

6. Kim B.S., Rasmussen M.L., Jischke M.C. Optimization of waverider configurations generated from axisymmetric conical flow // J. Spacecraft and Rockets. — 1983. — V. 20, N 5. — P. 461—469.
7. Anderson J.D.Jr. Several families of viscous optimized waveriders — A review of waverider research of the University of Maryland // 1st Intern. Hypersonic Waverider Sympos., Univ. Maryland, October 17—19, 1990.
8. Щепановский В.А. Газодинамическое конструирование. — Новосибирск: Наука, 1991.
9. Lin S.C., Rasmussen M.L. Cone-derived waveriders with combined transverse and longitudinal curvature. — N.Y., 1988. — (Paper/AIAA; N 88—0371).
10. Shvets A.I. A review of russian research on waveriders // 1st Intern. Hypersonic Waverider Sympos., Univ. Maryland, October 17—19, 1990.
11. Воронин В.И., Швец А.И. Аэродинамические характеристики волнолетов, построенных на течениях за осесимметричными скачками уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 1. — С. 183—185.

г. Москва

Поступила 26/IV 1991 г.,  
в окончательном варианте — 25/IV 1993 г.

УДК 541.24:532.5

О.В. Воинов

### ДИНАМИКА КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ПУЗЫРЕ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ В ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

Рассматривается динамика капиллярных волн малой амплитуды на пузырьре, совершающем первоначально сферически-симметричные пульсации в жидкости малой вязкости. В коротковолновом приближении исследуются характеристики роста возмущений поверхности при произвольных перепадах давления и показателях политропы. Определены асимптотические зависимости от времени среднего квадрата амплитуды возмущений. Получены приближенные формулы характеристик роста амплитуд для широкого диапазона параметров. Обнаружено существование единой универсальной зависимости от индекса волны. Найден эффект сильного влияния показателя политропы вблизи изотермы на характеристики роста волн. Установлена аналогия между ростом инерционно-капиллярных волн на поверхности нелинейно пульсирующего пузыря и на плоской поверхности при постоянном ускорении. Показано, что при пульсациях большой амплитуды приближение малой вязкости способно описывать не малые эффекты изменения характеристик роста волн. Определено влияние вязкости на динамику возмущений, отмечен эффект вязкого расслоения универсальной зависимости для показателя роста волн.

1. Асимптотическое описание нестационарных коротких волн на пульсирующем пузырьре. Рассмотрим малые возмущения сферически-симметричных пульсаций газового пузыря в жидкости, покоящейся на бесконечности. Обозначим начальное давление газа  $p_0$ , давление на бесконечности  $p_\infty$ . Динамика возмущений на пульсирующем газовом пузырьре зависит от показателя политропы  $k$  и параметров отношения давлений  $\varepsilon$  и капиллярности  $\sigma$ :

$$\varepsilon = p_0/p_\infty, \sigma = \sigma' / p_\infty R_0', \sigma_0 = \sigma / \varepsilon$$

( $\sigma'$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $R_0'$  — начальный радиус, штрихи относятся к размерным величинам). Параметр влияния вязкости введем далее после учета инерционно-капиллярных эффектов в рамках идеальной жидкости.

© О.В. Воинов, 1994

Рассматривается предел  $\sigma \ll 1$ , когда капиллярные силы не влияют на изменение радиуса пузыря, определяемого в безразмерном виде уравнением

$$(1.1) \quad R''R + (3/2)R'^2 = \epsilon R^{-3\epsilon} - 1, \quad R(0) = 1, \quad R'(0) = 0, \\ R = R'/R'_0, \quad t = t'(p_\infty/\rho)^{1/2}/R'_0.$$

Амплитуды малых возмущений поверхности, представляемой рядом по сферическим гармоникам

$$r = R + \sum_n a_n Y_n(\theta, \varphi),$$

находятся при  $n \gg 1$  из уравнения

$$(1.2) \quad y'' + \lambda^2 q(t)y = 0, \quad q = -R''/R + \sigma n^2/R^3, \quad \lambda^2 = n, \quad y = a_n R^{3/2},$$

которое останется в силе и с учетом вязкости жидкости, только необходимо дать другое определение модифицированной амплитуды  $y$  (п. 7).

Используя выражения линейно-независимых решений уравнения (1.2) при  $t < T/2$  ( $T$  — период пульсаций) и формулу характеристического показателя  $\mu_1$ , полученные в [1] на основе теории Флоке и ВКБ-приближения, запишем необходимое для анализа разрушения поверхности пузыря общее решение уравнения (1.2) с точностью до постоянного множителя в виде

$$(1.3) \quad 0 \leq t < t_* - \delta, \quad y = (1/q(t))^{1/4} \cos(\lambda L(t) + \varphi), \\ t_* + \delta < t < t_{*2} - \delta, \quad y = (-1/q(t))^{1/4} \cos(\lambda L(t_*) + \varphi + \pi/4) \exp(\lambda K(t)), \\ t_{*2} + \delta < t \leq T, \quad y = (1/q(t))^{1/4} \cos(\lambda L(t - T) + \varphi) \exp(\mu_1 T),$$

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{q} dt, \quad K(t) = \int_{t_*}^t \sqrt{-q} dt;$$

$$(1.4) \quad \exp(\mu_1 T) = 2 \exp(2\lambda K_0) \cos(2\lambda I_0), \quad K_0 = K(T/2), \quad I_0 = L(t_*).$$

Здесь  $t_*$  — наименьший простой нуль  $q(t)$  ( $q(t_*) = 0$ );  $t_{*2}$  — второй простой нуль  $q(t)$  ( $t_{*2} = T - t_*$ );  $\varphi$  — произвольная постоянная;  $\delta \rightarrow 0$ ;  $\lambda \rightarrow \infty$ . При анализе динамики возмущений обычно начальная фаза  $\varphi$  неизвестна. Формулы (1.3) дают возможность исключить неизвестный в принципе параметр  $\varphi$ , если перейти к среднему квадрату амплитуды  $\langle y^2 \rangle$ . В силу реальной случайности начальных условий для возмущений можно рассматривать фазу  $\varphi$  как независимую случайную величину и произвести по ней осреднение. Эта процедура имеет смысл, в частности, в области больших значений индексов волн  $n$ . После осреднения по  $\varphi$  в интервале  $[0, \pi]$  из (1.3), (1.4) следует

$$(1.5) \quad \sqrt{q(t)} \langle y^2 \rangle = 1, \quad 0 \leq t < t_* - \delta, \\ \sqrt{-q(t)} \langle y^2 \rangle = \exp(2\lambda K(t)), \quad t_* + \delta < t < t_{*2} - \delta, \\ \sqrt{q(t)} \langle y^2 \rangle = \exp(2\mu_1 T), \quad t_{*2} + \delta < t \leq T.$$

Первая формула (1.5) соответствует неустойчивости кавитационного пузырька [2], вторая — неустойчивости Рэлея—Тейлора [3]; формулы (1.5) описывают также параметрическую неустойчивость поверхности пузыря. Кроме этих известных трех типов неустойчивости на практике может быть важна неустойчивость Кельвина—Гельмгольца [4], но ее учет требует отдельного анализа, так как связан с нарушением сферической симметрии течения в невозмущенном состоянии. Из формул (1.5) наглядно видно принципиальное различие экспоненциальной неустойчивости пузыря в узком интервале времени ( $t_*$ ,  $T - t_*$ ) и параметрической неустойчивости. При сколь

удовно большом значении  $4\lambda K_0 \gg 1$ , когда внутри цикла амплитуда наверняка превзойдет все допустимые пределы для малых возмущений, можно указать такие значения  $2\lambda L(t_*) \sim (l + 1/2)\pi$  ( $l = 0, 1, \dots$ ), при которых  $\mu_1 \sim 0$ , т.е. параметрической неустойчивости нет. С другой стороны, в параметрической неустойчивости, если она есть, присутствует эффект накопления экспоненциальной неустойчивости в каждом цикле [1] и разрушение может вызываться этим накоплением.

Формулы (1.5) позволяют строить теорию времени разрушения поверхности пузыря короткими волнами, если найти зависимости коэффициентов от параметров перепада давления  $1/\varepsilon$ , показателя политропы  $k$ , капиллярности  $\sigma$  и описать начальные условия для  $\langle y^2 \rangle$ . Определение момента разрушения с точностью, большей половины интервала экспоненциального роста волны  $\tau = T/2 - t_*$ , не представляет интереса, поэтому достаточно ограничиться значениями  $K(t)$  при  $t = T/2$  и  $t = T - t_*$ .

В отличие от [1] кроме предела  $\varepsilon \rightarrow 0$  рассматривается более трудная для описания область умеренных перепадов давления  $p_\infty/p_0 = 1/\varepsilon \leq 10$ . Для справедливости коротковолнового приближения необязательно требовать малости одновременно двух параметров:  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , хотя при  $\varepsilon \rightarrow 0$  максимальная скорость роста волн увеличивается и растет соответствующий индекс  $n$ . Для проявления существенного влияния капиллярных сил только в области коротких волн достаточно требовать  $\sigma \ll 1$ .

2. Способ определения индексов  $n$  нарастающих волн с учетом капиллярных сил. При  $n \gg 1$  характеристический показатель  $\mu_1$  в основном зависит от величины показателя экспоненты — показателя роста  $2\sqrt{n}K_0$  в (1.4), если предэкспоненциальный множитель не является малым по сравнению с единицей, а для спектра волн он может быть мал только для отдельных значений индекса  $n$ . Показатель роста амплитуды до середины цикла запишем как

$$(2.1) \quad H = \sqrt{n}K_0 = \sqrt{n} \int_{t_*}^{t_m} \sqrt{-q} dt, \quad q(t_*) = 0, \quad R'(t_m) = 0.$$

Вводя переменную

$$(2.2) \quad x = \frac{\alpha}{\alpha + 1} R^{-3(k-1)}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{k-1},$$

представим ускорение и скорость в виде

$$(2.3) \quad \frac{R^4 R''}{1 + \alpha} = kx - 1, \quad \frac{3}{2} \frac{R'^2}{1 + \alpha} = 1 - x - \frac{(1 + \alpha)^{-1}}{[(1 + 1/\alpha)x]^{1/(k-1)}} = f(x).$$

Минимальный радиус  $R_m$ , согласно (2.2) и (2.3), описывается формулой

$$(2.4) \quad R_m^3 = [(1 + 1/\alpha)x_m]^{-1/(k-1)} = (1 - x_m)(1 + \alpha),$$

куда входит параметр  $x_m$  — наибольший корень уравнения

$$(2.5) \quad f(x_m) = 0.$$

Справедлива формула

$$(2.6) \quad \varepsilon = (k - 1) (1 - R_m^3) / (R_m^{-3(k-1)} - 1),$$

и поэтому не требуется решать (2.5), можно задать  $R_m(\varepsilon)$  параметрически.

Укажем в явном виде зависимость  $x_m(\varepsilon)$  для  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$(2.7) \quad (1 - x_m)/A = 1 + A_1 + (1 + k/2)A_1^2 + \\ + (1 + k/3)(1 + k)A_1^3 + \dots,$$

$$A = (1 + \alpha)^{-1}(1 + 1/\alpha)^{-1/(k-1)}, \quad A_1 = A/(k - 1), \quad \alpha = \varepsilon/(k - 1).$$

Преобразуем  $K_0$  в (2.1), используя обозначения [1]

$$(2.8) \quad \sum = n^2 b^{-2} \sigma (1 + \alpha)^{-1}, \quad b = (1 + 1/\alpha)^{1/3(k-1)}.$$

Заметим, что в [1] имеется незначительная при  $\epsilon \rightarrow 0$  опечатка — пропущена степень  $-1$  в  $(1 + \alpha)$ .

В соответствии с (2.1)–(2.3) и (2.8)

$$(2.9) \quad K_0 = \frac{1}{\sqrt{6}(k-1)} \sum_{x_*}^{x_m} \sqrt{\frac{Q}{f}} \frac{dx}{x}, \quad Q = kx - 1 - \sum x^{-\frac{2}{3(k-1)}};$$

$$(2.10) \quad Q(x_*) = 0, \quad f(x_*) = 0.$$

Вместо  $x$  удобно также использовать переменную

$$(2.11) \quad y = x/x_m, \quad y \in [1/kx_m, 1].$$

Из-за особенностей при  $k \rightarrow 1$  формула (2.9) плоха для вычислений, кроме того, величины  $\sum$  и  $x_*$  сильно изменяются при разных  $k$  или  $\epsilon$ . Более эффективен такой способ определения индекса  $n$ , при котором в качестве основных применяются параметры, диапазон изменения которых не зависит от  $\epsilon$  и  $k$ . Соответственно можно ввести новые параметры  $\theta$  и  $\psi$ , значения которых лежат в интервале  $(0,1)$ :

$$(2.12) \quad \theta(kx_m - 1) = Q(x_m), \quad x_m^{-2/3(k-1)} \sum = (1 - \theta)(kx_m - 1), \\ y_* = 1/kx_m + \psi(1 - 1/kx_m).$$

Ввиду  $Q(x_*) = 0$  параметр  $\theta$  связан с  $\psi$ :

$$(2.13) \quad 1 - \theta = \psi y_*^{2/3(k-1)} = \psi [1 - (1 - \psi)(1 - 1/kx_m)]^{2/3(k-1)}.$$

Из (2.8), (2.9) и (2.12) вытекает

$$(2.14) \quad n^2 \sigma R_m^2 = (1 - \theta)(kx_m - 1)(1 + \alpha).$$

Учитывая (2.2) и формулы

$$\sigma = \sigma_0 \epsilon = \sigma_0 \alpha (k - 1), \quad \sigma_0 = \sigma' / \rho_0 R_0'$$

можно преобразовать (2.14) к виду

$$(2.15) \quad n^2 \sigma_0 = R_m^{1-k} (1 - \theta) B, \\ B = (1 - 1/kx_m) / (1 - 1/k) = (3/2)k\beta.$$

Новый параметр  $\beta$  указан в (2.15), потому что фигурирует далее в основных формулах.

3. Аналитическое описание коэффициента показателя роста волны  $K_0(\epsilon, k, \sigma)$  при умеренных перепадах давления  $1/\epsilon$ . Интеграл  $K_0$  (2.9) исследован в [1] для  $\epsilon \rightarrow 0$  и отдельных значений  $k$ . Представляет интерес область умеренных значений  $1/\epsilon$  и произвольных  $k < 1,7$ .

Возможно аналитическое определение (2.9) с учетом (2.10) во всем диапазоне  $0 < \epsilon < 1$ , если использовать некоторые разложения по параметру  $1 - y$ , который относительно мал. Для  $f$  в (2.9) достаточно брать не более трех членов (при  $\epsilon \rightarrow 0$  только один) разложения

$$(3.1) \quad f = \sum_{m=1}^{\infty} b_m (1 - y)^m, \quad b_1 = (kx_m - 1) / (k - 1).$$

Для  $Q$  такое разложение неэффективно, так как  $Q(y_*) = 0$ , а в (2.9) входит  $\sqrt{Q}$ . Вместо (3.1) запишем

$$(3.2) \quad Q(y) = (y - y_*) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dy^n} \left( \frac{Q}{y - y_*} \right) \Big|_{y=y_*} (y - 1)^n.$$

Примененная в [1] линейная интерполяция  $Q$  в интервале  $(y_*, 1)$  соответствует первому члену ряда (3.2).

При помощи (3.1), (3.2) интеграл (2.9) сводится к вычисляемому через элементарные функции:

$$(3.3) \quad K_0 = \frac{1}{\sqrt{6}(k-1)} \int_{y_*}^1 \sqrt{\frac{Q(1)(y-y_*)}{(1-y_*)b_1(1-y)}} (1 + \zeta_1(y-1) + \zeta_2(y-1)^2 + \dots) \frac{dy}{y}$$

( $\zeta_1, \zeta_2$  — постоянные). В результате из (2.9), (3.1) — (3.3) получим

$$(3.4) \quad K_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{\beta\theta(1-\psi)}}{1+\sqrt{y_*}} F, \quad F = 1 + \frac{1}{2}(B_0 + a)(1-\psi) + \frac{1}{4}(1-\psi)^2 \left( a \left( 3a + \frac{\beta}{2} + \frac{7}{6}\Delta \right) + B_0(\beta + 2,5\Delta + 2a) \right),$$

$$\Delta = 1 - 1/kx_m, \quad a = (1/8)(1/x_m - 1)/(k-1),$$

$$B_0 = (\beta/8)(\beta + \Delta)(1/\theta - 1)(1 - \psi),$$

где функция  $F(\psi)$  не сильно отличается от единицы. При  $F = 1$  и  $x_m = 1$  формула (3.4) согласуется с приближенным выражением  $K_0$  с учетом  $\sigma$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , найденным в [1].

Наиболее важны значения  $K_0$  для волны максимального роста, которой соответствует для середины цикла  $\max H$  при  $R = R_m$ . Этот максимум отвечает также приближенно максимуму коэффициента возрастания амплитуды за несколько циклов, если  $|\cos(2\lambda I_0)| \sim 1$ ,  $2H \gg 1$ . Максимум  $H$  по индексу  $n$  определяется условием максимума  $\Sigma^{1/4} K_0$  по  $\psi$ , что дает уравнение

$$(3.5) \quad \Omega(\psi) = \Omega_0 + 2 \frac{dF}{d\psi} = 0, \quad \Omega_0 = \left( \frac{1}{\psi} + \frac{\beta}{y_*} \right) \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{\theta} \right) - \frac{1}{(1-y_*)\sqrt{y_*}}.$$

Здесь и далее для краткости указаны значения  $\psi, \theta, y_*$  в точке  $\max H$  без специальных индексов; значения в других точках оговариваются.

Отметим, что соответствующий вклад  $F$  в (3.5) не превышает 10 % от слагаемых в  $\Omega_0$  даже при  $\epsilon = 0,8$ ; кроме того, он слабо меняется при разных  $\epsilon$  и  $k$ .

4. Универсальные зависимости показателя роста  $H$ . Представляет интерес вывод простых формул, которые могли бы описывать с достаточной точностью  $K_0, \psi, 1 - \theta$  в точке  $\max H$  как функции от  $k$  и  $\epsilon$ . Параметры  $\psi$  и  $1 - \theta$  слабо зависят от  $k$  в противоположность вычисляемым через них  $y_*$  и  $\Sigma$  для  $\max H$ , которые сильно зависят от  $k$ . В этом состоит преимущество переменных  $\psi$  и  $1 - \theta$ . Максимальное отклонение от среднего значения в диапазоне  $k = 1 + 1,6$  составляет для  $\psi$  и  $K_0$  около 6 %, а для  $1 - \theta$  — всего 1,4 %, если  $\epsilon = 0$ . Это открывает возможность простых аппроксимаций. Можно хорошо представить  $\psi, 1 - \theta$  и  $K_0$  линейными формами по  $k$  или с погрешностью заметно менее 1 % следующими выражениями при  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$(4.1) \quad \psi = 0,2666k^{-0,3}, \quad 1 - \theta = 0,1636k^{-0,06}, \quad K_0 = 0,504k^{-0,27}.$$

Более общую аппроксимацию  $K_0$ , пригодную для умеренных перепадов давления  $1/\epsilon$ , нетрудно найти, если заметить, что в (3.4) в точке  $\max H$  наиболее сильно при изменении  $\epsilon$  и  $k$  изменяется  $\beta$ . Поэтому можно искать аппроксимацию вида  $K_0 \sim f(\beta, k)\sqrt{\beta}$ , где  $f$  — линейная форма по  $\beta$ . Так

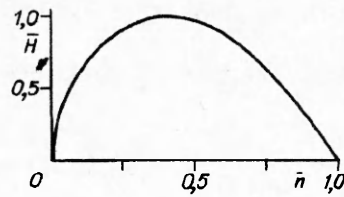


Рис. 1

получается формула для  $K_0$  для всего диапазона перепадов давления  $1/\epsilon = 1 \div \infty$ :

$$(4.2) \quad K_0 = (a_1 + a_2 \beta) \sqrt{\beta}, \quad a_1 = 0,673, \quad a_2 = 0,204k - 0,295.$$

Точность (4.2) не ниже  $2,4 \cdot 10^{-3}$  для  $k \geq 1,1$  и не ниже  $10^{-2}$  для  $k = 1$ . При  $\epsilon \rightarrow 0$  формула (4.2) не уступает соответствующей (4.1). При малых перепадах давления ( $\epsilon \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0$ ) (4.2) приводится к виду

$$(4.3) \quad K_0 = 0,550 \sqrt{(1 - \epsilon)/k},$$

что практически не отличается от точной формулы линейной теории, включающей коэффициент 0,551.

Параметры  $1 - \theta$  и  $\psi$  в точке  $\max H$ , как показывают расчеты, хорошо приближаются по формуле

$$(4.4) \quad F(k, \epsilon) = F(k, 0) + (a_1 + a_2(k - 1))(k - kx_m)/(k - 1).$$

При  $F = 1 - \theta$   $a_1 = 0,0238$ ,  $a_2 = 0,005$ , а при  $F = \psi$   $a_1 = -0,075$ ,  $a_2 = 0,064$ . Точность формулы для  $1 - \theta$  выше 1 % для любого  $\epsilon$ , если  $1,1 \leq k \leq 1,6$ . Для  $\psi$  точность выше 1 % при  $\epsilon < 0,8$ .

Проведенное полное исследование параметров точки  $\max H$  имеет особую ценность в связи с необычной возможностью получить благодаря этому приближенное описание всей кривой  $H(n)$  в целом в зависимости от  $\epsilon$  и  $k$ . Введем нормированные величины

$$(4.5) \quad \bar{H} = H/H_{\max}, \quad \bar{n} = n/n_0,$$

где

$$(4.6) \quad n_0 = b((1 + \alpha)(k - 1)/\sigma)^{1/2}$$

соответствует  $H = 0$ . Зависимость  $\bar{H}(\bar{n})$  приведена на рис. 1 для  $\epsilon = 0$  и  $k = 1,4$ . Аналитические оценки для  $\bar{n} \rightarrow 0$  и численные расчеты показывают, что переменные  $\epsilon$  и  $k$  в диапазонах  $1/\epsilon = 2,5 \div \infty$  и  $1,1 \leq k \leq 1,66$  практически не влияют на  $\bar{H}(\bar{n})$ , которая должна быть признана универсальной. При  $\epsilon = 0$  максимальное отличие значений  $\bar{H}(\bar{n})$  от случая  $k = 1,4$  составляет около 0,5 %, а при  $\epsilon = 0,4$  — примерно 1,5 ÷ 2%. Универсальная приближенная зависимость (4.5)  $\bar{H}(\bar{n})$  эффективно решает проблему простого представления функции трех переменных  $H(\epsilon, k, n)$ .

5. Влияние перепада давления  $1/\epsilon$  и показателя  $k$  на параметры волны максимального роста. Зависимости  $\max H$  и индекса волны  $n$  от  $\epsilon$  даны на рис. 2 и 3 для  $k = 1,1; 1,4; 1,6$  (линии 1—3) в соответствии с формулами пп. 3 и 4. Для сравнения штриховыми линиями показаны асимптотики при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Как видно,  $\max H$  и соответствующий индекс волны  $n$  при  $\epsilon > 0,15$  существенно отклоняются от асимптотик.

Из рис. 2 и 3 виден резкий рост  $n$  и  $\max H$  с увеличением перепада давления  $1/\epsilon$ , что согласуется с [1]. Отметим новую существенную особенность: согласно графикам, показатель политропы  $k$  в области  $k \sim 1 \div 1,2$ , близкой к изотерме  $k = 1$ , сильно влияет на индекс волны и значения  $\max H$  при  $\epsilon \leq 0,2$ . Это можно объяснить через существенное влияние на минимальный радиус  $R_m(\epsilon)$ , что отражено на рис. 4, где линии 1—4 отвечают  $k = 1,0; 1,1; 1,4; 1,6$ .

Для пояснения укажем совсем простые зависимости, связанные с аппроксимациями вида  $(1 - \theta)k\beta \sim 1 - \epsilon$ ,  $K_0 \sim \sqrt{(1 - \epsilon)/k}$ , разумными при



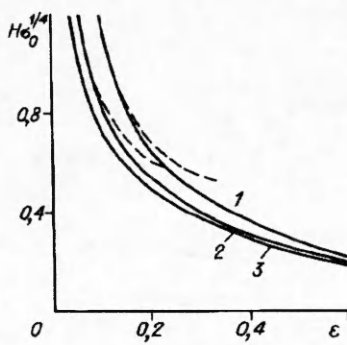


Рис. 2

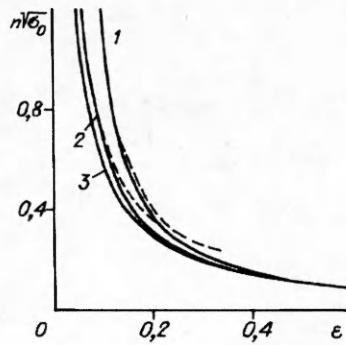


Рис. 3

умеренных значениях  $1/\epsilon$  и для  $\epsilon \rightarrow 1$ . Соответственно из (2.15) и (2.1) получим

$$(5.1) \quad n\sqrt{\sigma_0} = 0,42R_m^{-(3k-1)/2} \sqrt{1-\epsilon},$$

$$\sigma_0^{1/4}H = 0,37R_m^{-(3k-1)/4} (1-\epsilon)^{3/4}k^{-1/2}.$$

Записывая формулы (5.1) в виде  $n = 0,42X$  и  $H = 0,37Y$ , представим отношения точных значений  $n$  и  $H$  к  $X$  и  $Y$  на рис. 5 для  $k = 1,1; 1,6$  (линии 1, 2). Видно, что отношения  $n/X$  и  $H/Y$  близки к указанным постоянным при  $\epsilon > 0,1$ . Погрешность первой формулы (5.1) в области  $\epsilon < 0,4; 1,1 \leq k \leq 1,6$  не превышает 5%. Заметим, что при  $\epsilon \rightarrow 0$  значение  $n/X$  мало отличается от 0,40.

6. Аналогия с неустойчивостью при постоянном ускорении. Введем число Бонда  $Bo$ , определенное по волновому числу  $k_w$  и максимальному ускорению  $g'_m$  при  $R = R_m$ :

$$Bo = \frac{\rho g'_m}{\sigma' k_w^2}, \quad g'_m = R_m \frac{p_\infty}{\rho R_0}, \quad k_w = \frac{n}{R_m R_0}.$$

Отсюда с учетом формул (2.3), (2.14) получим

$$(6.1) \quad Bo = (1 - \theta)^{-1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Для значения  $1 - \theta$  в точке  $\max H$   $Bo$  имеет интересные особенности; оно слабо зависит от  $k$  и  $\epsilon$ . Так, для  $\epsilon = 0$   $Bo = 6,12 \div 6,3$  при  $k = 1 \div 1,6$ ; для  $k = 1,4$   $Bo = 6,23$  при  $\epsilon = 0$  и  $Bo = 5,83$  при  $\epsilon = 0,4$ . Таким образом, значение  $Bo$  волны максимального роста приблизительно постоянно при изменении  $\epsilon$  и  $k$ .

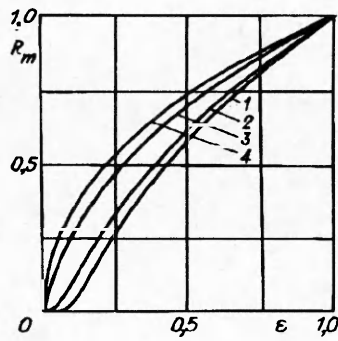
Целесообразно ввести второе число Бонда  $\overline{Bo}$ , определенное по среднему ускорению в интервале времени, где ускорение границы  $R'' > 0$ . Если учесть, что при  $\epsilon \rightarrow 0, k = 1,4$  среднее ускорение  $\overline{g'} \approx 0,45 g'_m$ , то из (6.1) следует

$$(6.2) \quad \overline{Bo} = \rho \overline{g'} / \sigma' k_w^2 = 2,8.$$

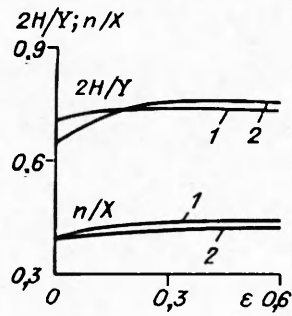
Сравним значение (6.2) с соответствующим  $Bo$  в случае постоянного ускорения плоской границы. При этом волновое число  $k_w$  находится из условия максимума разности  $k_w \overline{g'} - k_w^3 \sigma' / \rho$  и  $Bo = 3$ . Значит,  $Bo$  по среднему ускорению поверхности пузыря близко к  $Bo$  при постоянном ускорении плоской границы, т.е. существует определенная аналогия между двумя разными задачами.

Интересно также сравнить максимальные показатели роста амплитуды возмущений в указанных случаях. При  $g' = \text{const}$  максимальный показатель роста за время  $\tau$  имеет вид

$$H = \tau \sqrt{(2/3)k_w g'}.$$



Р и с. 4



Р и с. 5

Вычислим  $H$  по  $\tau$  и среднему  $g'$  для  $\epsilon \rightarrow 0$ . Время  $2\tau$ , на котором  $R'' > 0$ , при  $k = 1,4$  приближенно запишем как

$$2\tau = 3,1R_m^{5/2}R_0' \sqrt{\rho/p_\infty}.$$

Отсюда, учитывая  $\bar{g}' = 0,45 g'_m$ , находим  $H = 0,54 \sqrt{n}$ ,  $K_0 = 0,54$ . Это несильно отличается от  $K_0 = 0,461$ , которое дает точный расчет при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, по числу Бонда и по показателю роста волны при сильно меняющемся ускорении поверхности пузыря вблизи минимального радиуса имеется аналогия с простейшим случаем тейлоровской неустойчивости при постоянном ускорении границы раздела фаз. Указанная аналогия полезна для приближенных оценок и может служить подтверждением разумности проведенных расчетов.

7. Модель влияния вязкости жидкости. Рассматривается случай малой вязкости, когда ее влияние можно учесть путем введения поправок в уравнения для амплитуд возмущений. Вязкость мала, если достаточно велика относительная скорость изменения амплитуды короткой волны ( $n \gg 1$ ):

$$(7.1) \quad \lambda \sqrt{|q|} \gg 2\nu n^2 / R'^2 = 2\nu k_w^2, \quad \lambda = \sqrt{n}$$

( $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости).

Для волны с частотой  $\omega$  условие (7.1) имеет простейший вид  $\omega \gg \gg 2\nu k_w^2$ . Чтобы учесть вязкое затухание в уравнении для амплитуд, достаточно принять во внимание элементарное решение задачи о затухании капиллярной волны на сферическом пузыре в сферически-симметричном поле массовых сил или привлечь в уравнение баланса энергии соответствующее выражение диссипации энергии на потенциальном поле скоростей. Уравнение динамики амплитуд с учетом малой вязкости в безразмерных обозначениях запишем в форме

$$(7.2) \quad Ra_n'' + 3R'a_n' - (n-1)a_n R'' + \sigma n^3 R^{-2} a_n = -4\nu_1 k_w^2 Ra_n',$$

$$\nu_1 = (\nu/R_0') \sqrt{\rho/p_\infty}, \quad a_n = a_n'/R_0', \quad k_w = n/R.$$

Преобразование

$$(7.3) \quad a_n = \frac{y}{R^{3/2}} \exp \left( -2\nu_1 n^2 \int_0^t \frac{dt}{R^2} \right)$$

переводит (7.2) в уравнение

$$(7.4) \quad y'' + [-(n+1/2)R''/R + \sigma n^3/R^3 - \delta_0^2]y = 0,$$

$$\delta_0^2 = (2\nu_1 k_w^2)^2 + 2\nu_1 k_w^2 R'/R - (3/4)(R'/R)^2.$$

При  $n \gg 1$  из трех слагаемых в  $\delta_0^2$  достаточно учесть только первое. Уравнение (7.4) мало отличается от (1.2), если с учетом главных по  $n$  членов выполнено условие



$$(7.5) \quad |-nR''/R + \sigma n^3/R^3| \gg (2\nu_1 k_w^2)^2,$$

что соответствует малости сдвига частоты  $|\omega|^2 \gg \delta_0^2$  или малости затухания  $\delta_0$ . При этом можно использовать асимптотическое решение (1.3) для определения величины  $y(t)$ , связанной с амплитудой  $a$  по формуле (7.3). На асимптотическом решении (1.3) неравенство (7.5) согласуется с (7.1).

Представляет интерес рассмотреть неравенство (7.5) в каждый момент пульсации. Очевидно, оно всегда нарушено вблизи нулей  $q(t) = 0$ ,  $t = t_*$ ,  $t = T - t_*$ . Вдали от нуля  $q$  при  $R \gg R_*$  (7.5) перепишем с учетом  $R'' \approx -R^{-4}$ :

$$(7.6) \quad R^{-1} + \sigma R n^2 \gg 4\nu_1^2 n^3.$$

С другой стороны нуля  $q$  при  $R < R_*$  неравенство (7.5) или (7.1) лучше всего представить в некотором среднем смысле для интервала  $(t_*, T/2)$ , причем под  $n$  целесообразно понимать индекс волны максимального роста. Тогда, привлекая соотношение (6.2) между средним ускорением и характерным волновым числом  $k_m$ , заменим приближенно левую часть (7.5) на  $2\sigma n^3/R_m^3$ , записывая

$$(7.7) \quad \sigma R_m \gg 2\nu_1^2 n.$$

Из неравенств (7.6) и (7.7) первое не более ограничительное, чем второе. Поэтому достаточно требовать выполнения (7.7).

Формула (7.3) позволяет определить влияние вязкости на изменение амплитуды возмущения. Для половины цикла достаточно вычислить интеграл

$$(7.8) \quad I_\mu(\epsilon, k) = \int_0^{T/2} \frac{dt}{R^2},$$

и вклад вязкости в изменение амплитуды возмущения  $a_n$  выразится коэффициентом  $\exp(\Delta H)$ , где

$$(7.9) \quad \Delta H = -2I_\mu \nu_1 n^2.$$

При возрастании перепада давления ( $1/\epsilon \rightarrow \infty$ ) коэффициент  $I_\mu$  — ограниченная величина, существует предел интеграла (7.8):

$$(7.10) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{T/2} \frac{dt}{R^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dR}{R^2 \sqrt{R^{-3} - 1}} = 2,975.$$

Факт сходимости интеграла (7.10) при  $R = 0$  указывает на то, что основное влияние вязкости на изменение амплитуды при  $\epsilon \rightarrow 0$  сосредоточено в области больших значений радиуса, вдали от зоны экспоненциального роста возмущений  $R < R_*$ .

Зависимость (7.8) коэффициента вязкого затухания  $I_\mu$  от  $\epsilon$  для  $k = 1,4; 1,66$  (линии 1, 2) представлена на рис. 6.

Эффективность модели влияния вязкости (7.8), (7.9) определяется следующим вопросом: возможен ли конечный (не малый) эффект влияния вязкости на показатель роста возмущений  $H$ , т.е.  $|\Delta H| \sim H$ , при сохранении условий справедливости приближения малой вязкости? Интересно поэтому оценить максимальные отношения  $|\Delta H|/H$ , допустимые в рамках приближения малой вязкости. Из формул (7.9), (5.1) и приближенного соотношения  $\epsilon \sim (k-1)R_m^{-2(k-1)}$ , следующего из (2.6) для не малых  $k-1$ , при  $\epsilon \rightarrow 0$  приближенно запишем

$$(7.11) \quad \frac{|\Delta H|}{\max H} = \frac{2,8 \sqrt{k(k-1)}}{R_m^{(3/4)(k+1)}} \sigma_0^{1/4} C_a, \quad C_a = \frac{\mu}{\sigma'} \sqrt{\frac{p_0}{\rho}}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma'}{p_0 R_0'}.$$

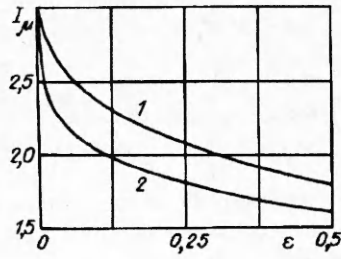


Рис. 6

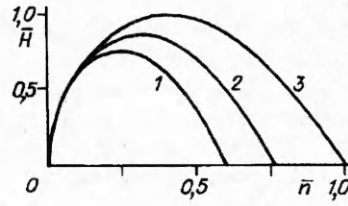


Рис. 7

Неравенство (7.7) с использованием формул (5.1) и (7.2) перепишем в виде

$$(7.12) \quad \sigma_0^{1/2} \text{Ca}^2 R_m^{-(3k+1)/2} \ll 1.$$

Подстановка в (7.12) выражения (7.11) позволяет получить эквивалентное (7.7) условие справедливости приближения малой вязкости для волн максимального роста:

$$(7.13) \quad c_0 R_m (\Delta H / H)^2 \ll 1$$

( $c_0 = 0,1 \div 0,25$  для  $k = 1,6 \div 1,3$ ). Эффект влияния вязкости велик, если  $\Delta H / H = -1$ , т.е. полностью подавляется увеличение амплитуды волны максимального роста в результате цикла пульсаций. В этом случае при  $\epsilon \ll 1$  левая часть (7.13) содержит малый параметр  $R_m$ , и поэтому условие (7.13) выполнено. Следовательно, в рамках приближения малой вязкости возможен не малый эффект влияния вязкости на развитие возмущений в итоге цикла нелинейной пульсации пузыря. Этот принципиально важный вывод характеризует главное свойство модели влияния вязкости (7.8), (7.9). Для пояснения полученного результата отметим, что с увеличением перепада давления  $1/\epsilon$  и уменьшением  $R_m$  продолжительность экспоненциального роста возмущений убывает как  $\bar{K}_m^{\epsilon/2}$ , из-за чего вклад области малых радиусов ( $R \sim R_m$ ) в затухание имеет порядок  $\sqrt{R_m}$ . При этом как  $1/\sqrt{R_m}$  увеличивается относительно него вклад в затухание остальной области, в которой амплитуда возмущений не растет, а только убывает. Из-за нарастания относительного вклада в затухание области больших радиусов ( $R > R_*$ ) оказывается возможным значительный эффект уменьшения амплитуды возмущений в приближении малой вязкости.

Влияние вязкости на универсальную зависимость показателя  $H$  от индекса волны  $n$  определяется отношением

$$(7.14) \quad \frac{2I_\mu \nu_1 n^2}{\max(\sqrt{n} K_0)} = \text{Ca} \sigma_0^{1/4} \frac{2I_\mu (kx_m - 1)^{3/4} (1 + \alpha)^{3/4}}{\epsilon^{1/4} R_m^{3/2} \max((1 - \theta)^{1/4} K_0)} (1 - \theta),$$

$$n = n_0 (1 - \theta)^{1/2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда видно, что на влиянии вязкости на вид кривой  $H(n)$  в универсальных координатах (4.5) мало сказываются начальное давление  $p_0$  и радиус  $R'_0$ , всего лишь как  $(p_0 / R'_0)^{1/4}$ , но зато существенно сказывается  $\epsilon$ . Влияние вязкости на зависимость  $H$  от  $n$ , определенное при помощи (7.14), отражено на рис. 7 для азотных или водородных пузырьков ( $k \approx 1,4$ ) в воде при  $\nu = 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с,  $R'_0 = 0,1$  см,  $p_0 = 0,1$  МПа,  $\sigma' = 0,072$  Н/м, а также  $\epsilon = 0,1; 0,2$  (линии 1, 2), кривая 3 отвечает  $\nu = 0$ . Видно, что вязкость приводит к расщеплению по параметру  $\epsilon$  универсальной зависимости  $H/H_{\max}$  от  $n/n_0$ . Важно, что вязкость дает заметный эффект в реальных условиях газовых пузырьков в воде. Очевидно, изменение вязкости жидкости в эксперименте может служить регулятором динамики возмущений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов О.В., Перепелкин В.В. Об устойчивости поверхности газового пузыря, пульсирующего в жидкости // ПМТФ. — 1989. — № 3.
2. Plesset M.S., Mitchell T.P. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // Quart. Appl. Math. — 1956. — V. 13, N 4.
3. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Roy. Soc. — 1950. — V. A201. — P. 192.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Т. 1.

г. Тюмень

Поступила 18/X 1990 г.

УДК 541.24:532.5

О.В. Воинов

### О ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ СИММЕТРИЧНО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ПУЗЫРЯ

Рассматривается проблема времени жизни газового пузыря до разрушения поверхности, совершающего в начальный момент сферически-симметричные пульсации в жидкости, покоящейся на бесконечности. Построена модель разрушения гладкой поверхности пульсирующего пузыря в результате роста начальных возмущений, обусловленных тепловыми флуктуациями — источником возмущений минимально возможной амплитуды. Показано, что тепловых флуктуаций достаточно для быстрого разрушения поверхности пульсирующего пузыря не только при больших, но и при умеренных перепадах давления. Определены зависимости числа циклов до разрушения поверхности от перепада давления, даны примеры для газовых пузырей, и приводятся оценки для паровых пузырей.

1. Динамика возмущений, обусловленных тепловыми флуктуациями. Отклонение радиуса  $r$  поверхности пузыря от радиуса сферы  $R'(t)$  можно представить рядом по присоединенным функциям Лежандра со случайными коэффициентами  $a_{nm}(t)$ ,  $b_{nm}(t)$ :

$$(1.1) \quad \xi = r - \bar{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} P_n^m \cos m\varphi + b_{nm} P_n^m \sin m\varphi).$$

Так как амплитуды двух различных волн статистически независимы и  $\overline{a_{nm}^2} = \overline{b_{nm}^2}$ , из формулы (1.1) для среднего квадрата отклонения поверхности следует

$$(1.2) \quad \overline{\xi^2} = \sum \sum \overline{a_{nm}^2} (P_n^m(\cos \theta))^2.$$

В начальный момент  $t = 0$  средний квадрат амплитуды волны принимаем совпадающим с соответствующим равновесным значением  $(\overline{a_{nm}^2})_s$ , обусловленным тепловыми флуктуациями:

$$(1.3) \quad t = 0, \quad \overline{a_{nm}^2} = (\overline{a_{nm}^2})_s.$$

Тепловые флуктуации могут быть основным источником начальных возмущений в коротковолновой области, в частности, для пузырьков в двухфазных средах. Следуя известному в физике представлению о равновесных тепловых флуктуациях в распределенных системах (см., например, [1]), которое впервые применено к капиллярной волне на поверхности жидкости в [2], среднюю потенциальную энергию отдельной капиллярной волны  $U$  в равновесном состоянии запишем как

© О.В. Воинов, 1994