

УДК 533.6.013.42

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ СИНФАЗНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ АЭРОУПРУГОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

А. Л. Тукмаков

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра, 420111 Казань

Исследуется синхронизация колебаний тонких упругих пластин, образующих стенки канала, заполненного газом. Движение газа описывается системой уравнений Навье — Стокса, для решения которой используется метод Мак-Кормака второго порядка точности с расщеплением по времени. Движение стенок канала описывается системой динамических геометрически нелинейных уравнений теории тонких пластин, которая решается методом конечных разностей. На границе раздела сред задаются кинематические и динамические контактные условия. В численном эксперименте определены характерные динамические режимы и исследован переход аэроупругой системы к синфазным колебаниям.

Ключевые слова: движение газа, колебания упругой пластины, метод расщепления.

Взаимное влияние элементов, составляющих пространственно связанную нелинейную систему, в ряде случаев приводит к синхронизации их колебаний [1, 2]. Это явление наблюдается в химических реакциях, связанных генераторах, при колебаниях маятников часов, лежащих на общем основании, и т. д. В данной работе методами математического моделирования исследуется синхронизация фазы колебаний упругих пластин, представляющих собой участки верхней и нижней стенок плоского канала, заполненного воздухом. Рассматриваются процессы, протекающие в газе и сопровождающие синхронизацию фазы колебаний тонких пластин при различных параметрах внешнего возбуждения.

**1. Модель и система уравнений.** Рассмотрим заполненный газом плоский канал с упругими при  $-l \leq x \leq l$  и жесткими вне этого интервала верхней и нижней стенками (рис. 1). При несимметричном возбуждении колебаний упругих стенок одиночными импульсами внешнего давления вначале наблюдаются аэроупругие колебания с различными амплитудами и фазами. С течением времени происходит синхронизация колебаний стенок канала вследствие их взаимного влияния, осуществляемого через газовую среду.

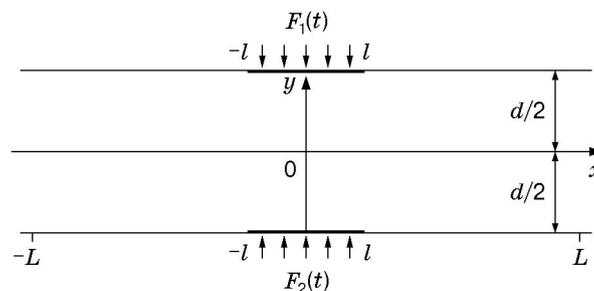


Рис. 1. Схема канала

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда научно-исследовательских опытно-конструкторских работ Республики Татарстан (код проекта 05-5.3-45/2002 (Ф)) и в рамках Федеральной целевой программы "Интеграция" (код проекта А0012).

Для описания движения газа в канале использовалась система уравнений Навье — Стокса для сжимаемого теплопроводного газа [3], записанная в декартовой системе координат:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y \end{bmatrix},$$

$$Q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad p = (\gamma - 1) \left( E - \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right),$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Система (1) в области с изменяющимися границами записывается в зависящих от времени обобщенных координатах [4]  $\xi = \xi(x, y, t)$ ,  $\eta = \eta(x, y, t)$ ,  $\tau = t$ :

$$\mathbf{q}_t^* + \mathbf{F}_\xi^* + \mathbf{G}_\eta^* = 0,$$

где

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \xi_t \rho + \xi_x \rho u + \xi_y \rho v \\ \xi_t \rho u + \xi_x (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \xi_y (\rho uv - \tau_{xy}) \\ \xi_t \rho v + \xi_x (\rho uv - \tau_{xy}) + \xi_y (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \\ \xi_t E + \xi_x ((E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x) + \xi_y ((E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}^* = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \eta_t \rho + \eta_x \rho u + \eta_y \rho v \\ \eta_t \rho u + \eta_x (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \eta_y (\rho uv - \tau_{xy}) \\ \eta_t \rho v + \eta_x (\rho uv - \tau_{xy}) + \eta_y (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \\ \eta_t E + \eta_x ((E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x) + \eta_y ((E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \xi_t = -x_t \xi_x - y_t \xi_y, \quad \eta_t = -x_t \eta_x - y_t \eta_y.$$

Для решения этой системы уравнений использовался явный метод Мак-Кормака второго порядка точности с расщеплением по времени [3, 5]. На однородной сетке схема содержала шаги предиктор и корректор, в результате выполнения которых осуществлялся переход на следующий временной слой:

$$\mathbf{q}_{j,k}^0 = \mathbf{q}_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left( \mathbf{F}_{j+1,k}^n - \mathbf{F}_{j,k}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left( \mathbf{G}_{j,k+1}^n - \mathbf{G}_{j,k}^n \right),$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{n+1} = \frac{\mathbf{q}_{j,k}^n + \mathbf{q}_{j,k}^0}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left( \mathbf{F}_{j,k}^0 - \mathbf{F}_{j-1,k}^0 \right) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left( \mathbf{G}_{j,k}^0 - \mathbf{G}_{j,k-1}^0 \right).$$

На шаге предиктор производные по  $\xi$ , входящие в величины  $\mathbf{F}_{j+1,k}^n$ ,  $\mathbf{F}_{j,k}^n$ , заменялись левыми разностями первого порядка точности, на шаге корректор — правыми, производные по  $\eta$  — центральными разностями второго порядка точности. Производные по  $\eta$ , входящие в величины  $\mathbf{G}_{j,k+1}^n$ ,  $\mathbf{G}_{j,k}^n$ , аппроксимировались левыми разностями первого порядка точности, производные по  $\xi$  — центральными.

Шаг конечно-разностной сетки в физической области  $(x, y)$  по оси  $x$  был постоянным. В пристенных областях  $-d/2 \leq y \leq -rd/2$ ,  $rd/2 \leq y \leq d/2$  ( $d$  — высота канала;  $r$  — параметр, задающий границы пристенных областей) вдоль оси  $y$  формировались ячейки с фиксированным измельченным шагом  $\Delta y_1$ . В центральной области  $-rd/2 < y < rd/2$  строились ячейки с более крупным шагом  $\Delta y$ . Область  $(\xi, \eta)$  представляла собой единичный квадрат с равномерным разбиением по осям.

Схема расщепления для центральной области  $-rd/2 < y < rd/2$  представляла собой последовательность симметричных одномерных операторов

$$\mathbf{q}_{j,k}^{n+1} = P_\xi(\Delta t/2)P_\eta(\Delta t/2)P_\eta(\Delta t/2)P_\xi(\Delta t/2)\mathbf{q}_{j,k}^n.$$

Каждый одномерный оператор включал шаги предиктор и корректор. Например, в результате действия оператора  $P_\xi(\Delta t/2)$  на вектор-столбец  $\mathbf{q}_{j,k}^n$  осуществлялся переход к промежуточному значению  $\bar{\mathbf{q}}_{j,k}$  за два шага:

$$\mathbf{q}_{j,k}^0 = \mathbf{q}_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi}(\mathbf{F}_{j+1,k}^n - \mathbf{F}_{j,k}^n), \quad \bar{\mathbf{q}}_{j,k} = \frac{\mathbf{q}_{j,k}^n + \mathbf{q}_{j,k}^0}{2} - \frac{\Delta t}{4\Delta \xi}(\mathbf{F}_{j,k}^0 - \mathbf{F}_{j-1,k}^0).$$

В областях сгущения сетки в схему расщепления входило  $2n$  одномерных операторов  $P_\eta$ :

$$\mathbf{q}_{j,k}^{n+1} = P_\xi(\Delta t/2)P_\eta(\Delta t/(2n)) \cdots P_\eta(\Delta t/(2n))P_\xi(\Delta t/2)\mathbf{q}_{j,k}^n,$$

где  $n = \Delta y / \Delta y_1$ .

Для описания движения упругих участков стенок применялась система динамических геометрически нелинейных уравнений теории тонких пластин, полученных на основе гипотезы Кирхгофа — Лява [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{E}{\rho_n(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{E}{\rho_n(1-\nu^2)} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{Z_\tau}{\rho_n}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= -\frac{D}{\rho_n} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \alpha \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{Eh}{\rho_n(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{Z_n}{\rho_n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $Z_\tau$ ,  $Z_n$  — касательная и нормальная составляющие динамической нагрузки;  $W$ ,  $V$  — прогиб и касательное перемещение фиксированных (лагранжевых) точек срединной поверхности;  $h$ ,  $\rho_n$  — толщина и плотность материала пластины;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Конструктивное демпфирование учитывалось с помощью слагаемого  $\alpha(\partial W/\partial t)$ . На продольных кромках пластин (рис. 1) задавались условия жесткой заделки

$$W = 0, \quad V = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm l. \quad (3)$$

В начальный момент времени пластины были неподвижны:

$$W = 0, \quad V = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad -l \leq x \leq l. \quad (4)$$

Касательная составляющая нагрузки полагалась равной нулю, а нормальная содержала жесткую и следящую части. Следящий характер определялся избыточным давлением на упругой поверхности. Жесткая составляющая нагрузки задавалась внешним импульсным возбуждением  $F(t)$ , равномерно распределенным по поверхности пластины, и не зависела от ее формы:

$$Z_n = F(t) + p_0 - p, \quad Z_\tau = 0, \quad F(t) = At \quad \text{при} \quad t < t_H, \quad F(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_H. \quad (5)$$

Здесь  $p$ ,  $p_0$  — текущее и невозмущенное давление газа в моменты времени  $t$  и  $t = 0$ ;  $t_n$  — время нарастания импульса внешней нагрузки. Система (2) с условиями (3)–(5) решалась методом конечных разностей с использованием неявных разностных схем второго порядка точности [7].

Изменение формы упругих элементов приводило к изменению геометрии расчетной области. На каждом временном шаге выполнялись перестройка конечно-разностной сетки в “физических” переменных  $x, y$  и отображение ее на неподвижную конечно-разностную сетку в переменных  $\xi, \eta$ . Определялись параметры перестройки  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, x_t, y_t, \xi_t, \eta_t$ , входящие в систему уравнений движения газа, записанную в обобщенных подвижных координатах [3, 4], и по схеме Мак-Кормака осуществлялся переход на следующий временной слой.

На границе раздела сред задавались кинематические и динамические контактные условия. На твердых поверхностях для составляющих скорости газа ставились условия прилипания: в точках на поверхности пластины составляющие скорости газа полагались равными соответствующим составляющим скорости пластины. Для плотности, энергии, температуры на всех границах расчетной области ставились однородные граничные условия второго рода. В начальный момент времени во внутренних узлах определялись температура, плотность и скорость газа.

Тестирование газодинамической части программного комплекса проводилось путем сравнения результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными [8]. Метод, применяемый для моделирования динамики упругого элемента, исследовался в работе [9].

Численный эксперимент состоял в моделировании аэроупругих колебаний, возникавших при нагружении упругих стенок канала одиночными треугольными импульсами давления, длительность которых была равна половине периода собственных колебаний пластин на нижней резонансной частоте. Длина канала выбиралась таким образом, чтобы возмущения на исследуемом интервале времени не достигали входной и выходной границ. Расчеты, полученные для канала высотой  $d = 0,03$  м, проводились при следующих значениях параметров пластин: толщина  $h = 0,001$  м, длина  $2l = 0,2$  м, модуль упругости  $E = 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho_n = 4500$  кг/м<sup>3</sup>. Число узлов конечно-разностной сетки при решении упругой задачи  $N = 60$ . Для газа, заполняющего канал (воздуха), использовались следующие характеристики: показатель адиабаты  $\gamma = 1,4$ , универсальная газовая постоянная  $R = 278$  Дж/(кг · К), начальная температура невозмущенного газа  $T_0 = 290$  К, начальная плотность  $\rho_0 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>. Результаты получены на расчетной сетке с параметрами  $N_j = 297$ ,  $N_k = 40$ ,  $N_1 = 10$ ,  $r = 0,8$  ( $N_1$  — число узлов в центральной области  $-rd \leq y \leq rd$ ). Временной шаг в расчетах составлял  $\Delta t = 3 \cdot 10^{-8}$  с.

**2. Результаты расчетов.** Если пластины имеют одинаковые параметры, то динамика аэроупругой системы и процесс синхронизации определяются характеристиками внешних возбуждающих импульсов  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ , воздействующих на упругие стенки канала.

Рассмотрим динамический процесс, возникающий при возбуждении только одной пластины:  $F_1(t) = At$  при  $t < t_n$ ,  $F_1(t) = 0$  при  $t > t_n$ ,  $F_2(t) = 0$ . На рис. 2,а показаны зависимости прогибов пластин от времени. С течением времени наблюдается уменьшение амплитуды колебаний пластины, к которой был приложен внешний импульс давления (энергия ее колебаний затрачивается на раскачивание второй пластины и излучение распространяющихся вдоль канала волн в газе). Рост амплитуды колебаний изначально неподвижной пластины сопровождается уменьшением фазового сдвига. Если в конце первого полупериода колебания пластин смещены по фазе на  $\pi/2$ , то с течением времени разность фаз колебаний уменьшается, и при  $t > 0,01$  с колебания синхронизируются как по амплитуде, так и по фазе (рис. 2,а). Синхронизация движения упругих элементов

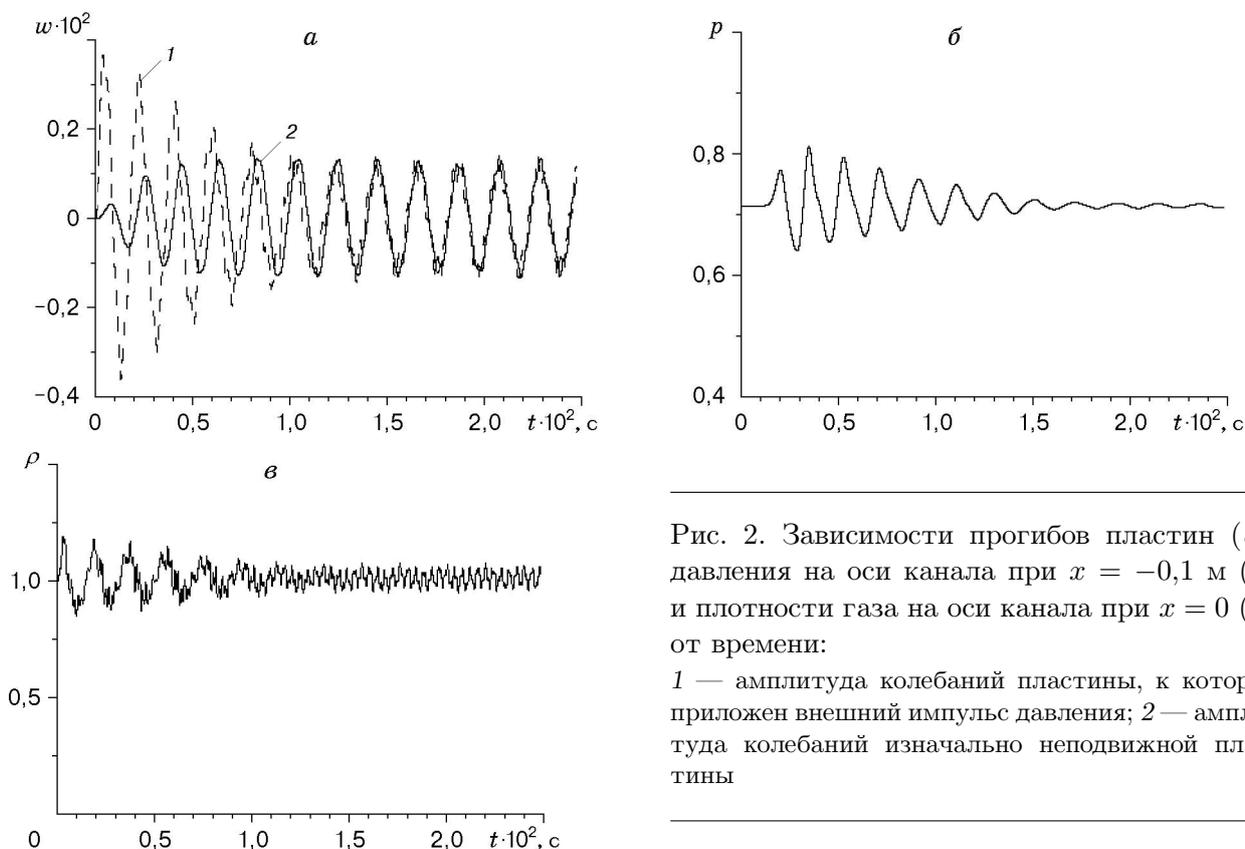


Рис. 2. Зависимости прогибов пластин (а), давления на оси канала при  $x = -0,1$  м (б) и плотности газа на оси канала при  $x = 0$  (в) от времени:  
 1 — амплитуда колебаний пластины, к которой применен внешний импульс давления; 2 — амплитуда колебаний изначально неподвижной пластины

сопровождается резким уменьшением амплитуды колебаний давления и плотности газа в канале. На рис. 2,б приведена зависимость давления от времени на оси канала в точке с координатой  $x = -0,1$  м. До наступления синхронного режима колебания пластин сопровождаются значительными изменениями объема канала, ограниченного упругими стенками, что приводит к возникновению колебаний давления с крутыми передними фронтами. Синхронным перемещениям стенок соответствуют малые изменения объема канала, в результате чего колебания давления происходят с малой амплитудой и по форме близки к гармоническим (рис. 2,б). На рис. 2,в показана зависимость плотности от времени на оси канала в точке с координатой  $x = 0$ . Если до возникновения синхронных колебаний сигнал содержал частоту возбуждения (частоту колеблющихся пластин) и частоты, кратные частоте первого линейного акустического резонанса газового столба в поперечном направлении  $f_{11}, 2f_{11}$  [8], то после синхронизации спектральный состав акустического сигнала меняется: резко уменьшается амплитуда составляющей с частотой возбуждения несмотря на значительную амплитуду колебаний стенок канала (рис. 2,а,в).

Другой тип совместных колебаний наблюдается, если начальное возбуждение пластин происходит в противофазе при существенно различных интенсивностях внешних импульсов давления. На рис. 3,а приведена зависимость прогибов пластин от времени при  $F_1(t) = At$ , если  $t < t_n$ , и  $F_1(t) = 0$ , если  $t > t_n$ ;  $F_2(t) = -0,3F_1(t)$ . Процесс синхронизации амплитуд и фаз происходит за счет увеличения длительности периода колебаний пластины, к которой применен импульс меньшей интенсивности. После синхронизации амплитуда колебаний пластин оказывается выше, чем в случае, когда возбуждаются колебания только одной пластины. При  $F_2(t) = -0,9F_1(t)$  процесс синхронизации колебаний протекает аналогично.

Если начальное возбуждение пластин происходит в противофазе при близких интенсивностях внешних импульсов давления, то синфазные колебания в системе не возникают. На рис. 3,б приведена зависимость прогибов пластин от времени при  $F_1(t) = At$ , если

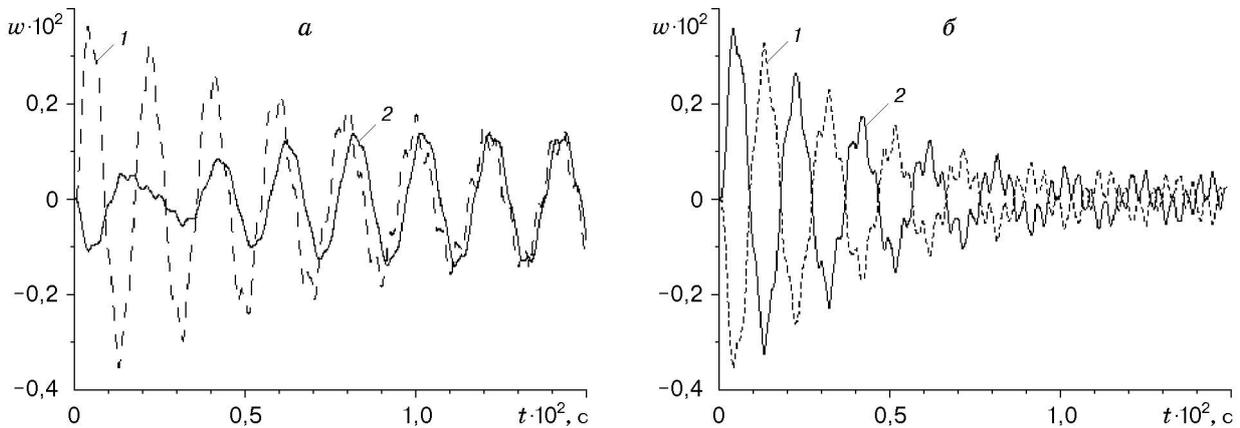


Рис. 3. Зависимость прогибов пластин от времени при  $F_1(t) = At$ , если  $t < t_H$ , и  $F_1(t) = 0$ , если  $t > t_H$ :

$a$  —  $F_2(t) = -0,3F_1(t)$ ;  $b$  —  $F_2(t) = -0,99F_1(t)$ ; 1 — амплитуда колебаний пластины, к которой приложен внешний импульс давления; 2 — амплитуда колебаний изначально неподвижной пластины

$t < t_H$ , и  $F_1(t) = 0$ , если  $t > t_H$ ;  $F_2(t) = -0,99F_1(t)$ . В этом режиме наблюдается интенсивное затухание колебаний упругих стенок за счет того, что распределение давления в газе близко к осесимметричному. Рост давления газа вблизи оси канала при движении пластин во внутреннюю область приводит к более быстрому затуханию их амплитуды. В то же время колебания давления и плотности, возникающие при возбуждении пластин в противофазе, происходят с большей интенсивностью по сравнению с синхронным режимом.

Таким образом, численное моделирование взаимодействия аэроупругосвязанных пластин позволило выявить два наиболее характерных динамических режима. При симметричном возбуждении колебания пластин быстро затухают без возникновения синхронизации. При существенно несимметричном возбуждении наблюдается синхронизация фаз колеблющихся пластин за счет увеличения длительности периода колебаний пластины, имеющей меньшую амплитуду.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
4. Steger J. L. Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries // AIAA J. 1978. V. 16, N 7. P. 679–686.
5. Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.
6. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
7. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
8. Тукмаков А. Л., Зарипов Р. Г. Численное моделирование субгармонических колебаний газа в закрытой трубе // Изв. вузов. Авиац. техника. 2001. № 1. С. 64–67.
9. Тукмаков А. Л. Нелинейные режимы колебаний упругой панели под действием периодической нагрузки // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 186–191.

Поступила в редакцию 24/V 2002 г.