УДК 517.957:[532.516.5+536.23]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С ПОЛИТРОПНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

В. В. Бублик

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: bublik@itam.nsc.ru

Рассматривается система уравнений Навье — Стокса для двумерных стационарных течений вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния. Изучаются дифференциально-инвариантные решения этой системы. Для всех подгрупп допускаемой группы построены базисы дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования. Получены примеры новых дифференциально-инвариантных решений.

Ключевые слова: динамика вязкого теплопроводного газа, дифференциально-инвариантные решения.

1. Описание модели. Рассматривается система уравнений, описывающая плоские стационарные течения вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния:

$$\rho(uu_x + vu_y) = -p_x + (\lambda(u_x + v_y))_x + (2\mu u_x)_x + (\mu(u_y + v_x))_y; \tag{1}$$

$$\rho(uv_x + vv_y) = -p_y + (\lambda(u_x + v_y))_y + (\mu(u_y + v_x))_x + (2\mu v_y)_y; \tag{2}$$

$$(u\rho)_x + (v\rho)_y = 0; \tag{3}$$

$$c_V\rho(uT_x + vT_y) + p(u_x + v_y) = \\ = (\varkappa T_x)_x + (\varkappa T_y)_y + \lambda(u_x + v_y)^2 + \mu(2u_x^2 + 2v_y^2 + (u_y + v_x)^2). \tag{4}$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости; ρ — плотность; T — температура; $p = R\rho T$ — давление; R — газовая постоянная; c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме; $\mu = m_0T^\omega$, $\lambda = l_0T^\omega$ — первая и вторая вязкости; $\varkappa = k_0T^\omega$ — теплопроводность [1].

В работах [2, 3] показано, что система (1)–(4) допускает алгебру Ли L_5 с базисом

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\,\partial_x - x\,\partial_y + v\,\partial_u - u\,\partial_v, \quad X_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y - \rho\,\partial_\rho,$$
$$X_5 = u\,\partial_u + v\,\partial_v + (2\omega - 1)\rho\,\partial_\rho + 2T\,\partial_T.$$

Оптимальная система подалгебр соответствующей алгебры Ли построена в [2]. В данной работе используется эквивалентная ей оптимальная система.

Работа выполнена в рамках проекта СО РАН № 26, УрО РАН и ДВО РАН и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00575-а).

2. Инвариантные и частично инвариантные решения. Инвариантные решения ранга 1 системы (1)–(4) описаны в [2, 3]. Такие решения имеются среди инвариантных решений ранга 1 этой системы уравнений, описывающих плоские нестационарные движения вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния. Эти решения описаны в [4, 5].

Инвариантные решения ранга 0 системы (1)–(4) имеются среди инвариантных решений ранга 0 системы уравнений, описывающих плоские нестационарные движения вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния. Эти решения рассматриваются в [6]. Все инвариантные решения ранга 0 для стационарных течений вязкого газа делятся на три типа.

1. Установившееся спиральное течение газа. Представление решения:

$$U = u_0 r^{\beta}\,\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}, \quad V = v_0 r^{\beta}\,\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}, \quad \rho = \rho_0 r^{2(\omega-1)\beta-1}\,\mathrm{e}^{(1-2\omega)\alpha\varphi}, \quad T = T_0 r^{2\beta}\,\mathrm{e}^{-2\alpha\varphi}.$$

Частицы газа движутся вдоль спиральных линий тока, описываемых уравнением $r = (u_0/v_0)\varphi + c$, где c — константа.

2. Установившееся прямолинейное течение газа. Представление решения:

$$u = u_0 y^{1/(2\omega)}, \quad v = v_0 y^{1/(2\omega)}, \quad \rho = \rho_0 y^{-1/(2\omega)}, \quad T = T_0 y^{1/\omega}.$$

3. Установившееся прямолинейное течение газа. Представление решения:

$$u = u_0\,\mathrm{e}^{\alpha x+\beta y}, \quad v = v_0\,\mathrm{e}^{\alpha x+\beta y}, \quad \rho = \rho_0\,\mathrm{e}^{(2\omega-1)(\alpha x+\beta y)}, \quad T = T_0\,\mathrm{e}^{2(\alpha x+\beta y)}.$$

В данных трех случаях одну из констант u_0, v_0, ρ_0, T_0 можно выбрать произвольно, остальные константы определяются с помощью фактор-системы.

В данной работе фактор-системы не приводятся, поскольку их легко получить, подставив представление решения в (1)–(4). Следует отметить, что эти фактор-системы состоят из трех уравнений, поскольку уравнение (3) во всех трех случаях тождественно выполняется.

В настоящее время частично инвариантные решения системы (1)–(4) практически не исследованы. Известно лишь несколько примеров нередуцируемых к инвариантным частично инвариантных решений [7, 8].

3. Регулярные дифференциально-инвариантные решения. Рассмотрим дифференциально-инвариантные решения системы уравнений (1)–(4) [9, 10]. Будем использовать формальное обобщение понятия регулярного частично инвариантного решения на класс дифференциально-инвариантных решений [11].

Для того чтобы получить дифференциально-инвариантные решения, прежде всего необходимо для каждой алгебры из оптимальной системы подалгебр построить базис дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования. Результаты такого построения приведены в таблице. В первой графе указан номер подалгебры. Для удобства введена двойная нумерация подалгебр: первое число в номере подалгебры обозначает ее размерность, второе — ее номер среди подалгебр данной размерности. Во второй графе указан базис подалгебры (при этом вместо оператора указан только его номер, например, запись $1 + \alpha 5$ означает оператор $X_1 + \alpha X_5$). Константы α, β, ζ принимают любые вещественные значения, если не указано иное. В третьей графе указан базис дифференциальных инвариантов соответствующей подалгебры, в четвертой — операторы инвариантного дифференцирования.

Утверждение 1. Базис дифференциальных инвариантов каждой из подалгебр алгебры Ли L_5, допускаемой системой (1)–(4), всегда содержится среди инвариантов порядка не выше первого.

Базисы дифференциальных инвариантов

Номер подалгебры	H	J	D
5.1	1, 2, 3, 4, 5	$(u^2+v^2)/T$, $(u_x+v_y)T^{\omega-1}\rho^{-1}$, $(u_y-v_x)T^{\omega-1}\rho^{-1}$, $(u(uu_x+vv_x)+v(uu_y+vv_y))T^{\omega-2}\rho^{-1}$, $(v(uu_x+vv_x)-u(uu_y+vv_y))T^{\omega-2}\rho^{-1}$, $(u\rho_x+v\rho_y)T^{\omega-1}\rho^{-2}$, $(v\rho_x-u\rho_y)T^{\omega-1}\rho^{-2}$	$T^{\omega-1}\rho^{-1}(uD_x+vD_y)$, $T^{\omega-1}\rho^{-1}(vD_x-uD_y)$
4.1	1, 2, $3+\zeta 5$, $4+\alpha 5$, $\zeta\ne 0$	$T^{-1/2}(u\sin\ln\tau+v\cos\ln\tau)$, $T^{-1/2}(u\cos\ln\tau-v\sin\ln\tau)$, $(u_x+v_y)T^{\omega-1}\rho^{-1}$, $(u_y-v_x)T^{\omega-1}\rho^{-1}$, $(\rho_x\sin\ln\tau+\rho_y\cos\ln\tau)T^{\omega-1/2}\rho^{-2}$, $(\rho_x\cos\ln\tau-\rho_y\sin\ln\tau)T^{\omega-1/2}\rho^{-2}$, $\tau=\rho^{\alpha/\zeta}T^{(1-(2\omega-1)\alpha)/(2\zeta)}$	$T^{\omega-1/2}\rho^{-1}(\sin\ln\tau D_x+$ $+\cos\ln\tau D_y)$, $T^{\omega-1/2}\rho^{-1}(\cos\ln\tau D_x-$ $-\sin\ln\tau D_y)$
4.2	1, 2, 3, $4+\zeta 5$, $\zeta\ne 0$	$(u^2+v^2)/T$, $\rho T^{(1-(2\omega-1)\zeta)/(2\zeta)}$, $(u_x+v_y)T^{(1-\zeta)/(2\zeta)}$, $(u_y-v_x)T^{(1-\zeta)/(2\zeta)}$, $(u\rho_x+v\rho_y)T^{(1-\omega\zeta)/\zeta}$, $(v\rho_x-u\rho_y)T^{(1-\omega\zeta)/\zeta}$	$T^{(1-\zeta)/(2\zeta)}(uD_x+vD_y)$, $T^{(1-\zeta)/(2\zeta)}(vD_x-uD_y)$
4.3	1, 2, 3, 4	u^2+v^2, T, $(u_x+v_y)/\rho$, $(u_y-v_x)/\rho$, $(u\rho_x+v\rho_y)/\rho^2$, $(v\rho_x-u\rho_y)/\rho^2$	$(uD_x+vD_y)/\rho$, $(vD_x-uD_y)/\rho$
4.4	1, 2, $3+\zeta 4$, 5, $\zeta\ne 0$	$T^{-1/2}(u\sin\ln\tau+v\cos\ln\tau)$, $T^{-1/2}(u\cos\ln\tau-v\sin\ln\tau)$, $(u_x+v_y)T^{\omega-1}\rho^{-1}$, $(u_y-v_x)T^{\omega-1}\rho^{-1}$, $(T_x\sin\ln\tau+T_y\cos\ln\tau)T^{\omega-3/2}\rho^{-1}$, $(T_x\cos\ln\tau-T_y\sin\ln\tau)T^{\omega-3/2}\rho^{-1}$, $\tau=\rho^{1/\alpha}T^{(1-2\omega)/(2\alpha)}$	$T^{\omega-1/2}\rho^{-1}(\sin\ln\tau D_x+$ $+\cos\ln\tau D_y)$, $T^{\omega-1/2}\rho^{-1}(\cos\ln\tau D_x-$ $-\sin\ln\tau D_y)$
4.5	1, 2, 3, 5	$(u^2+v^2)/T$, $\rho T^{1/2-\omega}$, $(u_x+v_y)T^{-1/2}$, $(u_y-v_x)T^{-1/2}$, $(u\rho_x+v\rho_y)T^{-\omega}$, $(v\rho_x-u\rho_y)T^{-\omega}$	$T^{-1/2}(uD_x+vD_y)$, $T^{-1/2}(vD_x-uD_y)$
4.6	1, 2, 4, 5	$uT^{-1/2}$, $vT^{-1/2}$, $T^{\omega-3/2}T_x\rho^{-1}$, $T^{\omega-3/2}T_y\rho^{-1}$, $T^{\omega-1/2}\rho_x\rho^{-2}$, $T^{\omega-1/2}\rho_y\rho^{-2}$	$T^{\omega-1/2}\rho^{-1}D_x$, $T^{\omega-1/2}\rho^{-1}D_y$
3.1	3, 4, 5	$UT^{-1/2}$, $VT^{-1/2}$, $r\rho T^{1/2-\omega}$, rT_r/T, T_φ/T	rD_r, D_φ
3.2	1, 2, $3+\alpha 4+\zeta 5$, $\zeta\ne 0$	$T^{-1/2}(u\sin(\ln T/2\zeta)+v\cos(\ln T/2\zeta))$, $T^{-1/2}(u\cos(\ln T/2\zeta)-v\sin(\ln T/2\zeta))$, $\rho T^{(\alpha-(2\omega-1)\zeta)/(2\zeta)}$, $(u_x+v_y)T^{(\alpha-\zeta)/(2\zeta)}$, $(u_y-v_x)T^{(\alpha-\zeta)/(2\zeta)}$	$T^{\alpha/(2\zeta)}(\sin(\ln T/2\zeta)D_x+$ $+\cos(\ln T/2\zeta)D_y)$, $T^{\alpha/(2\zeta)}(\cos(\ln T/2\zeta)D_x-$ $-\sin(\ln T/2\zeta)D_y)$
3.3	1, 2, $3+\zeta 4$, $\zeta\ne 0$	u^2+v^2, $\rho\exp(\zeta\,\mathrm{arctg}\,(u/v))$, T, $(u_x+v_y)\rho^{-1}$, $(u_y-v_x)\rho^{-1}$	$\rho^{-1}(\sin(\ln\rho/\zeta)D_x+$ $+\cos(\ln\rho/\zeta)D_y)$, $\rho^{-1}(\cos(\ln\rho/\zeta)D_x-$ $-\sin(\ln\rho/\zeta)D_y)$
3.4	1, 2, 3	u^2+v^2, ρ, T, u_x+v_y, u_y-v_x	uD_x+vD_y, vD_x-uD_y

Окончание таблицы

Номер подалгебры	H	J	D
3.5	1, 2, $4+\zeta 5$, $\zeta \neq 0$	$uT^{-1/2}$, $vT^{-1/2}$, $\rho T^{1/2-\omega+1/(2\zeta)}$, $T_xT^{-1+1/\zeta}$, $T_yT^{-1+1/\zeta}$	$T^{1/(2\zeta)}D_x$, $T^{1/(2\zeta)}D_y$
3.6	1, 2, 4	u, v, T, ρ_x/ρ^2, ρ_y/ρ^2	$\rho^{-1}D_x$, $\rho^{-1}D_y$
3.7	1, 4, 5	$uT^{-1/2}$, $vT^{-1/2}$, $y\rho T^{1/2-\omega}$, yT_x/T, yT_y/T	yD_x, yD_y
3.8	1, 2, 5	$uT^{-1/2}$, $vT^{-1/2}$, $\rho T^{1/2-\omega}$, T_x/T, T_y/T	D_x, D_y
2.1	$3+\alpha 5$, $4+\beta 5$	$Ur^{-\beta}\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi}$, $r^{-\beta}V\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi}$, $\rho r^{1-(2\omega-1)\beta}\,\mathrm{e}^{(2\omega-1)\alpha\varphi}$, $Tr^{-2\beta}\,\mathrm{e}^{2\alpha\varphi}$	rD_r, D_φ
2.2	$3+\alpha 4$, 5	$r\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi}$, $UT^{-1/2}$, $VT^{-1/2}$, $r\rho T^{1/2-\omega}$, rT_r/T, T_φ/T	rD_r, D_φ
2.3	4, 5	x/y, $uT^{-1/2}$, $vT^{-1/2}$, $x\rho T^{1/2-\omega}$, xT_x/T, yT_y/T	xD_x, yD_y
2.4	1, $4+\alpha 5$	$uy^{-\alpha}$, $vy^{-\alpha}$, $\rho y^{1-(2\omega-1)\alpha}$, $Ty^{-2\alpha}$	xD_x, yD_y
2.5	1, 5	y, $uT^{-1/2}$, $vT^{-1/2}$, $\rho T^{1/2-\omega}$, T_x/T, T_y/T	D_x, D_y
2.6	$1+\alpha 5$, $2+\beta 5$	$u\,\mathrm{e}^{-(\alpha x+\beta y)}$, $v\,\mathrm{e}^{-(\alpha x+\beta y)}$, $\rho\,\mathrm{e}^{(1-2\omega)(\alpha x+\beta y)}$, $T\,\mathrm{e}^{-2(\alpha x+\beta y)}$	D_x, D_y
1.1	$3+\alpha 4+\beta 5$	$r\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi}$, $U\,\mathrm{e}^{\beta\varphi}$, $V\,\mathrm{e}^{\beta\varphi}$, $\rho\,\mathrm{e}^{(\beta(2\omega-1)-\alpha)\varphi}$, $T\,\mathrm{e}^{2\beta\varphi}$	rD_r, D_φ
1.2	$4+\alpha 5$	x/y, $ux^{-\alpha}$, $vx^{-\alpha}$, $\rho x^{1-(2\omega-1)\alpha}$, $Tx^{-2\alpha}$	xD_x, yD_y
1.3	5	x, y, $uT^{-1/2}$, $vT^{-1/2}$, $\rho T^{1/2-\omega}$, T_x/T, T_y/T	D_x, D_y
1.4	$1+\alpha 5$	y, $u\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$, $v\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$, $\rho\,\mathrm{e}^{(1-2\omega)\alpha x}$, $T\,\mathrm{e}^{-2\alpha x}$	D_x, D_y

Утверждение 2. Для построения регулярных дифференциально-инвариантных решений достаточно использовать только инварианты из базиса дифференциальных инвариантов. К этим решениям сводятся все остальные регулярные дифференциально-инвариантные решения, построенные на основе инвариантов более высокого порядка.

Утверждение 3. Любое регулярное дифференциально-инвариантное решение является также регулярным частично инвариантным решением, построенным на той же подгруппе. Следует отметить, что эти решения совпадают, когда базис дифференциальных инвариантов подгруппы состоит только из инвариантов нулевого порядка. В случае если в базисе дифференциальных инвариантов подгруппы содержатся инварианты первого порядка, дифференциально-инвариантная подмодель описывает только частный случай частично инвариантной подмодели.

Утверждение 4. Все регулярные дифференциально-инвариантные решения ранга 0 системы (1)–(4), построенные на полном наборе инвариантов из базиса дифференциальных инвариантов, редуцируются к инвариантным решениям.

Доказательство. Для таких решений все первые производные искомых функций можно выразить только через сами функции и независимые переменные. Поэтому согласно теореме Овсянникова данные решения редуцируются к инвариантным.

Из утверждения 4 следует, что нередуцируемые к инвариантным регулярные дифференциально-инвариантные решения можно искать только среди решений ранга 1, которые строятся на основе подалгебр 2.2, 2.3, 2.5, или среди решений, при построении которых используются не все дифференциальные инварианты из базиса дифференциальных инвариантов.

3.1. *Анализ решений, построенных с использованием полного набора инвариантов из базиса дифференциальных инвариантов.* Рассмотрим три подалгебры.

Подалгебра 2.2. Базис дифференциальных инвариантов:

$$r\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi}, \quad UT^{-1/2}, \quad VT^{-1/2}, \quad \rho T^{1/2-\omega}, \quad rT_rT^{-1}, \quad T_\varphi T^{-1}.$$

Представление решения:

$$U = T^{1/2}U_1(\xi), \quad V = T^{1/2}V_1(\xi), \quad \rho = T^{\omega-1/2}\rho_1(\xi),$$
$$rT_r = Tf(\xi), \quad T_\varphi = Tg(\xi), \quad \xi = r\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi}.$$

В результате анализа совместности представления производных T_r и T_φ получаем соотношение $T = \mathrm{e}^{-2\beta\varphi}\,T_1(\xi)$. Следовательно, решение инвариантно относительно подалгебры 1.1.

Подалгебра 2.3. Базис дифференциальных инвариантов:

$$x/y, \quad uT^{-1/2}, \quad vT^{-1/2}, \quad x\rho T^{1/2-\omega}, \quad xT_xT^{-1}, \quad yT_yT^{-1}.$$

Представление решения:

$$u = T^{1/2}u_1(\xi), \quad v = T^{1/2}v_1(\xi), \quad \rho = x^{-1}T^{\omega-1/2}\rho_1(\xi),$$
$$xT_x = Tf(\xi), \quad yT_y = Tg(\xi), \quad \xi = x/y.$$

В результате анализа совместности представления производных T_x и T_y получаем соотношение $T = x^{2\alpha}T_1(\xi)$. Следовательно, решение инвариантно относительно подалгебры 1.2.

Подалгебра 2.5. Базис дифференциальных инвариантов:

$$y, \quad uT^{-1/2}, \quad vT^{-1/2}, \quad \rho T^{1/2-\omega}, \quad T_xT^{-1}, \quad T_yT^{-1}.$$

Представление решения:

$$u = T^{1/2}u_1(y), \quad v = T^{1/2}v_1(y), \quad \rho = T^{\omega-1/2}\rho_1(y), \quad T_x = Tf(y), \quad T_y = Tg(y).$$

В результате анализа совместности представления производных T_x и T_y получаем соотношение $T = \mathrm{e}^{2\alpha x+h(y)}$. Следовательно, решение инвариантно относительно подалгебры 1.4.

3.2. *Анализ решений, построенных с использованием части дифференциальных инвариантов.* В качестве примера рассмотрим две подалгебры.

Подалгебра 3.7. Базис дифференциальных инвариантов:

$$uT^{-1/2}, \quad vT^{-1/2}, \quad y\rho T^{1/2-\omega}, \quad yT_x/T, \quad yT_y/T.$$

В случае если для построения решения используется только один дифференциальный инвариант, решение либо редуцируется к инвариантному относительно подалгебры 2.3 или 2.4, либо является частным случаем решения, построенного на основе подалгебры 2.5.

Подалгебра 3.8. Базис дифференциальных инвариантов:

$$uT^{-1/2}, \quad vT^{-1/2}, \quad \rho T^{1/2-\omega}, \quad T_x/T, \quad T_y/T.$$

При использовании для построения решения только одного дифференциального инварианта решение либо редуцируется к инвариантному относительно подалгебры 2.6, либо является инвариантным относительно подалгебры 1.4 или подобной ей (в данном случае редукция отсутствует, так как ранг решения при этом увеличивается).

4. Нерегулярные дифференциально-инвариантные решения. Исследуем нерегулярное дифференциально-инвариантное решение на примере одной подалгебры.

Подалгебра 3.6. Базис дифференциальных инвариантов:

$$u, \quad v, \quad T, \quad \frac{\rho_x}{\rho^2}, \quad \frac{\rho_y}{\rho^2}.$$

Построим нерегулярное дифференциально-инвариантное решение ранга 1. Пусть все инварианты являются функциями T. Введем дополнительные функции $\phi(T)$, $\psi(T)$. Тогда получаем следующие выражения для производных плотности:

$$\rho_x = \rho^2\phi, \qquad \rho_y = \rho^2\psi.$$

Из условия совместности этих двух уравнений следует равенство

$$\psi' T_x - \phi' T_y = 0.$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по T. Последнее уравнение означает, что температура T сохраняется вдоль характеристик, описываемых уравнением

$$\frac{dx}{\psi'} = \frac{dy}{-\phi'}.$$

Поскольку ϕ и ψ зависят только от T, эти характеристики — прямые. Без ограничения общности можно считать, что температура сохраняется вдоль прямых $x = \mathrm{const}$, т. е. $T = T(x)$. Тогда $\psi(T) \equiv \psi_0 = \mathrm{const}$.

Подробный анализ фактор-системы не проводится. В результате преобразований система разбивается на две подсистемы: инвариантную и активную (требующую выполнения условий совместности). В инвариантной подсистеме функции $u(t)$, $v(T)$, $\phi(T)$ взаимосвязаны:

$$\begin{gathered}
(l_0 + 2m_0)T^\omega(u\phi' + \psi_0 v') + (u - RT\phi/\theta)u' + (l_0 + 2m_0)\omega T^{\omega-1}\theta + R = 0,\\
m_0 T^\omega\theta(u'v'' - u''v') + m_0 T^{\omega-1}(\omega\theta + T(u\phi' + \psi_0 v'))u'v' + uu'^2v' - R\psi_0 T u'^3/\theta = 0,\\
k_0 T^\omega\theta u'' - ((l_0 + 2m_0)T^\omega\theta + RT)u'^3 - m_0 T^\omega\theta u'v'^2 - k_0 T^\omega(u\phi' + \psi_0 v')u' - \\
\hfill - c_V u u'^2 - \omega k_0 T^{\omega-1}\theta u' = 0,\\
\theta = \phi u + \psi_0 v.
\end{gathered} \tag{5}$$

С использованием активной подсистемы на основе решения системы (5) можно восстановить функции ρ и T:

$$T_x = -\rho\theta/u', \qquad \rho_x = \rho^2\phi, \qquad \rho_y = \psi_0\rho^2. \tag{6}$$

Уравнения (6) совместны при $\theta = 0$ или $\psi_0 = 0$. В первом случае имеем редукцию к решению ранга 0, инвариантному относительно подгруппы, подобной подгруппе 2.4 или 2.6 (в зависимости от констант интегрирования фактор-системы). Во втором случае активную подсистему (6) можно заменить пассивной подсистемой

$$T_{xx} + \Big(\ln\frac{u'}{\phi}\Big)' T_x = 0, \qquad \rho = -\frac{u'}{\phi u}\, T_x,$$

а инвариантную подсистему нетрудно получить из (5) при $\psi_0 = 0$. Поскольку в случае $\psi_0 = 0$ все искомые функции зависят только от x, решение является инвариантным относительно подалгебры X_2, и в результате имеет место редукция к инвариантному решению ранга 1. Соответствующая фактор-система для инвариантного решения частично проинтегрирована в [4, 5]. Частным случаем этого решения является дифференциально-инвариантное решение, построенное в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бублик В. В.** О регулярных частично инвариантных решениях ранга 1 дефекта 1 уравнений плоских движений вязкого теплопроводного газа // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 23–33.
2. **Meleshko S. V.** Group classification of two-dimensional stable viscous gas equations // Intern. J. Nonlinear Mech. 1998. V. 34, N 3. P. 449–456.
3. **Meleshko S. V.** Group classification of two-dimensional steady viscous gas dynamics equations with arbitrary state equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. V. 35. P. 3515–3533.
4. **Бублик В. В.** Инвариантные решения ранга 1 уравнений плоских движений вязкого теплопроводного совершенного газа // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 26–31.
5. **Андреев В. К.** Симметрии неклассических моделей гидродинамики / В. К. Андреев, В. В. Бублик, В. О. Бытев. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2003.
6. **Бублик В. В.** "Простые" решения уравнений двумерных движений вязкого теплопроводного совершенного газа // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 123–127.
7. **Калиев И. А.** Некоторые точные решения системы уравнений вязкого газа // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1999. Вып. 114. С. 40–42.
8. **Бублик В. В.** Применение систем компьютерной алгебры для построения частично инвариантных и дифференциально-инвариантных решений // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 5. С. 32–40.
9. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. **Хабиров С. В.** Классификация дифференциально-инвариантных подмоделей // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.
11. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.

Поступила в редакцию 4/VII 2011 г.