УДК 62-40

ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ*

Э. Я. Рапопорт, Ю. Э. Плешивцева

Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: edgar.rapoport@mail.ru
yulia_pl@mail.ru

Предлагается конструктивная технология многокритериальной оптимизации процессов управления техническими объектами с распределёнными параметрами, базирующаяся на однокритериальной версии в виде минимаксной свёртки нормализуемых критериев качества. Развиваемый подход основан на переходе к эквивалентной форме вариационной задачи с ограничениями, решение которой априори является парето-эффективным. Дальнейшие процедуры предварительной параметризации управляющих воздействий и последующей редукции к специальной задаче полубесконечного программирования позволяют найти искомые экстремали с использованием их чебышевских свойств и фундаментальных закономерностей предметной области. Приводится представляющий самостоятельный интерес пример многокритериальной оптимизации режимов функционирования объекта технологической теплофизики.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, системы с распределёнными параметрами, оптимальное управление, полубесконечная оптимизация, альтернансный метод.

DOI: 10.15372/AUT20170402

Введение. Оценка эффективности функционирования сложных управляемых систем, как правило, производится в приложениях по целому ряду показателей качества, чаще всего конфликтующих друг с другом, что приводит к представляющей большой самостоятельный интерес многокритериальной (векторной) задаче выбора возможных альтернатив для управляющих воздействий в условиях неопределённости целей процесса управления [1–7]. Отбор приемлемых вариантов происходит при этом среди эффективных решений (множество Парето), не улучшаемых ни по одному из критериев без ухудшения показателей по какому-либо из остальных.

Традиционные способы редукции исходной многокритериальной задачи управления (МЗУ) к однокритериальной свёртке компонентов векторной целевой функции с заданными весовыми коэффициентами приводят к построению множества Парето путём перебора всех допустимых значений таких коэффициентов, вследствие чего возникает самостоятельная проблема оптимального выбора в пределах этого множества единственной альтернативы в условиях значительного числа возможных вариантов [2–7].

Переход путём соответствующей процедуры нормирования к относительным оценкам всех составляющих векторного критерия с последующим использованием их минимаксной (или максиминной) свёртки с единичными весовыми коэффициентами позволяет непосредственно получить парето-эффективное решение многокритериальной задачи [2, 6], которая сводится после параметризации искомых управляющих воздействий к специальной

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проектная часть госзадания, проект № 10.3260.2017/ПЧ).

задаче математического программирования с учётом всех изначально заданных ограничений [3–6].

Целью предлагаемого исследования является разработка на основе подобного подхода конструктивной технологии решения МЗУ бесконечномерными моделями объектов с распределёнными параметрами, для которых формулируемая в итоге задача математического программирования принципиально усложняется и принимает вид задачи полубесконечной оптимизации с бесконечным числом ограничений в типичных для приложений случаях их оценки в равномерной метрике [8, 9].

В этих условиях применяются процедура последовательной параметризации искомых управляющих воздействий и конструктивные вычислительные алгоритмы альтернансного метода поиска решений задачи полубесконечной оптимизации, ориентированные на существенное использование базовых закономерностей предметной области исследуемой МЗУ [8–10].

Постановка многокритериальной задачи управления. Пусть управляемая функция состояния $Q(X,t)$ объекта с распределёнными параметрами описывается в зависимости от времени $t \in (0,t^*)$ и пространственных координат $X \in V$, $X=(x_i)$, $i=\overline{1,m}$, $1 \le m \le 3$, в пределах заданной односвязной области V m-мерного евклидова пространства E^m с кусочно-гладкой границей S линейным неоднородным уравнением в частных производных параболического типа с постоянными во времени коэффициентами [11]

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\sum_{i=1}^{m} a_i(X)\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{m} b_i(X)\frac{\partial Q}{\partial x_i}+c(X)Q+g_V(X)u_V(t) \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$Q(X,0)=f(X), \quad X\in V\cup S; \qquad \frac{\partial Q}{\partial N}+\beta Q=g_S(X)u_S(t), \quad X\in S, \qquad (2)$$

и сосредоточенными внутренними $u_V(t)$ или/и граничными $u_S(t)$ управляющими воздействиями при изначально фиксируемых функциях $g_V(X)$, $g_S(X)$ их пространственного распределения. Здесь N — вектор внешней нормали к S; $\beta=\mathrm{const}\ge 0$; t^* — конечный момент процесса управления; дифференциальный оператор в правой части (1) самосопряжённый; функция $f(X)\in L_2(V)$ и коэффициенты $a_i(X)$, $b_i(X)$, $c(X)$ являются известными достаточно гладкими функциями своих аргументов, причём не все $a_i(X)$ в (1) одновременно равны нулю.

Управляющие воздействия $u(t)\in\{u_V(t),u_S(t)\}$ должны быть подчинены ограничениям

$$u_{\min}\le u(t)\le u_{\max}, \quad t\in[0,t^*], \qquad (3)$$

с известными предельно допустимыми значениями $u_{\min}$ и $u_{\max}$.

Представление управляемой величины $Q(X,t)\in L_2(V)$ в форме её разложения в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r(X)$ системе собственных функций $\varphi_n(X)$, определяемых по известной технологии метода конечных интегральных преобразований [12]

$$Q(X,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{Q}_n(t)\varphi_n(X); \quad \bar{Q}_n(t)=\int\limits_V Q(Y,t)\varphi_n(Y)r(Y)dY, \qquad (4)$$

приводит при сосредоточенных управлениях $u_V(t)$, $u_S(t)$ к описанию модели объекта поведением бесконечного числа его временны́х мод $\bar{Q}_n(t)$ [11–13]:

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2\bar{Q}_n + k_{Vn}u_V(t) + k_{Sn}u_S(t), \quad n = 1, 2, \ldots; \qquad \bar{Q}_n(0) = \bar{f}_n, \tag{5}$$

где μ_n^2 — собственные числа; $\bar{f}_n$ — моды разложения начального состояния $f(X)$ в (2) в ряд вида (4):

$$f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n\varphi_n(X); \quad \bar{f}_n = \int\limits_V f(Y)\varphi_n(Y)r(Y)dY, \tag{6}$$

$$k_{Vn} = \int\limits_V g_V(Y)\varphi_n(Y)r(Y)dY; \quad k_{Sn} = \int\limits_S g_S(Y)\varphi_n(Y)r(Y)dS(Y). \tag{7}$$

Пусть качество процесса управления оценивается применительно к модели (5)–(7) объекта управления (1)–(4) совокупностью различных критериев оптимальности $I_p(u)$, $p = \overline{1, q}$, $q > 1$, представляемых в форме интегральных функционалов

$$I_p(u) = \int\limits_0^{t^*} f_{0p}(\bar{Q}, u)dt \to \min_{u \in \Omega_p}, \quad p = \overline{1, q}, \;\; \bar{Q} = (\bar{Q}_n(t)), \tag{8}$$

с известными подынтегральными достаточно гладкими функциями f_{0p} своих аргументов.

Проблема сводится к поиску управляющих воздействий для объекта управления (5), обеспечивающих минимизацию* всех $I_p(u)$ на компактных множествах $\Omega_p = \{u\colon \Phi_p(u) \le \varepsilon_{0p}, u \in [u_{\min}, u_{\max}]\}$ в (8) в условиях учёта заданных для каждого $p \in \{\overline{1, q}\}$ достижимых на Ω_p ограничений на величину ε_{0p} допустимых погрешностей $\Phi_p(u)$ отклонения конечных состояний $Q_p(X, t^*)$, $X \in V$, объекта (4) от требуемой постоянной величины $Q_c = \mathrm{const}$:

$$\Phi_p(u) = \max_{X \in V} |Q_p(X, t^*) - Q_c| = \max_{X \in V} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{pn}(t^*)\varphi_n(X) - Q_c \Big| \le \varepsilon_{0p}, \tag{9}$$

где значения ε_{0p} оцениваются в равномерной метрике на множестве $V \ni X$ применительно к представляющим наибольший интерес ситуациям в прикладных задачах [8–10, 14]. Здесь согласно (4) $\overline{Q}_{pn}(t^*)$ — временны́е моды $Q_p(X, t^*)$.

В итоге может быть сформулирована многокритериальная задача [1–7]:

$$I_\Sigma \to \min_{u \in \Omega_\Sigma}; \quad I_\Sigma = (I_p(u)), \;\; p = \overline{1, q}, \tag{10}$$

$$\Omega_\Sigma = \{u\colon \Phi_\Sigma(u) \le \varepsilon_0, \;\; u \in [u_{\min}, u_{\max}]\};$$
$$\Phi_\Sigma(u) = \max_{X \in V} |Q(X, t^*) - Q_c| = \max_{X \in V} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t^*)\varphi_n(X) - Q_c \Big| \tag{11}$$

*Задачи на максимум I_p, $p \in \{\overline{1, q}\}$, приводятся к минимизации $-I_p$.

минимизации q критериев I_p согласно (10) с учётом ограничения (11) на априори фиксируемую по условиям выполнения неравенств $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_{0p}$ $\forall$ $p = \overline{1, q}$ величину ε_0 погрешности равномерного приближения $Q(X, t^*)$ к Q_c при управлении объектом (5). Здесь исключается тривиальный случай совпадения решений u_p^* задач (8), (9) по каждому из критериев I_p для всех $p = \overline{1, q}$.

Эквивалентная форма однокритериальной задачи оптимального управления. Традиционные методы векторной оптимизации используют различные способы свёртывания предварительно приводимых к соизмеримому виду (нормализуемых) критериев эффективности I_p в (8) [1–7]. В частности, не влияющий на результат решения задачи (10), (11) переход от I_p к относительным равнозначным оценкам [4, 5]

$$\lambda_p(u) = \frac{I_p(u) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*}, \quad 0 \leq \lambda_p(u) \leq 1, \;\; p = \overline{1, q}, \tag{12}$$

приводит (в отличие от типовой формы с весовыми коэффициентами) к минимаксной свёртке исходной МЗУ (10), (11) следующего вида:

$$\lambda(u) = \max_{p \,\in\, \{\overline{1, q}\}} \lambda_p(u) \to \min_{u \,\in\, \Omega_\Sigma}, \tag{13}$$

точка оптимума которой

$$u^{**} = \arg\min_{u \,\in\, \Omega_\Sigma} \Big[\max_{p \,\in\, \{\overline{1, q}\}} \lambda_p(u) \Big] \tag{14}$$

априори принадлежит множеству Парето исходной МЗУ и может рассматриваться в качестве искомого оптимального управления в задаче (10), (11) [2–6]. В выражении (12) I_p^* — минимальная величина I_p, достигаемая при управлении u_p^* в условиях (9):

$$I_p^* = \min_{u \,\in\, \Omega_p} I_p(u); \quad u_p^* = \arg\min_{u \,\in\, \Omega_p} I_p(u); \quad \lambda_p(u_p^*) = 0, \tag{15}$$

и I_p^0 — «наихудшее» значение $I_p(u)$ на множестве Ω_p.

Минимаксная задача (13) эквивалентна обычной однокритериальной задаче с интегральным функционалом качества

$$I = \frac{1}{t^*} \int\limits_0^{t^*} \lambda^0 dt = \lambda^0 \to \min_{u \,\in\, \Omega_\Sigma}, \quad \lambda^0 = \mathrm{const}, \tag{16}$$

с ограничениями на величину

$$\lambda_p(u) \leq \lambda^0, \quad p = \overline{1, q}, \tag{17}$$

и минимизируемым параметром λ^0, вводимым согласно уравнению

$$d\lambda^0/dt = 0. \tag{18}$$

В итоге исходная МЗУ (10), (11) сводится без каких-либо погрешностей в рамках рассматриваемых моделей к отысканию решения u^{**} задачи (16)–(18) с одним критерием оптимальности I в условиях заданных ограничений в (11) и (17).

Введём в рассмотрение новые переменные $z_p(u)$, $p=\overline{1,q}$, описываемые уравнениями

$$dz_p/dt = f_{0p}; \qquad z_p(t^*) = I_p(u), \quad p=\overline{1,q}, \tag{19}$$

где f_{0p} — подынтегральные функции частных критериев оптимальности в (8). Дополнив модель объекта (5) уравнениями (18), (19) и имея в виду выражения (8), (12) для $I_p(u)$ и $\lambda_p(u)$, приходим к следующей эквивалентной форме задачи (16)–(18).

Необходимо определить стесняемое условиями (3) управляющее воздействие $u^{**}(t)$, которое переводит объект управления (5), (18), (19) в требуемое согласно (11) конечное состояние при минимальном значении критерия оптимальности (16) с учётом дополнительных ограничений на конечные значения $z_p(t^*)$, $p=\overline{1,q}$, новых переменных $z_p(t)$ в соответствии с (12), (17), (19):

$$\frac{z_p(t^*) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*} \le \lambda^0, \quad p=\overline{1,q}. \tag{20}$$

На задачу (16), (20) оптимального управления бесконечномерным объектом (5), (18), (19) распространяется принцип максимума Понтрягина [9].

Базовое условие

$$H(\bar{Q}^{**}(t), u^{**}(t), \bar{\Psi}^{**}(t)) = \max_{u\,\in\,[u_{\min},\,u_{\max}]} H(\bar{Q}^{**}(t), u(t), \bar{\Psi}^{**}(t)), \quad t\in(0,t^*), \tag{21}$$

достижения максимума функции Понтрягина

$$H(\bar{Q}(t), u(t), \bar{\Psi}(t)) = -\lambda^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)(-\mu_n^2 \bar{Q}_n + k_{Vn}u_V(t) + k_{Sn}u_S(t)) + \sum_{p=1}^{q} \tilde{\Psi}_p f_{0p} \tag{22}$$

в оптимальном процессе $(\bar{Q}^{**}(t), u^{**}(t), \bar{\Psi}^{**}(t))$, где вектор сопряжённых переменных $\bar{\Psi}(t) = (\tilde{\Psi}_p,\ p=\overline{1,q};\ \Psi_n(t),\ n=1,2,\ldots)$ описывается уравнениями

$$\frac{d\tilde{\Psi}_p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_p} = 0, \quad p=\overline{1,q}; \qquad \frac{d\Psi_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_n}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{23}$$

как правило, позволяет найти $u^{**}(t)$ в форме явной функции $u^{**}(\bar{Q}^{**}(t),\ \bar{\Psi}^{**}(t))$ переменных $\bar{Q}(t)$ и $\bar{\Psi}(t)$ независимо от ограничений (11) и (20) на конечное состояние объекта управления [15].

Редукция к задаче полубесконечной оптимизации. Найденные из (21) зависимости $u^{**}(\bar{Q}^{**}, \bar{\Psi}^{**})$ во многих случаях непосредственно устанавливают структуру искомых оптимальных алгоритмов $u^{**}(t)$ (и аналогичным образом $u_p^*(t)$ в задаче (15)) в форме их параметрического описания с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = (\Delta_i^{(N)})$, $i=\overline{1,N}$, упорядоченной последовательности конечного числа N параметров $\Delta_1^{(N)}, \Delta_2^{(N)}, \ldots, \Delta_N^{(N)}$, непосредственно характеризующих поведение $u^{**}(t)$, $u_p^*(t)$ в пространственно-временной области их определения [8–10].

Интегрирование уравнений объекта (5) с параметризованным управлением $u(\Delta^{(N)}, t)$ приводит в таких случаях к представлению критериев оптимальности I_p в (8), λ_p в (12) и конечных состояний $Q_p(X,t^*)$, $Q(X,t^*)$ в (9), (11) в виде явных достаточно гладких зависимостей $I_p(\Delta^{(N)})$, $\lambda_p(\Delta^{(N)})$, $Q_p(X,\Delta^{(N)})$ и $Q(X,\Delta^{(N)})$ от $\Delta^{(N)}$, если считать известными значения I_p^* и I_p^0 в (12).

Размерность N вектора $\Delta^{(N)}$ устанавливается по известным правилам в зависимости от значения ε_0 в (11) либо априори фиксируется возможностями технической реализации $\Delta^{(N)}$-параметризуемых управляющих воздействий [8–10, 14].

В результате производится точная редукция задачи (16)–(20) оптимального управления объектом (5), (18), (19) к задаче минимизации целевой функции

$$I = \lambda^0(\Delta^{(N)}) \to \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \tag{24}$$

конечного числа N переменных $\Delta_i^{(N)}$, $i = \overline{1, N}$, на допустимом множестве $G_N \ni \Delta^{(N)}$ их изменения с бесконечным числом ограничений

$$\Phi_\Sigma(\Delta^{(N)}) = \max_{X \in V} |Q(X, \Delta^{(N)}) - Q_c| \le \varepsilon_0, \tag{25}$$

диктуемых в силу (25) требованиями (11) для всех $X \in V$ и дополняемых в соответствии с (17), (20) неравенствами

$$\lambda_p(\Delta^{(N)}) = \frac{I_p(\Delta^{(N)}) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*} \le \lambda^0, \quad p = \overline{1, q} \tag{26}$$

(задача полубесконечной оптимизации [8, 9]).

Ограничимся далее наиболее характерным для приложений случаем

$$\varepsilon_0 = \min \varepsilon(\Delta^{(N)}) = \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \left[\max_{X \in V} |Q(X, \Delta^{(N)}) - Q_c| \right] \tag{27}$$

в (25) с минимально достижимой величиной ε_0 в классе $\Delta^{(N)}$-параметризуемых управлений.

Задача (24)–(27) сводится [8] к минимаксной задаче

$$\Phi_\Sigma(\Delta^{(N)}) \to \min_{\Delta^{(N)} \in G_N}. \tag{28}$$

Её решение $\overline{\Delta}^{(N)}$ обладает альтернансными свойствами [8–10], согласно которым выполняются равенства

$$|Q(X_j^0, \bar{\Delta}^{(N)}) - Q_c| = \min \varepsilon(\Delta^{(N)}), \quad j = \overline{1, R}, \;\; R = N + 1, \tag{29}$$

в некоторых точках $X_j^0 \in V$, $j = \overline{1, R}$. Число R этих точек оказывается равным числу $N+1$ всех неизвестных в (28), включая все компоненты $\bar{\Delta}_i^{(N)}$, $i = \overline{1, N}$, искомого вектора $\bar{\Delta}^{(N)}$ и априори неизвестную величину минимакса $\min \varepsilon(\Delta^{(N)})$. При наличии дополнительной информации из предметной области о конфигурации зависимостей $Q(X, \bar{\Delta}^{(N)})$ от $X \in V$, позволяющей идентифицировать значения X_j^0 и знаки разностей $Q(X_j^0, \bar{\Delta}^{(N)}) - Q_c$, равенства (29) вместе с условиями

$$\frac{\partial}{\partial X} Q(X_{j\nu}^0, \bar{\Delta}^{(N)}) = 0, \quad \nu = \overline{1, R_1}, \tag{30}$$

существования экстремума функции $Q(X, \bar{\Delta}^{(N)})$ в точках $X_{j\nu}^0 \in \mathrm{int} V$, $\nu = \overline{1, R_1}$, $R_1 \le R$, трансформируются к замкнутой системе $N + R_1 + 1$ уравнений, решение которой (как правило, единственное) относительно всех искомых величин $\bar{\Delta}_i^{(N)}$, $i = \overline{1, N}$, $\min \varepsilon(\Delta^{(N)})$ и промежуточных неизвестных $X_{j\nu}^0$, $\nu = \overline{1, R_1}$, находится известными численными методами.

По найденному указанным способом вектору $\bar{\Delta}^{(N)}$ и известным зависимостям $\lambda_p(\Delta^{(N)})$ вычисляется достигаемое в условиях (27) минимальное значение $\lambda^0_{\min}$ целевой функции (24):

$$\lambda^0_{\min} = \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \lambda^0(\Delta^{(N)}) = \lambda^0(\bar{\Delta}^{(N)}) = \max_{p \in \{\overline{1,q}\}} \lambda_p(\overline{\Delta}^{(N)}), \tag{31}$$

«автоматически» обеспечивая выполнение условий (26) и завершая тем самым решение задачи (24)–(27).

Для определения $\lambda^0_{\min}$ в (31) необходимо предварительно найти I^*_p и I^0_p для всех $p = \overline{1,q}$ в (12).

Однокритериальные задачи оптимизации (8), (9) после параметризации искомых управлений приводятся, подобно (24), (25), к задаче полубесконечной оптимизации следующего вида:

$$I_p([\Delta^{(N)}]_p) \to \min_{[\Delta^{(N)}]_p}; \qquad \Phi_p([\Delta^{(N)}]_p) = \max_{X \in V} |Q(X, [\Delta^{(N)}]_p) - Q_c| \le \varepsilon_{0p}, \tag{32}$$

где $[\Delta^{(N)}]_p$ — элементы подмножества $\{[\Delta^{(N)}]_p\} \subset \{\Delta^{(N)} \in G_N\}$ значений $\Delta^{(N)}$ в p-й задаче (32), а ε_{0p} выбираются далее аналогично (27):

$$\varepsilon_{0p} = \min \varepsilon([\Delta^{(N)}]_p) = \min_{[\Delta^{(N)}]_p} \Big[\max_{X \in V} |Q(X, [\Delta^{(N)}]_p) - Q_c| \Big]. \tag{33}$$

Отсюда следует, в частности, в соответствии с (27), (33), что

$$\varepsilon_0 \le \varepsilon_{0p}, \ \ p = \overline{1,q}, \quad \text{при } \{[\Delta^{(N)}]_p\} \subset \{\Delta^{(N)} \in G_N\}, \tag{34}$$

и поэтому все ограничения (32), (33) заведомо выполняются в условиях (25), (27), (28), (34).

На решениях $\Delta^{[p]}$ задач (32) по описанной схеме альтернансного метода в (12) определяются величины

$$I^*_p = I_p(\Delta^{[p]}), \quad p = \overline{1,q}. \tag{35}$$

Максимально возможные значения I^0_p критерия I_p формально задаются зависимостями

$$I^0_p = I_p(\tilde{\Delta}^{[p]}), \quad \tilde{\Delta}^{[p]} = \arg \max_{[\Delta^{(N)}]_p \in G_N} I_p([\Delta^{(N)}]_p\colon \Phi_p([\Delta^{(N)}]_p) \le \min \varepsilon([\Delta^{(N)}]_p)), \tag{36}$$

однако величины I^0_p, $p = \overline{1,q}$, могут быть установлены проще, например по следующему алгоритму:

$$I^0_k = \max_{\substack{p \in \{\overline{1,q}\} \\ p \ne k}} I_k(\Delta^{[p]}), \quad k = \overline{1,q}, \tag{37}$$

или исходя из физических соображений в каждой конкретной задаче.

В итоге решение по описанной схеме альтернансного метода задач полубесконечной оптимизации (32) и (24)–(27) с вычислением $\lambda^0_{\min}$, I^*_p и I^0_p согласно (31), (35) и (36) (или (37)) исчерпывает решение исходной МЗУ (13).

Многокритериальная задача управления объектом технологической теплофизики. В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим многокритериальную задачу оптимизации процесса индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед обработкой давлением [16, 17].

Пусть температурное поле $Q(x,t)$ тела цилиндрической формы в процессе индукционного нагрева описывается в зависимости от радиальной координаты x и времени t неоднородным одномерным уравнением теплопроводности в относительных единицах вида (1), (2) [14]:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + g_V(x)u_V(t), \quad 0 < t < t^*, \;\; 0 < x < 1, \tag{38}$$

$$Q(x,0) = Q^0 = \text{const}, \quad 0 \le x \le 1; \qquad \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial Q(1,t)}{\partial x} + \beta Q(1,t) = 0. \tag{39}$$

Здесь заданный коэффициент $\beta = \text{const} > 0$ определяет уровень тепловых потерь в окружающую среду с температурой Q^0 на внешней поверхности цилиндра $x = 1$; $g_V(x)$ — известная функция радиального распределения электромагнитных источников тепла [14]; $u_V(t)$ — суммарная удельная мощность внутреннего тепловыделения, рассматриваемая в качестве управляющего воздействия, стеснённого ограничением (3)

$$0 \le u_V(t) \le 1, \quad 0 < t \le t^*. \tag{40}$$

В пространстве модальных переменных $\bar{Q}_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, объект управления (38), (39) описывается бесконечной системой дифференциальных уравнений вида (5):

$$d\bar{Q}_n/dt = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + k_{Vn}u_V(t), \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}_n^0, \;\; n = 1, 2, \ldots . \tag{41}$$

Температурное поле представляется его разложением (4) в ряд по собственным функциям Бесселя нулевого порядка $J_0(\mu_n x)$:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n^2 J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \beta^2) J_0^2(\mu_n)}\,\bar{Q}_n(t), \tag{42}$$

где μ_n^2 — известные собственные числа [10, 18].

Пусть качество процесса индукционного нагрева с априори фиксируемой длительностью t^* описывается тремя рассматриваемыми в качестве критериев оптимальности типичными технико-экономическими показателями вида (8), характеризующими расход энергии на нагрев ($I_1(u_V)$), потери металла в окалину ($I_2(u_V)$) и точность приближения к заданному конечному температурному состоянию ($I_3(u_V)$), оцениваемую в равномерной метрике [10, 14, 16–18]:

$$I_1(u_V) = \int_0^{t^*} u_V\,dt \to \min_{u_V \in \Omega_1}, \tag{43}$$

$$I_2(u_V) = \int_0^{t^*} f_{02}(Q(1,t))dt \to \min_{u_V \in \Omega_2}, \;\; f_{02}(Q(1,t)) = \begin{cases} 0, \;\; Q(1,t) \le Q_h, \\ (Q(1,t) - Q_h)^{r+1}, \;\; Q(1,t) \ge Q_h, \end{cases} \tag{44}$$

$$I_3(u_V) = \int_0^{t^*} \frac{\tilde{\varepsilon}}{t^*}\,dt = \tilde{\varepsilon} \to \min_{u_V \in \Omega_3}; \quad \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = 0. \tag{45}$$

Функционалы качества (43)–(45) требуется минимизировать при управлении объектом (41) в условиях заданных ограничений (3), (9) на управляющее воздействие $u_V \in \Omega_p$, $p = 1, 2, 3$, где

$$\Omega_p = \{u_V\colon \Phi_p(u_V) \le \varepsilon_{0p},\ u_V \in [0,1]\}, \quad p = 1, 2, 3,$$

$$\Phi_p(u_V) = \max_{x\,\in\,[0,1]} |Q_p(x,t^*) - Q_c| = \max_{x\,\in\,[0,1]} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n^2 J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2+\beta^2) J_0^2(\mu_n)}\, \bar{Q}_{pn}(t^*) - Q_c \Big|. \tag{46}$$

Здесь Q_h — известная в (44) температурная граница процесса окисления; $Q(1,t)$ — температура поверхности нагреваемой заготовки; r — заданное число; требуемая конечная температура $Q_c > Q_h$ в (44) и I_3 в (45) вместе с ограничением (46) для $p = 3$ при $\varepsilon_{0p}\Big|_{p\,=\,3} = \tilde{\varepsilon}$ представляет собой эквивалентную форму интегрального функционала в задаче минимаксной оптимизации точности нагрева [19].

Соответствующая многокритериальная задача (10), (11) после её минимаксной свёртки (13) с равнозначными относительными оценками (12) приводится применительно к расширенной системе уравнений модели объекта (41), (18), (19) к виду (16)–(20) с одним критерием оптимальности (16), где

$$\Omega_\Sigma = \{u_V(t)\colon \Phi_\Sigma(u_V) \le \varepsilon_0,\ u_V \in [0,1]\},$$

$$\Phi_\Sigma(u_V) = \max_{x\,\in\,[0,1]} |Q(x,t^*) - Q_c| = \max_{x\,\in\,[0,1]} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n^2 J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2+\beta^2) J_0^2(\mu_n)}\, \bar{Q}_n(t^*) - Q_c \Big| \tag{47}$$

и f_{0p}, $p = 1, 2, 3$, в (19) — подынтегральные функции в (43)–(45).

Функция Понтрягина (22) в данной однокритериальной задаче оптимизации с учётом выражений для f_{0p} в (43)–(45) записывается в следующей форме:

$$H(\bar{Q}, u_V, \bar{\Psi}) = -\lambda^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)(-\mu_n^2 \bar{Q}_n + k_{Vn} u_V) + \tilde{\Psi}_1 u_V +$$

$$+ \tilde{\Psi}_2 f_{02}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2+\beta^2) J_0(\mu_n)}\, \bar{Q}_n \Big) + \tilde{\Psi}_3 \frac{\tilde{\varepsilon}}{t^*}, \tag{48}$$

где в соответствии с (23)

$$\tilde{\Psi}_p = \mathrm{const}, \quad p = 1, 2, 3;$$

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_j} = \mu_j^2 \Psi_j - \tilde{\Psi}_2 \frac{2\mu_j^2}{(\mu_j^2+\beta^2) J_0(\mu_j)}\, \frac{\partial f_{02}}{\partial Q(1,t)}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{49}$$

Согласно условию максимума (21) искомое оптимальное управление определяется в форме релейной функции времени

$$u_V^{**}(t) = \frac{1}{2}\Big[1 + \mathrm{sign}\Big(\tilde{\Psi}_1^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} k_{Vn} \Psi_n^{**}(t)\Big)\Big] \tag{50}$$

на всех интервалах изменения оптимальной программы, где не выполняется тождественно равенство

$$\tilde{\Psi}_1^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} k_{Vn} \Psi_n^{**}(t) \equiv 0 \tag{51}$$

или является особым управлением $u_0(t)$ [20] на тех участках в её составе, где последнее соотношение имеет место.

Можно показать подобно [18], что искомая оптимальная программа (50), действительно, содержит особые участки (51), на которых минимизируются потери металла в окалину, существенно усложняя проблему однозначного выбора структуры $u_V^{**}(t)$ из множества допустимых вариантов.

Ограничимся далее типичной наиболее просто реализуемой ситуацией с определяемой в соответствии с (50), (51) программой оптимального управления [14, 18]

$$u_V^{**}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_1, \\ u_0(t), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t_2 < t \le t^*, \end{cases} \tag{52}$$

которая содержит единственный участок длительностью $t_2 - t_1$ с особым управлением $u_0(t)$ при заданной величине $t^* > t_2$ (рис. 1, *a*).

Как показано в [14, 18], если ограничиться учётом только двух уравнений модели объекта (41) для $n = 1, 2$ и соответственно первых двух сопряжённых переменных Ψ_1, Ψ_2

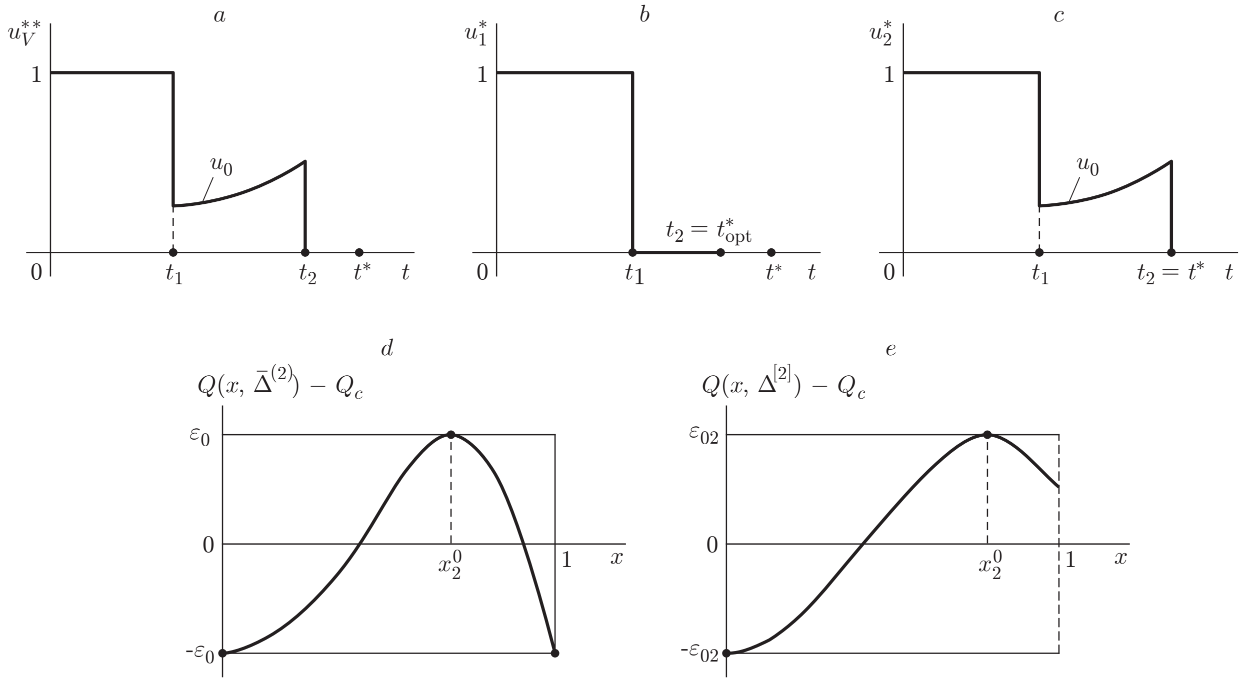

Рис. 1. Базовые характеристики оптимального процесса: структура управляющих воздействий (*a*—*c*) и формы кривых пространственного распределения конечных температурных состояний (*d*, *e*) в процессе многокритериальной оптимизации

в (49), (51), то управление (52) является в первом приближении оптимальным по критерию (44) при $t^* > t_2$, а особое управление при этом описывается выражением

$$u_0(t,t_1) = C_1(t_1)\exp\left[\frac{A_1}{r}(t-t_1)\right] + C_2(t_1)\exp[A_2(t-t_1)] + C_3 \tag{53}$$

с известными согласно [14, 18] постоянными коэффициентами A_1, A_2, C_3 и зависимостями $C_1(t_1)$, $C_2(t_1)$.

В итоге при фиксированной величине t^* оптимальное управление (52) однозначно характеризуется его параметрическим представлением с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = \Delta^{(2)} = (\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$ параметров $\Delta_1^{(2)} = t_1$, $\Delta_2^{(2)} = t_2$ — начального и конечного моментов особого участка. Последующее интегрирование уравнений (41), (42) модели объекта с параметризованным управлением $u_V(\Delta^{(2)}, t)$ приводит к получению критериев оптимальности (43)–(45), $\lambda_p(u)$ в (12) и конечного состояния $Q(x,t^*)$ в форме явных зависимостей $I_p(\Delta^{(2)})$, $\lambda_p(\Delta^{(2)})$, $p=\overline{1,3}$, и $Q(x,\Delta^{(2)})$ от x и $\Delta^{(2)}$, что обеспечивает редукцию к задаче полубесконечной оптимизации вида (24)–(27):

$$I = \lambda^0(\Delta^{(2)}) \to \min_{\Delta^{(2)} \in G_2}, \tag{54}$$

$$\Phi_\Sigma(\Delta^{(2)}) = \max_{x \in [0,1]} |Q(x,\Delta^{(2)}) - Q_c| \le \min \varepsilon(\Delta^{(2)}), \tag{55}$$

$$\lambda_p(\Delta^{(2)}) = \frac{I_p(\Delta^{(2)}) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*} \le \lambda^0, \quad p=\overline{1,3}. \tag{56}$$

Здесь для варианта (53) будем иметь согласно (41), (42) [14, 18]

$$Q(x,\Delta^{(2)}) = Q^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_{Vn}J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2+\beta^2)J_0^2(\mu_n)} F_n(t_1,t_2)\exp(-\mu_n^2 t^*);$$

$$F_n(t_1,t_2) = \exp(\mu_n^2 t_1) - 1 + \frac{C_1(t_1)\exp(-A_1 t_1/r)}{A_1/(r\mu_n^2)+1}[\exp((A_1/r+\mu_n^2)t_2) - \exp((A_1/r+\mu_n^2)t_1)] + \tag{57}$$

$$+\frac{C_2(t_1)\exp(-A_2 t_1)}{A_2/\mu_n^2+1}[\exp((A_2+\mu_n^2)t_2) - \exp((A_2+\mu_n^2)t_1)] + C_3[\exp(\mu_n^2 t_2) - \exp(\mu_n^2 t_1)].$$

При известной форме кривой $Q(x,\bar\Delta^{(2)})$ пространственного распределения конечного температурного состояния, достигаемого на решении $\bar\Delta^{(2)}$ задачи (54)–(56) (рис. 1, *d*) [14, 18], равенства (29) при $N=2$, $R=3$ в трёх точках альтернанса $x_1^0 = 0$, $x_2^0 \in (0,1)$, $x_3^0 = 1$ вместе с условием экстремума в точке x_2^0 максимума $Q(x,\bar\Delta^{(2)})$ редуцируются к расчётной системе четырёх уравнений альтернансного метода:

$$Q(0,\bar\Delta^{(2)}) - Q_c = -\min\varepsilon(\Delta^{(2)}); \quad Q(x_2^0,\bar\Delta^{(2)}) - Q_c = \min\varepsilon(\Delta^{(2)});$$
$$Q(1,\bar\Delta^{(2)}) - Q_c = -\min\varepsilon(\Delta^{(2)}); \quad \frac{\partial Q(x_2^0,\bar\Delta^{(2)})}{\partial x} = 0, \tag{58}$$

решение которой относительно всех четырёх неизвестных параметров оптимального процесса $\bar\Delta_1^{(2)} = t_1$, $\bar\Delta_2^{(2)} = t_2$, $\min\varepsilon(\Delta^{(2)})$ и координаты x_2^0 находится известными численными методами.

В соответствии с (31) по найденному указанным способом вектору $\bar{\Delta}^{(2)}$ при известных величинах I_p^*, I_p^0 последующее вычисление

$$\lambda_{\min}^0 = \max_{p=1,2,3} \lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)}) \tag{59}$$

обеспечивает выполнение неравенств (56), завершая решение исходной задачи полубесконечной оптимизации (54)–(56).

Для определения I_p^* необходимо предварительно решить частные аналогичные задачи вида (32), (33) при $\Delta^{(N)} = \Delta^{(2)} = (t_1, t_2)$.

Применительно к критерию (43) минимальный расход энергии I_1^* достигается при нефиксируемом заранее моменте t_{opt}^* окончания процесса управления с релейной формой, не содержащего особого участка алгоритма (52) (рис. 1, b) [14, 18], параметрически представляемого в этих условиях согласно (32), (33) на подмножестве $\{[\Delta^{(2)}]_{p=1}\}$ векторов $\Delta^{(2)} = (t_1, t_2 < t^*)$ в (54)–(56), где

$$\{[\Delta^{(2)}]_{p=1}\} = \{\Delta^{(2)} = (t_1, t_2)\colon t_2 = t_{\text{opt}}^*,\ u_0 = 0\}. \tag{60}$$

Здесь t_{opt}^* совпадает с минимальным временем $t_{\min}^*$ достижения требуемой величины $\varepsilon_{01} = \min \varepsilon([\Delta^{(2)}]_{p=1})$ [14, 18], и тогда всегда выполняется условие $t_{\text{opt}}^* < t^*$ для фиксируемого значения t^* в задаче (54)–(56).

В таком случае задержка начала процесса управления на время $t^* - t_{\text{opt}}^*$ обеспечивает поиск I_1^* на подмножестве (60).

В итоге задача (32), (33) для $p = 1$ сводится к виду

$$\begin{gathered} I_1([\Delta^{(2)}]_{p=1}) = t_1 \to \min_{t_1,\, t_{\text{opt}}^*}; \\ \Phi_1([\Delta^{(2)}]_{p=1}) = \max_{x \in [0,1]} |Q(x, [\Delta^{(2)}]_{p=1}) - Q_c| \le \min \varepsilon([\Delta^{(2)}]_{p=1}), \end{gathered} \tag{61}$$

где, как следует из (41), (42), (52), (60) [14, 18],

$$Q(x, [\Delta^{(2)}]_{p=1}) = Q^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n^2 J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \beta^2) J_0^2(\mu_n)} [\exp(-\mu_n^2 (t_{\text{opt}}^* - t_1)) - \exp(-\mu_n^2 t_{\text{opt}}^*)]. \tag{62}$$

Решение $\Delta^{[1]} = (t_{1\text{opt}}, t_{\text{opt}}^*)$ этой задачи обладает подобными (29) альтернансными свойствами, которые при сохранении формы кривой $Q(x, \Delta^{[1]})$, показанной на рис. 1, d [14, 18], приводят к аналогичной (58) системе уравнений, где требуется заменить только $\bar{\Delta}^{(2)}$ значением $\Delta^{[1]}$, $\min \varepsilon(\Delta^{(2)})$ решением $\min \varepsilon([\Delta^{(2)}]_{p=1})$ и представить $Q(x, [\Delta^{[1]}])$ в форме (62).

Последующее вычисление $\Delta^{[1]}$ позволяет найти

$$I_1^* = t_{1\text{opt}} \tag{63}$$

согласно (61).

Минимизация I_2 в (44) обеспечивается в условиях максимальной длительности особого участка при $t_2 = t^*$ в (52) (рис. 1, c) [14, 18], и, следовательно, в данном случае вместо (60) будем иметь

$$\{[\Delta^{(2)}]_{p=2}\} = \{\Delta^{(2)} = (t_1, t_2)\colon t_2 = t^*\} \tag{64}$$

при фиксируемой заведомо величине t^*, т. е. получаем однопараметрическое представление $[\Delta^{(2)}]_{p=2} = t_1$.

Таким образом, задача (32), (33) для $p = 2$ принимает следующий вид:

$$I_2(t_1) \to \min_{t_1}; \qquad \Phi_2(t_1) = \max_{x \in [0,1]} |Q(x, t_1) - Q_c| \le \min \varepsilon([\Delta^{(2)}]_{p=2}), \tag{65}$$

где зависимости $Q(x, t_1)$ и $I_2(t_1)$ рассчитываются на основании (41), (42), (44) при управлении (52) для рассматриваемого случая $t_2 = t^*$ с известным алгоритмом особого управления $u_0(t)$ в (52). Применительно к частному случаю (53) здесь $Q(x, t_1)$ определяется по формуле (57) при $t_2 = t^*$, а $I_2(t_1)$ находится в форме интеграла в (44) после подстановки выражения для $Q(x, t_1)$ при $x = 1$.

Альтернансные свойства (29) выполняются на решении $\Delta^{[2]} = t_{1\text{opt}}$ задачи (65) в условиях $N = 1$, $R = 2$. Можно показать аналогично [14, 18], что форма кривой $Q(x, \Delta^{[2]})$ принимает вид, показанный на рис. 1, *е* с двумя точками альтернанса $x_1^0 = 0$, $x_2^0 \in (0, 1)$, а соответствующая система теперь уже трёх уравнений для определения $\Delta^{[2]} = t_{1\text{opt}}$, $\min \varepsilon([\Delta^{(2)}]_{p=2}$ и x_2^0 выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} Q(0, \Delta^{[2]}) - Q_c = -\min \varepsilon([\Delta^{(2)}]_{p=2}); \\ Q(x_2^0, \Delta^{[2]}) - Q_c = \min \varepsilon([\Delta^{(2)}]_{p=2}); \quad \frac{\partial Q(x_2^0, \Delta^{[2]})}{\partial x} = 0. \end{gathered} \tag{66}$$

По найденным корням этой системы вычисляется $I_2^* = I_2(t_{1\text{opt}}, t^*)$ для заданной величины t^* путём подстановки в (44) выражения для $Q(1, t)$, получаемого согласно (57) при $x = 1$, $t_2 = t^*$.

Применительно к критерию (45) с ограничением (46) для $p = 3$ в отличие от (60), (64) подмножество $\{[\Delta^{(2)}]_{p=3}\}$ совпадает со всем допустимым множеством значений $\Delta^{(2)} \in G_2$. Тогда параметризуемая задача минимаксной оптимизации точности нагрева (32), (33) для $p = 3$ в её исходной постановке формулируется как

$$I_3(\Delta^{(2)}) = \max_{x \in [0,1]} |Q(x, \Delta^{(2)}) - Q_c| \to \min_{\Delta^{(2)} \in G_2}. \tag{67}$$

Решение задачи $\Delta^{[3]}$ совпадает с $\bar{\Delta}^{(2)}$ в (58) при

$$I_3^* = \min \tilde{\varepsilon} = \min \varepsilon(\Delta^{(2)}). \tag{68}$$

Значения I_p^0, $p = 1, 2, 3$, в (56) могут быть определены по алгоритму (37). По описанной схеме находятся решения $\overline{\Delta}^{(2)}(t^*)$, $\lambda_{\min}^0(t^*) = \max\limits_{p=1,2,3} \lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)}(t^*))$ исходной МЗУ (54)–(56) в зависимости от априори фиксируемой величины t^*. При этом за счёт равенства $\Delta^{[3]} = \bar{\Delta}^{(2)}$ априори выполняется соотношение $\lambda_3(\bar{\Delta}^{(2)}(\bar{t}^*)) = 0$ при $p = 3$ в (56). Если предусматривается возможность варьирования значений t^* в некоторых пределах, то последовательность подобных решений на допустимом интервале изменения t^* позволяет установить оптимальное значение $\bar{t}^*$, на котором достигается минимальная величина λ^0 в (54):

$$\lambda_{\min\min}^0 = \min_{t^*} \lambda_{\min}^0(t^*) = \lambda_{\min}^0(\bar{t}^*) = \max_{p=1,2,3} \lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)}(\bar{t}^*)). \tag{69}$$

На рис. 2 приведены некоторые результаты решения задачи полубесконечной оптимизации (54)–(56) при $Q^0 = -0{,}5$; $Q_c = 0$; $\beta = 0{,}5$; $Q_h = -0{,}125$; $r = 3{,}5$; $t^* = 0{,}44$. Применительно к этому случаю находятся значения $\lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)})$ и $\lambda_{\min}^0$, определяемые для вычисляемых по указанной схеме значений I_p^*, I_p^0 при $p = 1, 2, 3$: $\lambda_1(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0{,}14$, $\lambda_2(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0{,}10$, $\lambda_3(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0$, $\lambda_{\min}^0 = \lambda_1(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0{,}14$.

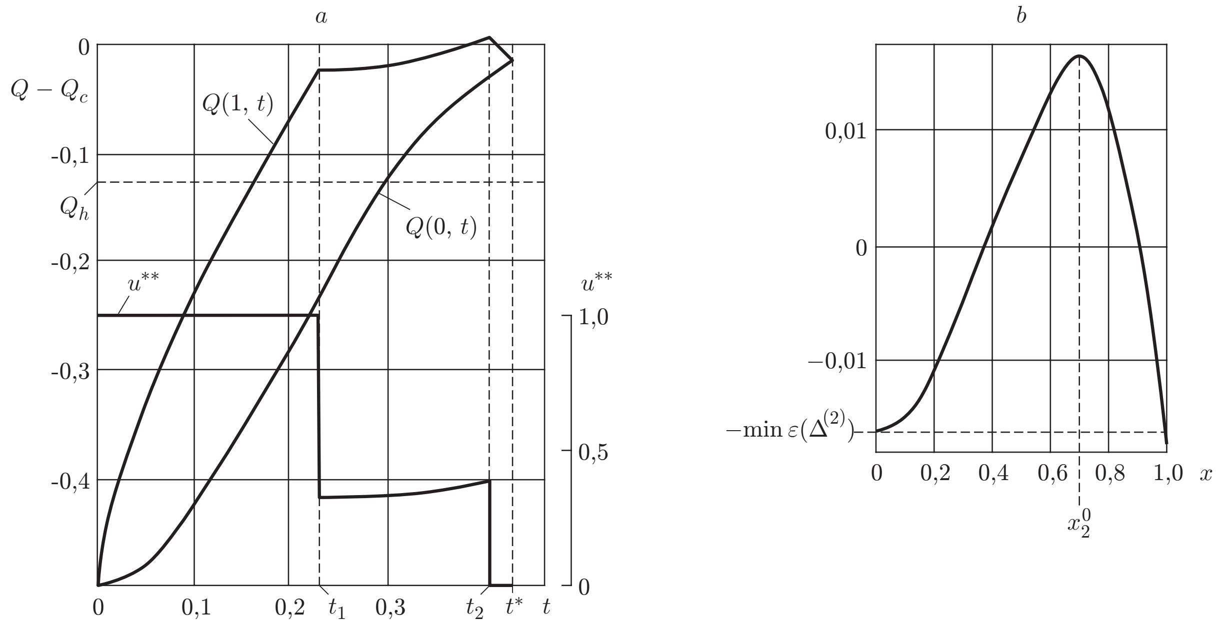

Рис. 2. Расчётные характеристики оптимального процесса: управляющее воздействие, температурное поле (*a*) и результирующее распределение температур $Q(x, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c$ (*b*) в многокритериальной задаче индукционного нагрева

Заключение. Разработана конструктивная технология многокритериальной оптимизации широкого круга технических систем с распределёнными параметрами, описываемых линейными уравнениями в частных производных параболического типа.

В характерных для технических приложений условиях оценки требований к конечному состоянию объекта в равномерной метрике предлагаемая технология базируется на процедурах параметризации искомых управляющих воздействий и последующей редукции к специальной задаче математического программирования — задаче полубесконечной оптимизации, разрешаемой альтернансным методом [8–10]. Получаемые результаты апробированы на примере МЗУ ответственным объектом технологической теплофизики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Моисеев Н. Н.** Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.
2. **Гермейер Ю. Б.** Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383 с.
3. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 316 с.
4. **Машунин Ю. К.** Методы и модели векторной оптимизации. М.: Наука, 1986. 141 с.
5. **Машунин Ю. К.** Теоретические основы и методы векторной оптимизации в управлении экономическими системами. М.: Логос, 2001. 247 с.
6. **Корнеенко В. П.** Методы оптимизации. М.: Высш. шк., 2007. 664 с.
7. **Токарев В. В.** Методы оптимальных решений. Т. 2. Многокритериальность. Динамика. Неопределённость. М.: Физматлит, 2011. 416 с.
8. **Рапопорт Э. Я.** Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
9. **Рапопорт Э. Я.** Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009. 677 с.

10. **Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я.** Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 22–33.
11. **Рапопорт Э. Я.** Программная управляемость линейных многомерных систем с распределенными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2015. № 2. С. 22–39.
12. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 707 с.
13. **Рапопорт Э. Я., Левин И. С.** Структурно-параметрический синтез оптимальных по быстродействию систем управления с распределёнными параметрами в условиях интервальной неопределённости характеристик объекта // Автометрия. 2015. **51**, № 5. С. 3–16.
14. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012. 309 с.
15. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. Мищенко Е. Ф** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
16. **Pleshivtseva Yu., Di Barba P., Rapoport E. et al.** Multi-objective optimization of induction heating processes: Methods of the problem solution and examples based on benchmark model // Intern. Journ. Microstructure and Materials Properties. 2013. **8**, N 4/5. P. 357–372.
17. **Pleshivtseva Yu., Di Barba P., Rapoport E. et al.** Multi-objective optimization of induction heaters design based on numerical coupled fields analysis // Intern. Journ. Microstructure and Materials Properties. 2014. **9**, N 6. P. 532–551.
18. **Рапопорт Э. Я.** Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 278 с.
19. **Рапопорт Э. Я.** Минимаксная оптимизация стационарных состояний в системах с распределёнными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 2. С. 3–18.
20. **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.

Поступила в редакцию 13 апреля 2017 г.