.
14. Pollak T., Aksel N. Crucial flow stabilization and multiple instability branches of gravity-driven films over topography // Phys. Fluids. 2013. V. 25. 024103.
15. Tseluiko D., Blyth M. G., Papageorgiou D. T. Stability of film flow over inclined topography based on a long-wave nonlinear model // J. Fluid Mech. 2013. V. 729. P. 638–671.

- 
16. **Трифонов Ю. Я.** Волны на стекающих пленках жидкости. Расчет устойчивости к произвольным двумерным возмущениям и “оптимальные” режимы стекания // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 188–198.
  17. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.

*Поступила в редакцию 26/V 2014 г.,  
в окончательном варианте — 12/XI 2014 г.*

---