УДК 539.3 : 550.3

КОЛЕБАНИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г. Ф. Шпак

(Новосибирск)

Изучение сейсмических особенностей строения недр Земли, по-видимому, вступило в новую фазу развития, вызванную наметившимся переходом от взрывов и землетрясений как источников с неконтролируемым спектром частот и направленностью к управляемым невзрывным источникам, в том числе вибрационным (со строго идентичным воздействием на грунт). Мощные поверхностные или заглубленные вибраторы могут осуществлять осесимметричную нагрузку на породы (в скважинах, шахтах и т. д.), которые в известном приближении рассматриваются как изотропные. В связи с этим приобретают значение формальные исследования волновых процессов на упрощенных моделях упругих сред, которые имеют целью создание теоретических предпосылок для осуществления сейсмических экспериментов. Возникающий при этом вид помех — «шум модели среды» — является результатом несоответствия строения среды и ее модели и должен учитываться в методах интерпретации [1].

Инженерный аспект проблемы связан с изучением нефтегазоперспективных регионов, возможной интенсификацией добычи разведанных запасов, с искусственным перераспределением упругих напряжений земной коры (в сейсмически активных районах) и предупреждением горных ударов (в зонах с интенсивными разработками).

Вибрационные наземные источники генерируют более интенсивные поверхностные волны, чем взрывы. Однако заглубление управляемого источника может существенно снизить уровень таких волн.

В данной работе рассматривается стационарная осесимметричная задача колебания изотропного полупространства от «заглубленного источника», имеющего вид круглой в плане щели, расположенной на некоторой глубине параллельно «дневной поверхности», последняя свободна от внешних нагрузок. Актуальность работы определяется ее связью с программой ВПЗ [1]. Задача для источника, сосредоточенного в точке $(0, 0, h)$ полупространства, приводится в [2]. В рассмотренной задаче колебания полупространства со свободной границей поверхностные стоячие волны отсутствуют. Задача описывает модель протяженного в плане заглубленного щелевого источника (предполагается, что вибрации передаются в щель наземным устройством посредством скважины). Задача представляет интерес для сейсмиков, использующих вибросточники, и механиков, изучающих колебания сплошной среды.

1. Постановка задачи в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеет вид

$$\left[\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\partial_z^2 - \frac{\rho}{\lambda+2\mu}\partial_t^2\right]u_r + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\partial_r\partial_z u_z = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\partial_z u_r + \left[\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\partial_z^2 - \frac{\rho}{\mu}\partial_t^2\right]u_z = 0;$$

$$(\sigma_z)_{z=0} = 0,\ (\tau_{rz})_{z=0} = 0,\ 0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant z < \infty; \tag{1.2}$$

$$(\sigma_z)_{z=h} = -f_k(r)e^{-i\omega t},\ (\tau_{rz})_{z=h} = 0,\quad h > 0\ (k = 1,\ 2); \tag{1.3}$$

$$(k = 1)\ r^2 \neq r_0^2 > 0;\quad (k = 2)\ r = r_0;\ 0 \leqslant r < \infty,$$

где $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ — перемещения; поверхность $z = 0$ свободна от «выходящих» напряжений (1.2). Плоская щель, фиксируемая областью $z = h$, $0 \leqslant r < \infty$, характеризуется нагрузкой (1.3); ∂_r, ∂_z, ∂_t — частные производные по координатам и времени; λ, μ — упругие постоянные Ламэ; ρ — плотность среды.

Вопрос о колебаниях полупространства от заглубленного «щелевого» источника представляется непростым в связи с удвоением (1.2), (1.3) граничных условий. Как известно, общее поле (деформаций) состоит из «чистых» колебаний и бегущих волн.

В данной работе бегущее волновое поле не рассматривается. Решение задачи (1.1)—(1.3) получено с использованием интегрального преобразования Ганкеля.

2. Решение в замкнутом виде, пригодном для аналитического исследования, найдено при следующем значении «граничной» функции $f_k(r)$:

$$f_k(r) = \begin{cases} \dfrac{\omega}{c_2}\dfrac{\mu\beta^{1/2}}{r_0^2 - r^2}\left[r_0 J_0\left(r\beta^{1/2}\dfrac{\omega}{c_2}\right) J_1\left(r_0\beta^{1/2}\dfrac{\omega}{c_2}\right) - \right. \\ \qquad\qquad \left. - r J_0\left(r_0\beta^{1/2}\dfrac{\omega}{c_2}\right) J_1\left(r\beta^{1/2}\dfrac{\omega}{c_2}\right)\right], \quad k = 1, \\ \dfrac{\mu}{2}\beta\dfrac{\omega^2}{c_2^2}\left\{\left[J_0'\left(r_0\beta^{1/2}\dfrac{\omega}{c_2}\right)\right]^2 + \left[J_0\left(r_0\beta^{1/2}\dfrac{\omega}{c_2}\right)\right]^2\right\}, \quad r_0 = r, \; k = 2. \end{cases}$$

Следовательно, при $r > r_0$ $f_1(r)$ убывает как $1/r$ и $1/r^{3/2}$ при $r \to \infty$. Это позволило использовать интегралы Ломмеля [3].

Перемещения u_r, u_z^* в полупространстве выражаются в виде

$$u_r = \frac{\omega}{c_2} e^{-i\omega t} \int_{1/\beta}^{\infty} N_1(z) J_0\left(\frac{\omega}{c_2}\frac{r_0}{\alpha^{1/2}}\right) J_1\left(\frac{\omega}{c_2}\frac{r}{\alpha^{1/2}}\right)\frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}}, \tag{2.1}$$

$$u_z = -\frac{\omega}{c_2} e^{-i\omega t} \int_{1/\beta}^{\infty} (\beta\alpha - 1)^{1/2} N_2(z) J_0\left(\frac{\omega}{c_2}\frac{r_0}{\alpha^{1/2}}\right) J_0\left(\frac{\omega}{c_2}\frac{r}{\alpha^{1/2}}\right)\frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}},$$

где $\beta = c_2^2/c_1^2$; $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$; $c_2^2 = \mu/\rho$.

Функции $N_1(z)$, $N_2(z)$ имеют вид

$$N_1(z) = A\left[\frac{2-\alpha}{2}\sin\theta_1 z + (\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}\sin\theta_2 z\right] -$$
$$- (\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2} B\left[\frac{2}{2-\alpha}\cos\theta_1 z - \cos\theta_2 z\right],$$
$$N_2(z) = A\left[\frac{2-\alpha}{2}\cos\theta_1 z - \cos\theta_2 z\right] +$$
$$+ B\left[\frac{2}{2-\alpha}(\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}\sin\theta_1 z + \sin\theta_2 z\right],$$

где

$$\theta_1 = \frac{\omega}{c_2\alpha^{1/2}}(\beta\alpha - 1)^{1/2}, \quad \theta_2 = \frac{\omega}{c_2\alpha^{1/2}}(\alpha - 1)^{1/2}, \tag{2.2}$$

$$AM = \frac{4(\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}}{(2-\alpha)^2}\sin\theta_1 h + \sin\theta_2 h, \quad B = -\frac{\cos\theta_1 h - \cos\theta_2 h}{M}.$$

Далее, $M = M(\alpha, h)$ имеет вид

$$M = \left[\frac{4(\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}}{(2-\alpha)^2}\sin\theta_1 h + \sin\theta_2 h\right][(2-\alpha)^2\sin\theta_1 h +$$
$$+ 4(\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}\sin\theta_2 h] - 4(\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}(\cos\theta_1 h - \cos\theta_2 h)^2.$$

Формулы (2.1) показывают, что при $z = 0$ перемещения u_r, u_z отличны от нуля.

Напряжения, входящие в граничные условия, выражаются формулами

$$\tau_{rz} = \mu\frac{\omega^2}{c_2^2} e^{-i\omega t} \int_{1/\beta}^{\infty} (2-\alpha)(\beta\alpha - 1)^{1/2} N_3(z) J_0\left(\frac{\omega}{c_2}\frac{r_0}{\alpha^{1/2}}\right) J_1\left(\frac{\omega}{c_2}\frac{r}{\alpha^{1/2}}\right)\frac{d\alpha}{\alpha^2},$$

$$\sigma_z = -\frac{\mu}{2}\frac{\omega^2}{c_2^2} e^{-i\omega} \int_{1/\beta}^{\infty} N_4(z) J_0\left(\frac{\omega}{c_2}\frac{r_0}{\alpha^{1/2}}\right) J_0\left(\frac{\omega}{c_2}\frac{r}{\alpha^{1/2}}\right)\frac{d\alpha}{\alpha^2}.$$

Функции $N_3(z)$, $N_4(z)$ определяются выражениями

$$N_3(z) = A(\cos\theta_1 z - \cos\theta_2 z) + B\left[\frac{4}{(2-\alpha)^2}(\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}\sin\theta_1 z + \sin\theta_2 z\right],$$

---

* Использованы однородные решения задачи (1.1), (1.2).

$$N_4(z) = A[(2-\alpha)^2 \sin\theta_1 z + 4(\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}\sin\theta_2 z] -$$
$$- 4(\beta\alpha - 1)^{1/2}(\alpha - 1)^{1/2}B(\cos\theta_1 z - \cos\theta_2 z).$$

Значения A и B берутся из (2.2).

Подынтегральные выражения для перемещений (2.1), содержащие «знаменатель» $M(\alpha, h)$, обладающий корнями α_s, имеют в точках $\alpha = \alpha_s$ особенности. Поэтому интегралы понимаются в смысле главных значений по Коши.

Полученное решение задачи применимо при исследованиях колебаний в горных породах от источников, находящихся на заданной глубине под свободной «дневной» поверхностью.

Поступила 30 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Проблемы** вибрационного просвечивания Земли/Отв. ред. А. В. Николаев, И. Н. Галкин. М.: Наука, 1977.
2. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
3. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1973.