УДК 539.3; 536.2

ТОЛЕРАНТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Ч. Возняк, М. Вагровска*, О. Злачетка*

Технический университет архитектуры и инженерной экологии, Лодзь, Польша
* Университет естественных наук, Варшава, Польша
E-mails: czeslaw.wozniak@p.lodz.pl, monika_wagrowska@sggw.pl, olga_szlachetka@sggw.pl

С использованием толерантной модели исследуется задача теплопроводности для слоистой функционально-градиентной среды. Толерантная модель, в отличие от известной асимптотической модели, основанной на методе гомогенизации, позволяет при описании поведения среды в целом учитывать ее микроструктуру. Получены дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие теплопроводность в слоистой среде в случае гладких и медленно изменяющихся функций. Предложенная модель является обобщением стандартной толерантной модели и позволяет описать процесс теплопроводности в слоистой среде с трансверсально-градиентным законом распределения свойств материала.

Ключевые слова: теплопроводность, функционально-градиентная слоистая среда, толерантное моделирование.

Введение. В настоящей работе исследуется процесс теплопроводности в слоистой функционально-градиентной среде (рис. 1).

Для анализа процесса теплопроводности ранее были предложены различные математические модели. В случае слоистых проводников с периодической структурой используются известные модели, построенные с помощью метода гомогенизации, в основе которого лежат асимптотические методы (см. [1, 2]). Помимо асимптотических методов для построения моделей в случае слоистых сред используются методы, основанные на понятии так называемых микролокальных параметров [3–11]. Обобщением этого подхода является подход, в котором используются медленно меняющиеся функции и толерантное осреднение.

Метод толерантного осреднения применялся во многих работах при решении различных термомеханических задач для конструкций, выполненных как из материалов, имеющих периодическое строение, так и из функционально-градиентных гетерогенных материалов [12–18]. Обзор этих работ приведен в [19–21].

Особенностью метода толерантного осреднения для микрогетерогенных материалов и конструкций является учет влияния микроструктурного масштаба на свойства среды в целом. Это означает, что уравнения модели содержат коэффициенты, зависящие от характерного масштаба микроструктуры. Выполнив формальный предельный переход при стремлении этого параметра к нулю, можно получить приближенные уравнения, которые совпадают с уравнениями, выведенными с помощью метода толерантного осреднения, и с уравнениями, получаемыми путем асимптотической гомогенизации.

© Возняк Ч., Вагровска М., Злачетка О., 2015

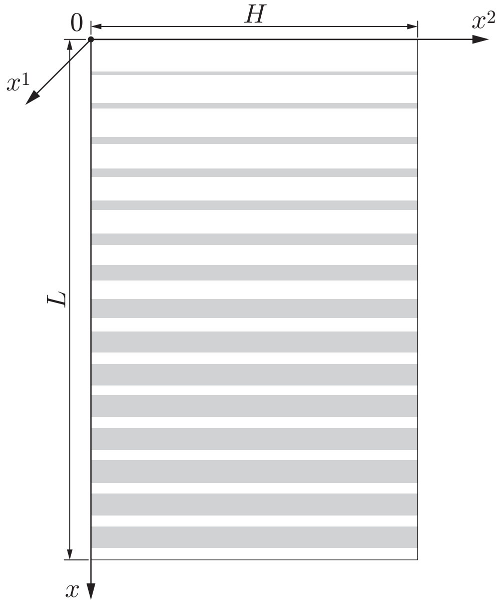

Рис. 1. Структура функционально-градиентного материала с изменяющимися в поперечном направлении свойствами

В данной работе показано, что в результате некоторого обобщения подхода, основанного на использовании медленно меняющихся функций, можно получить новые математические модели теплопроводности для функционально-градиентных слоистых материалов.

1. Постановка задачи. Пусть физическое пространство параметризовано с помощью ортогональной декартовой системы координат Ox^1x^2x. Рассматривается жесткий проводник тепла, занимающий в физическом пространстве область $\Omega \equiv \Xi \times (0, L)$, где Ξ — область в плоскости Ox^1x^2. Предполагается, что проводник является однородным в направлениях Ox^1 и Ox^2 и слоистым в направлении Ox.

Проводник изготовлен из двух материалов. Область Ω состоит из n слоев одинаковой толщины $\lambda \equiv L/n$ $(1/n \ll 1)$. Каждый слой состоит из двух однородных подслоев. Введем обозначение $x_i \equiv \lambda/2 + (i-1)\lambda$, $i = 1, \ldots, n$. Заметим, что $x = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — координата средней плоскости слоя толщиной λ.

Пусть $\varphi'(\cdot)$, $\varphi''(\cdot) \in C^1([0, L])$ — положительные вещественные функции, такие что $\varphi'(x) + \varphi''(x) = 1$ для любого значения $x \in [0, L]$ и $\lambda|\partial_x \varphi'(x)| \ll 1$. Толщины подслоев i-го слоя равны $\lambda'(x_i) = \varphi'(x_i)\lambda$ и $\lambda''(x_i) = \varphi''(x_i)\lambda$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если $\varphi'(\cdot)$, $\varphi''(\cdot)$ — постоянные функции, то среда имеет периодическое строение.

Подслои i-го слоя занимают области $\Xi \times (x_i - \lambda/2, x_i - \lambda/2 + \lambda'(x_i))$ и $\Xi \times (x_i - \lambda/2 + \lambda'(x_i), x_i + \lambda/2)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Матрицы теплопроводности первого и второго подслоев соответственно имеют вид

$$k' = \begin{bmatrix} (k^{11})' & (k^{12})' & 0 \\ (k^{21})' & (k^{22})' & 0 \\ 0 & 0 & k' \end{bmatrix}, \qquad k'' = \begin{bmatrix} (k^{11})'' & (k^{12})'' & 0 \\ (k^{21})'' & (k^{22})'' & 0 \\ 0 & 0 & k'' \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты теплопроводности подслоев обозначим через c', c''.

Предполагается, что температурное поле $\theta = \theta(\boldsymbol{x}, t)$ $(\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x) \in \Omega,\ t \in [0, t_*])$ является решением уравнения теплопроводности

$$\partial\,(k\,\partial\theta) + \partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}\,\partial_\beta\theta) - c\,\partial_t\theta = 0, \tag{1}$$

где индексы α, β принимают значения 1, 2 (по повторяющимся индексам проводится суммирование); $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$; $\partial = \partial/\partial x$; $\partial_t = \partial/\partial t$.

Уравнение (1), представляющее собой дифференциальное уравнение в частных производных с разрывными быстроосциллирующими коэффициентами $k^{\alpha\beta}(\cdot)$, $k(\cdot)$, $c(\cdot)$, зависящими только от координаты x, должно выполняться во всех точках области $\Omega \equiv \Xi \times (0, L)$ $\forall t \in (0, t_*)$.

Ниже строится приближенная модель задачи теплопроводности, в которой уравнение (1) заменяется уравнением с гладкими и медленно изменяющимися коэффициентами. При построении приближенной модели используются не асимптотические методы с соответствующими предельными переходами, а метод, основанный на понятии медленно изменяющихся функций, и толерантная модель осреднения [21–23].

2. Основные положения модели. В данном пункте приводятся основные положения толерантной модели композитов [19–21].

2.1. *Медленно изменяющиеся функции.* В основе модели лежит понятие отношения толерантности (см. работы [20, 21] и библиографию к ним). Ниже рассматривается отношение толерантности на пространстве $R \times R$. Это отношение однозначно определяется вещественным положительным числом δ.

Для любого элемента $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ используется обозначение $\mu \overset{\delta}{\sim} \nu$, если и только если $|\mu - \nu| \leqslant \delta$. Параметр толерантности δ был введен в [22] как “верхняя граница пренебрежимости”, а в [23] как “параметр неразличимости”.

Важную роль в толерантной модели играет понятие медленно изменяющихся функций. В отличие от определения медленно изменяющихся функций, принятого в [20, 21], введем определение двух классов медленно изменяющихся функций. Понятие медленно изменяющихся функций непосредственно связано с понятием отношения толерантности.

Пусть Π — произвольное выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^m$ и $f \in C^1(\bar{\Pi})$ — произвольная вещественная функция. Определим параметр толерантности $d \equiv (\lambda, \delta_0, \delta_1)$ как тройку вещественных положительных чисел и будем использовать обозначение $\partial_j \equiv \partial/\partial x_j$ $(j = 1, \dots, m)$.

Определим два класса медленно изменяющихся функций WSV и SV следующим образом.

1. Функция $f \in \mathrm{WSV}_d^1(\Pi) \subset C^1(\Pi)$, если для любой пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Pi^2$ из условия $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leqslant \lambda$ следуют условия $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leqslant \delta_0$ и $|\partial_j f(\boldsymbol{x}) - \partial_j f(\boldsymbol{y})| \leqslant \delta_1$ при $j = 1, \dots, m$.

2. Если $f \in \mathrm{WSV}_d^1(\Pi)$ и для любого $\boldsymbol{x} \in \Pi$ выполняются неравенства $\lambda\,|\partial_j f(\boldsymbol{x})| \leqslant \delta_0$ при $j = 1, \dots, m$, то $f \in \mathrm{SV}_d^1(\Pi)$.

Очевидно, что $\mathrm{WSV}_d^1(\Pi) \supset \mathrm{SV}_d^1(\Pi)$.

Функции, принадлежащие классам $\mathrm{WSV}_d^1(\Pi)$ и $\mathrm{SV}_d^1(\Pi)$, называются очень медленно изменяющимися и медленно изменяющимися соответственно.

Обозначим через $B(\boldsymbol{x}, \lambda/2) \subset \Pi$, $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ шар на множестве Π с центром в точке $\boldsymbol{x}$, имеющий радиус $\lambda/2$.

Пусть $f \in \mathrm{WSV}_d^1(\Pi)$. Под толерантными аппроксимациями функций $f\big|_{B(\boldsymbol{x},\lambda/2)}$ и $\partial_j f\big|_{B(\boldsymbol{x},\lambda/2)}$ понимаются постоянные функции, определенные в $B(\boldsymbol{x}, \lambda/2)$ и принимающие значения $f(\boldsymbol{x})$ и $\partial_j f(\boldsymbol{x})$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ соответственно.

Ниже рассматривается случай $\Pi = (0, L)$.

2.2. *Аппроксимация с помощью метода толерантного осреднения.* Определим $\Delta \equiv (-\lambda/2, \lambda/2)$ и локальный интервал $\Delta(x) \equiv (x - \lambda/2, x + \lambda/2)$ для любого $x \in [0, L]$. Пусть

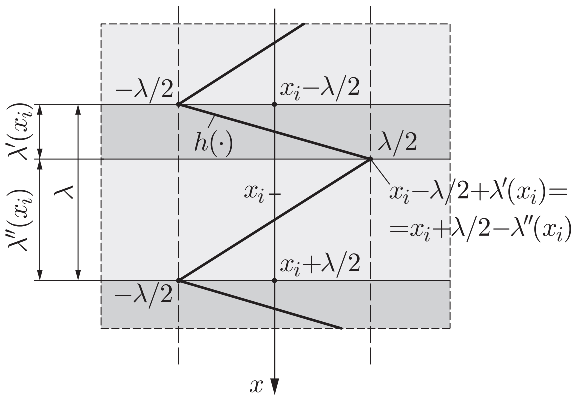

Рис. 2

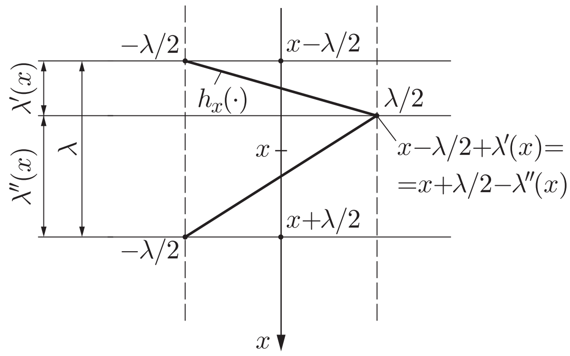

Рис. 3

Рис. 2. Функция формы колебаний

Рис. 3. Локальная функция формы колебаний

$g_x \in L^2((0,L))$. Определим

$$\langle g\rangle(x) \equiv \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\Delta(x)} g_x(z)\, dz.$$

Пусть $g_x \in L^2(\Delta(x))$ и $f \in \mathrm{WSV}^1_d((0,L))$. Под толерантным осреднением будем понимать аппроксимацию функций $\langle gf\rangle_T(x)$, $\langle g\,\partial f\rangle_T(x)$ функциями $\langle g\rangle(x) f(x)$ и $\langle g\rangle(x)\,\partial f(x)$ соответственно.

2.3. *Функции формы колебаний.* Вещественная функция $h \in C^0([0,L])$ называется функцией формы колебаний в любом интервале $(x_i-\lambda/2, x_i+\lambda/2)$, $i=1,\ldots,n$, если она принимает значение $\lambda/2$ при $x = x_i-\lambda/2+\lambda'(x_i) = x_i+\lambda/2-\lambda''(x_i)$ и $-\lambda/2$ при $x = x_i-\lambda/2$, $x = x_i+\lambda/2$, $i=1,\ldots,n$ и линейна в интервалах $(x_i-\lambda/2, x_i-\lambda/2+\lambda'(x))$, $(x_i-\lambda/2+\lambda'(x), x_i+\lambda/2)$, где $\lambda'(x_i)=\varphi'(x_i)\lambda$; $\lambda''(x_i)=\varphi''(x_i)\lambda$. Функция $h(\cdot)$ в интервале $(x_i-\lambda/2, x_i+\lambda/2)$ приведена на рис. 2.

Независимо от функции $h(\cdot)$ для любого значения $x \in (0,L)$ определим локальную функцию формы колебаний $h_x \in C^0(\Delta(x))$ (рис. 3). Очевидно, что $h_{x_i}(\cdot) = h(\cdot)\big|_{\Delta(x_i)}$, $i=1,\ldots,n$.

3. Алгоритм моделирования. Ниже вводится предположение, что функции $\varphi', \varphi'' \in WSV^1_d((0,L))$ ($\varphi'(\cdot)$, $\varphi''(\cdot)$ — очень медленно изменяющиеся функции).

Пусть $\vartheta(x^1,x^2,\cdot,t)$, $\psi(x^1,x^2,\cdot,t)$, $(x^1,x^2)\in\Xi$, $t\in(0,t_*)$ — очень медленно изменяющиеся функции аргумента $x\in(0,L)$: $\vartheta(x^1,x^2,\cdot,t)\in\mathrm{WSV}^1_d((0,L))$ и $\psi(x^1,x^2,\cdot,t)\in\mathrm{WSV}^1_d((0,L))$ для любых $(x^1,x^2)\in\Xi$ и $t\in(0,t_*)$.

Моделирование основано на двух допущениях.

Первое допущение относится к микро- и макродекомпозиции температурного поля $\theta(\cdot)$, а именно: при любых значениях $x\in(0,L)$ и $t\in[0,t_*]$ температурное поле $\theta(\cdot)$ аппроксимируется полем $\tilde\theta(\cdot)$:

$$\tilde\theta(\boldsymbol{x},t) = \vartheta(\boldsymbol{x},t) + h(x)\psi(\boldsymbol{x},t). \tag{2}$$

В формуле (2) содержатся две новые слабо изменяющиеся функции: средняя температура $\vartheta(\cdot)$ и амплитуда флуктуаций температуры $\psi(\cdot)$. Следует отметить, что параметры толерантности δ_0, δ_1 нельзя выбирать априори. Они должны быть оценены независимо после решения краевой задачи.

Для совокупности коэффициентов в уравнении (1) введем обозначение

$$b(\cdot) \in \{k(\cdot), k^{\alpha\beta}(\cdot), c(\cdot)\}.$$

Учитывая, что $\Delta(x) \equiv (x - \lambda/2, x + \lambda/2)$ для любого $x \in (0, L)$, введем обозначения

$$\Delta'(x) \equiv (x - \lambda/2, x - \lambda/2 + \lambda\varphi'(x)), \qquad \Delta''(x) \equiv (x + \lambda/2 - \lambda\varphi''(x), x + \lambda/2).$$

Для любого $x \in (0, L)$ определим функцию $b_x(\cdot)$:

$$b_x(y) = \begin{cases} b'_x, & y \in \Delta'(x), \\ b''_x, & y \in \Delta''(x). \end{cases}$$

Очевидно, что $b_x(\cdot) \equiv b(\cdot)\big|_{\Delta(x)}$ для любых $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Каждый интервал $\Delta(x)$, $x \in (0, L)$ вместе с функциями $\{k_x(\cdot), k_x^{\alpha\beta}(\cdot), c_x(\cdot)\}$ и локальной функцией формы колебаний $h_x(\cdot)$, определенной почти всюду на $\Delta(x)$, будем называть локальной ячейкой. Более того, если $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, то локальную ячейку будем называть материальной ячейкой.

Прежде чем сформулировать второе допущение, введем функцию

$$r_x(\cdot) \equiv \partial\,(k_x\,\partial\tilde{\theta})(\cdot) + \partial_\alpha\,(k_x^{\alpha\beta}\,\partial_\beta\tilde{\theta})(\cdot) - c_x\,\partial_t\tilde{\theta}(\cdot).$$

Функция $r_x(\cdot)$ определена почти всюду в $\Omega \times (0, t_*)$, $\tilde{\theta}(\cdot)$ определяется формулой (2).

Второе допущение формулируется следующим образом:

$$\langle r\rangle_T(x) = 0, \qquad \langle rh\rangle_T(x) = 0 \qquad \forall x \in (0, L).$$

Очевидно, что введенные выше толерантные осреднения определены также для любых $(x^1, x^2, t) \in \Xi \times (0, t_*)$.

Пусть $\vartheta(x^1, x^2, \cdot, t) \in \mathrm{WSV}_d^1((0, L))$, $\psi(x^1, x^2, \cdot, t) \in \mathrm{WSV}_d^1((0, L))$. Из условия $\langle r\rangle_T = 0$ с учетом соотношения (2) получаем

$$\begin{aligned}\langle\partial\,[k(\partial\vartheta + \partial h\,\psi + h\,\partial\psi)]\rangle_T + \langle\partial_\alpha\,[k^{\alpha\beta}(\partial_\beta\vartheta) + h\,\partial_\beta\psi]\rangle_T - \langle c(\partial_t\vartheta + h\,\partial_t\psi)\rangle_T =\\ = \langle\partial\,(k\,\partial\vartheta)\rangle_T + \langle\partial\,(k\,\partial h\psi)\rangle_T + \langle\partial\,(kh\,\partial\psi)\rangle_T + \langle\partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}\,\partial_\beta\vartheta)\rangle_T +\\ + \langle\partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}h\,\partial_\beta\psi)\rangle_T - \langle c\,\partial_t\vartheta\rangle_T - \langle ch\,\partial_t\psi\rangle_T = 0.\end{aligned}$$

Принимая во внимание определение $\langle\cdot\rangle_T$ и тот факт, что $\vartheta(x^1, x^2, \cdot, t) \in \mathrm{WSV}_d^1((0, L))$, $\psi(x^1, x^2, \cdot, t) \in \mathrm{WSV}_d^1((0, L))$, а также $\langle h\rangle = 0$, $\langle kh\rangle = 0$, $\langle ch\rangle = 0$, $\langle k^{\alpha\beta}h\rangle = 0$ ($\alpha = 1, 2$, $\beta = 1, 2$), получаем

$$\langle\partial\,(k\partial\vartheta)\rangle_T = \partial\,(\langle k\rangle\,\partial\vartheta), \quad \langle\partial\,(k\partial h\psi)\rangle_T = \partial\,(\langle k\,\partial h\rangle\psi), \quad \langle\partial\,(kh\,\partial\psi)\rangle_T = \partial\,(\langle kh\rangle\partial\psi) = 0,$$

$$\langle\partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}\,\partial_\beta\vartheta)\rangle_T = \langle k^{\alpha\beta}\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\vartheta, \qquad \langle\partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}h\,\partial_\beta\psi)\rangle_T = \langle k^{\alpha\beta}h\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\psi = 0,$$

$$\langle c\,\partial_t\vartheta\rangle_T = \langle c\rangle\,\partial_t\vartheta, \qquad \langle ch\,\partial_t\psi\rangle_T = \langle ch\rangle\,\partial_t\psi = 0.$$

Из условия $\langle r\rangle_T = 0$ следует уравнение

$$\partial\,(\langle k\rangle\,\partial\vartheta) + \partial\,(\langle k\,\partial h\rangle\psi) + \langle k^{\alpha\beta}\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\vartheta - \langle c\rangle\,\partial_t\vartheta = 0.$$

Из условия $\langle rh\rangle_T = 0$ с учетом соотношения (2) получаем

$$\begin{aligned}\langle\partial\,[k(\partial\vartheta + \partial h\,\psi + h\,\partial\psi)]h\rangle_T + \langle\partial_\alpha\,[k^{\alpha\beta}(\partial_\beta\vartheta) + h\,\partial_\beta\psi]h\rangle_T - \langle c(\partial_t\vartheta + h\,\partial_t\psi)h\rangle_T =\\ = \langle\partial\,(k\,\partial\vartheta)h\rangle_T + \langle\partial\,(k\,\partial h\,\psi)h\rangle_T + \langle\partial\,(kh\,\partial\psi)h\rangle_T + \langle\partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}\,\partial_\beta\vartheta)h\rangle_T +\\ + \langle\partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}h\,\partial_\beta\psi)h\rangle_T - \langle c\,\partial_t\vartheta h\rangle_T - \langle ch^2\,\partial_t\psi\rangle_T = 0.\end{aligned}$$

Принимая во внимание определение $\langle\cdot\rangle_T$ и тот факт, что $\vartheta(x^1,x^2,\cdot,t)\in \mathrm{WSV}^1_d((0,L))$, $\psi(x^1,x^2,\cdot,t)\in \mathrm{WSV}^1_d((0,L))$, а также $\langle h\rangle=0$, $\langle kh\rangle=0$, $\langle ch\rangle=0$, $\langle k^{\alpha\beta}h\rangle=0$ ($\alpha=1,2$, $\beta=1,2$), имеем

$$\langle\partial\,(k\,\partial\vartheta)h\rangle_T=-\langle k\,\partial h\rangle\,\partial\vartheta,\quad \langle\partial\,(k\,\partial h\,\psi)h\rangle_T=-\langle k(\partial h)^2\rangle\psi,\quad \langle\partial\,(kh\,\partial\psi)h\rangle_T=\partial\,(\langle kh^2\rangle\,\partial\psi),$$
$$\langle\partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}\,\partial_\beta\vartheta)h\rangle_T=0,\qquad \langle\partial_\alpha\,(k^{\alpha\beta}h\,\partial_\beta\psi)h\rangle_T=\langle k^{\alpha\beta}h^2\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\psi,$$
$$\langle c\,\partial_t\vartheta h\rangle_T=0,\qquad \langle ch^2\,\partial_t\psi\rangle_T=\langle ch^2\rangle\,\partial_t\psi.$$

Следовательно, из условия $\langle rh\rangle_T=0$ получаем выражение

$$\partial\,\langle kh^2\rangle\,\partial\psi+\langle k^{\alpha\beta}h^2\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\psi-\langle k(\partial h)^2\rangle\psi-\langle k\,\partial h\rangle\partial\vartheta-\langle ch^2\rangle\partial_t\psi=0.$$

Таким образом, определяющими уравнениями задачи являются уравнения

$$\begin{gathered}\partial\,(\langle k\rangle\,\partial\vartheta)+\langle k^{\alpha\beta}\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\vartheta-\langle c\rangle\,\partial_t\vartheta+\partial\,(\langle k\,\partial h\rangle\psi)=0,\\ \partial\,(\langle kh^2\rangle\,\partial\psi)+\langle k^{\alpha\beta}h^2\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\psi-\langle k(\partial h)^2\rangle\psi-\langle k\,\partial h\rangle\,\partial\vartheta-\langle ch^2\rangle\,\partial_t\psi=0.\end{gathered}\tag{3}$$

Система уравнений (3) и формула (2) для аппроксимации поля температуры $\tilde\theta(\cdot)$ представляют собой модель, которую будем называть обобщенной толерантной моделью теплопроводности для композита. Следует отметить, что коэффициенты в уравнении (3) являются медленно изменяющимися функциями аргумента $x\in(0,L)$:

$$\langle k\rangle=k'\varphi'+k''\varphi'',\qquad \langle k^{\alpha\beta}\rangle=k^{\alpha\beta\prime}\varphi'+k^{\alpha\beta\prime\prime}\varphi'',$$
$$\langle k\,\partial h\rangle=k'-k'',\qquad \langle k(\partial h)^2\rangle=\frac{k'\varphi''+k''\varphi'}{\varphi'\varphi''},$$
$$\langle kh^2\rangle=\frac{1}{12}\,\lambda^2(k'\varphi'+k''\varphi'')=\frac{1}{12}\,\lambda^2\langle k\rangle,\quad \langle k^{\alpha\beta}h^2\rangle=\frac{1}{12}\,\lambda^2(k^{\alpha\beta\prime}\varphi'+k^{\alpha\beta\prime\prime}\varphi'')=\frac{1}{12}\,\lambda^2\,\langle k^{\alpha\beta}\rangle,$$
$$\langle c\rangle=c'\varphi'+c''\varphi'',\qquad \langle ch^2\rangle=\frac{1}{12}\,\lambda^2(c'\varphi'+c''\varphi'')=\frac{1}{12}\,\lambda^2\langle c\rangle.$$

Эти коэффициенты зависят от констант теплопроводности материала k', k'' и удельных теплоемкостей c', c'', а также от функций $\varphi'(\cdot)$, $\varphi''(\cdot)$ аргумента $x\in(0,L)$, определяющих структуру функционально-градиентной среды.

4. Специальные модели толерантности. При построении толерантной модели предполагалось, что функции $\vartheta(x^1,x^2,\cdot,t)$, $\psi(x^1,x^2,\cdot,t)$, определенные для всех $(x^1,x^2)\in\Xi$ и $t\in(0,t_*)$, являются слабо изменяющимися функциями.

Ниже выводятся уравнения толерантной модели для медленно изменяющихся функций $\vartheta(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ четырех видов.

4.1. *Стандартная толерантная модель.* Пусть $\vartheta(x^1,x^2,\cdot,t)$, $\psi(x^1,x^2,\cdot,t)\in \mathrm{SV}^1_d((0,L))$ $\forall\,(x^1,x^2,x)\in\,\Xi\times(0,t_*)$. В этом случае первое уравнение системы (3) остается без изменений. Во втором уравнении член $\partial\langle kh^2\rangle\partial\psi$ обращается в нуль в силу определения медленно изменяющихся функций.

Таким образом, уравнения стандартной модели имеют вид

$$\partial\,(\langle k\rangle\,\partial\vartheta)+\langle k^{\alpha\beta}\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\vartheta-\langle c\rangle\,\partial_t\vartheta+\partial\,(\langle k\,\partial h\rangle\psi)=0;\tag{4}$$

$$\langle k^{\alpha\beta}h^2\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\psi-\langle k(\partial h)^2\rangle\psi-\langle k\,\partial h\rangle\,\partial\vartheta-\langle ch^2\rangle\,\partial_t\psi=0.\tag{5}$$

4.2. *Модель локальной гомогенизации.* При $\vartheta(x^1,x^2,\cdot,t)\in \mathrm{SV}^1_d((0,L))$ $\forall(x^1,x^2,t)\in\Xi\times(0,t_*)$, $\psi(\cdot)\in \mathrm{SV}^1_d(\Omega\times(0,t_*))$ локальная модель гомогенизации получается из стандартной модели, если в уравнении (5) отбросить слагаемое $\langle ch^2\rangle\,\partial_t\psi$. При этом уравнение (4) не изменится. В уравнении (5) слагаемое $\langle k^{\alpha\beta}h^2\rangle\,\partial_\alpha\partial_\beta\psi$ обращается в нуль в силу

$\psi(\cdot) \in \mathrm{SV}_d^1(\Omega \times (0, t_*))$. Пренебрегая членом $\langle ch^2 \rangle\, \partial_t \psi$, получаем уравнения модели локальной гомогенизации

$$\partial\,(\langle k \rangle\, \partial\vartheta) + \langle k^{\alpha\beta} \rangle\, \partial_\alpha \partial_\beta \vartheta - \langle c \rangle\, \partial_t \vartheta + \partial\,(\langle k\, \partial h \rangle \psi) = 0; \tag{6}$$

$$\langle k (\partial h)^2 \rangle \psi + \langle k\, \partial h \rangle\, \partial\vartheta = 0. \tag{7}$$

Из уравнения (7) следует

$$\psi = -\frac{\langle k\, \partial h \rangle}{\langle k\, (\partial h)^2 \rangle}\, \partial\vartheta. \tag{8}$$

С учетом (8) из уравнения (6) получаем

$$\partial\,(k_0\, \partial\vartheta) + \langle k^{\alpha\beta} \rangle \partial_\alpha \partial_\beta \vartheta - \langle c \rangle\, \partial_t \vartheta = 0,$$

где $k_0 \equiv k' k'' / (\varphi' k'' + \varphi'' k')$. К этому уравнению необходимо добавить определение (8) функции $\psi(\cdot)$.

Коэффициенты $k_0(\cdot)$, $\langle k^{\alpha\beta} \rangle(\cdot)$ называются эффективными коэффициентами теплопроводности. Очевидно, что эти коэффициенты являются медленно изменяющимися функциями аргумента $x \in (0, L)$, поэтому данная модель называется моделью локальной гомогенизации.

4.3. *Модифицированная стандартная модель.* Модифицированная стандартная модель получается из стандартной модели при следующих двух предположениях: 1) в уравнении (5) пренебрегается членом $\langle ch^2 \rangle\, \partial_t \psi$; 2) функция $\psi(\cdot)$ представляется в виде $\psi = \tilde{\psi} + \bar{\psi}$, где $\tilde{\psi}$ определяется правой частью формулы (8) для любого $t \in (0, t_*)$ и $\bar{\psi}(x^1, x^2, \cdot, t) \in \mathrm{SV}_d^1((0, L))$. С учетом этих предположений получаем

$$\partial\,(k_0\, \partial\vartheta) + \langle k^{\alpha\beta} \rangle\, \partial_\alpha \partial_\beta \vartheta - \langle c \rangle\, \partial_t \vartheta + \partial\,(\langle k\, \partial h \rangle \bar{\psi}) = 0; \tag{9}$$

$$\langle k^{\alpha\beta} h^2 \rangle\, \partial_\alpha \partial_\beta \bar{\psi} - \langle k (\partial h)^2 \rangle \bar{\psi} = 0.$$

4.4. *Модель локальной гомогенизации с пограничным слоем.* Данная модель получается из модифицированной стандартной модели, если в уравнении (9) пренебречь членом, зависящим от $\bar{\psi}(\cdot)$. В результате получаем уравнения

$$\partial\,(k_0\, \partial\vartheta) + \langle k^{\alpha\beta} \rangle\, \partial_\alpha \partial_\beta \vartheta - \langle c \rangle\, \partial_t \vartheta = 0;$$

$$\langle k^{\alpha\beta} h^2 \rangle\, \partial_\alpha \partial_\beta \bar{\psi} - \langle k (\partial h)^2 \rangle \bar{\psi} = 0. \tag{10}$$

В данном случае уравнения для функций $\vartheta(\cdot)$ и $\bar{\psi}(\cdot)$ независимы и краевая задача для этих функций является связанной только в силу краевых условий.

Уравнение (10) является уравнением пограничного слоя, поскольку описывает возмущения температурного поля, обусловленные краевыми условиями для функции $\theta(\cdot)$.

Заключение. В работе предложена процедура толерантного моделирования и построено пять толерантных моделей задачи теплопроводности для функционально-градиентной слоистой среды. Важным свойством этих моделей является то, что коэффициенты уравнений представляют собой гладкие функции, выражающиеся через медленно изменяющиеся функции $\varphi'(\cdot)$, $\varphi''(\cdot)$. Функции $\varphi'(\cdot)$, $\varphi''(\cdot)$ описывают структуру функционально-градиентного композита.

Очевидно, что для композита, имеющего периодическое строение, функции $\varphi'(\cdot)$, $\varphi''(\cdot)$ являются постоянными, поэтому в данном случае уравнения модели представляют собой дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Из уравнений (3) общей модели можно получить модели для частных случаев. Следует отметить, что уравнения общей модели до сих пор не применялись для решения технических задач. Из стандартной модели можно получить уравнения для частных случаев, которые были независимо выведены в работах [20, 21]. Модель локальной гомогенизации, являющаяся простейшей моделью, может быть получена асимптотическим методом. Модифицированную стандартную модель можно применять при исследовании пограничного слоя. При использовании этой модели краевые условия выполняются более точно, чем при использовании модели локальной гомогенизации [24, 25]. Модель локальной гомогенизации с пограничным слоем получается из модифицированной стандартной модели путем формального расщепления.

Важным свойством предложенных моделей, за исключением модели локальной гомогенизации, является то, что коэффициенты уравнений этих моделей зависят от характерного размера микроструктуры λ. Таким образом, предложенные толерантные модели могут быть использованы при исследовании влияния характерного размера микроструктуры композита на процессы теплопроводности в функционально-градиентных средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bensoussan A.** Asymptotic analysis for periodic structures / A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolau. Amsterdam: North-Holland, 1978.
2. **Jikov V. V.** Homogenization of differential operators and integral functionals / V. V. Jikov, C. M. Kozlov, O. A. Oleinik. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 1994.
3. **Kaczynski A., Matysiak S. J.** Thermodiffusion in periodically layered elastic composites // J. Theor. Appl. Mech. 2002. V. 40, N 1. P. 85–100.
4. **Matysiak S. J.** On certain problems of heat conduction in periodic composites // Z. angew. Math. Mech. 1991. Bd 71. S. 524–528.
5. **Matysiak S. J.** On the microlocal parameter method in modelling of periodically layered thermoelastic composites // J. Theor. Appl. Mech. 1995. V. 33. P. 481–487.
6. **Matysiak S. J., Nagorko W.** Microlocal parameters in a modelling of microperiodic multilayered elastic plates // Ingenieur Arch. 1989. V. 59. P. 434–444.
7. **Matysiak S. J., Pauk V. J., Yevtushenko A. A.** On applications of the microlocal parameter method in modelling of temperature distributions in composite cylinders // Arch. Appl. Mech. 1998. V. 68. P. 297–307.
8. **Matysiak S. J., Wozniak Cz.** On the modeling of heat conductuion problem in laminated bodies // Acta Mech. 1986. V. 65. P. 228–238.
9. **Matysiak S. J., Yevtushenko A. A., Ivanyk E. G.** Temperature field in a microperiodic two-layered composite caused by a circular laser heat source // Heat Mass Transfer. 1998. V. 34. P. 127–133.
10. **Wierzbicki E.** Nonlinear macro-micro dynamics of laminated structures // J. Theor. Appl. Mech. 1995. V. 33. P. 1–17.
11. **Wozniak Cz.** Homogenized thermoelasticity with microlocal parameters // Bull. Polish. Acad. Tech. 1987. V. 35. P. 133–141.
12. **Jedrysiak J.** Application of the tolerance averaging method to analysis of dynamical stability of thin periodic plates // J. Theor. Appl. Mech. 2004. V. 42. P. 357–379.
13. **Lacinski L., Wozniak C.** Boundary-layer phenomena in the laminated rigid heat conduction // J. Thermal Stresses. 2006. V. 29. P. 665–682.
14. **Michalak B.** Stability of composite plates with non-uniform distribution of constituents // J. Theor. Appl. Mech. 2004. V. 42. P. 281–297.
15. **Rychlewska J.** On the modelling and optimization of functionally graded laminates // J. Theor. Appl. Mech. 2006. V. 44. P. 783–795.

16. **Rychlewska J., Szymczyk J., Wozniak C.** On the modeling of the hyperbolic heat transfer problems in periodic lattice-type conductors // J. Thermal Stresses. 2004. V. 27. P. 825–841.
17. **Nagorko W., Wozniak C.** Mathematical modelling of heat conduction in certain functionally graded composites // Proc. Appl. Math. Mech. 2011. V. 11. P. 253–254.
18. **Tomczyk B., Wozniak C.** Tolerance models in elastodynamics of certain reinforced thin-walled structures // Statics, dynamics and stability of structures. V. 2. Statics, dynamics and stability of structural elements and systems. Lodz: Wyd. Politech. Lodzkiej, 2012. P. 123–153.
19. **Wozniak C.** Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization / C. Wozniak, E. Wierzbicki. Czestochowa: Wyd. Politech. Czestochowskiej, 2000.
20. **Thermomechanics** of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach / Ed. by C. Wozniak, B. Michalak, J. Jedrysiak. Lodz: Lodz Univ. Press, 2008.
21. **Mathematical** modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media / Ed. by C. Wozniak, M. Wagrowska, W. Nagorko, et al. Gliwice: Publ. House of Silesian Univ. of Technol., 2010.
22. **Fichera G.** Is the Fourier theory of heat propagation paradoxical? // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1992. V. 41. P. 5–28.
23. **Zeeman E. C.** Topology of the brain // Mathematics and computer science in biology and medicine: Proc. of a conf. held by the Medical research council in association with the Health dept., Oxford, July 1964. L.: Publ. Her Majesty's Stationery Office, 1965. P. 227–292.
24. **Szlachetka O., Wagrowska M.** Efekt warstwy brzegowej w warstwowej przegrodzie o poprzecznej gradacji wlasnosci // Acta Sci. Polon. Ser. Architectura. 2010. V. 9, N 4. P. 15–23.
25. **Wozniak C.** Asymptotic modelling and boundary-layer effect for functionally graded microlayered composites // Acta Sci. Polon. Ser. Architectura. 2010. V. 9, N 2. P. 3–9.

Поступила в редакцию 6/V 2013 г.