ПМТФ, № 4, 1970

НЕКОТОРЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ВОЛН

Ю. Я. Богуславский, А. И. Иоффе, Ю. Г. Статников

(Москва)

Распространение волн в поглощающей среде совпровождается однонаправленным движением этой среды — течением, возникающим из-за того, что волна наряду с потерей энергии теряет часть импульса. Эта потеря в силу закона сохранения импульса и компенсируется течением.

В проводящей среде потери импульса волной связаны не только с вязкостью и теплопроводностью, но и с потерями на джоулево тепло. Кроме того, на конфигурацию и характер течений в этом случае влияет и само магнитное поле.

Движение проводящей жидкости в магнитном поле описывается, как известно, следующей системой уравнений [1]:

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0 \qquad \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\Delta\mathbf{v} \qquad (1)$$

$$p = p\,(\rho,\ T)$$

(v — скорость, ρ — плотность жидкости, η, ζ — два коэффициента вязкости жидкости, p — давление, H — напряженность магнитного поля, σ — проводимость, T — температура, c — скорость света).

В рассматриваемых ниже течениях диссипативные коэффициенты будем считать постоянными; уравнение же переноса тепла сведется к уравнению сохранения энтропии (условие адиабатичности движения) (см. [1], § 52).

Рассмотрим бесконечный плоский слой толщиной $2a$, ограниченный плоскими твердыми стенками, заполненный проводящей жидкостью. Вдоль оси слоя распространяется пучок волн шириной $2b$. Торцы канала закрыты прозрачными для волн пленками. Перпендикулярно к плоскостям, ограничивающим канал, приложено однородное магнитное поле напряженностью H. Определим течение, возникающее в такой системе.

В дальнейшем потребуется определить некоторые соотношения для магнитогидродинамических волн, и в частности, коэффициент поглощения α. Ось x направим вдоль оси канала, ось y — перпендикулярно его стенкам. Будем рассматривать волну вида

$$v = v_0 \cos(\omega t - \mathbf{kx})\, e^{-\alpha x} \qquad (2)$$

где v_0 — амплитуда скорости, w — частота, k — волновой вектор, фазовая скорость волны

$$u = \omega \,/\, |\boldsymbol{k}| \qquad (3)$$

α — коэффициент поглощения, причем

$$\alpha = \langle Q\rangle \,/\, 2\,\langle q\rangle \qquad (4)$$

где $\langle Q\rangle$ —среднее по времени количество энергии, диссипируемой в 1 *сек/м*^{3}, $\langle q\rangle$ — средняя плотность энергии в волне (коэффициент поглощения α предполагается малым, $\alpha L \ll 1$, где L — длина канала).

В рассматриваемом случае поперечного магнитного поля скорости распространения магнитогидродинамических волн и их предельные значения определены, например, в [1]

Величины $\langle Q\rangle$ и $\langle q\rangle$ определяются следующими выражениями:

$$\langle Q\rangle = \frac{k^2 v_0^2}{2}\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta\right] + \frac{H_0^2 c^2}{4\pi^2 \sigma u_0}, \qquad \langle q\rangle = \frac{\rho v_0^2 u_0}{2}\left\{1 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho u_0^2}\right\} \tag{5}$$

Для коэффициентов поглощения получим выражения при

$$H^2 \ll 4\pi\rho u_0^2, \quad \alpha = \frac{\omega^2}{\rho u_0^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \frac{H_0^2 c^2}{4\pi^2 \sigma u_0^2}\right] \tag{6}$$

и при

$$H^2 \gg 4\pi\rho u_0^2, \quad \alpha = \frac{2\pi\omega^2}{u_0^2 H^2}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \frac{H_0^2 c^2}{4\pi^2 \sigma u_0^2}\right] \tag{7}$$

Скорость v в волне связана с малой добавкой к полю h_y соотношениями при условии (6)

$$h_y \approx v_x H_0 / u_0 \tag{8}$$

при условии (7)

$$v_x \approx \frac{h_y}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad u_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{1/2} \tag{9}$$

Здесь u_0 — скорость распространения звука в среде.

Для волн Альфвена коэффициент поглощения равен [1]

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2u_1^3}\left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right) \tag{10}$$

Будем искать теперь решение системы (1) в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \ldots, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots \tag{11}$$

причем величины v_1 и h_1 — суть магнитогидродинамических волн.

Величины $\mathbf{h}_2$, ρ_2, $\mathbf{v}_2$ представляют собой следующее приближение в решении системы (1), причем у скорости $\mathbf{v}_2$ помимо члена, зависящего от времени, появляется член, не зависящий от времени,— скорость течения.

Выпишем уравнения второго приближения для средних по времени значений $\langle \mathbf{v}_2\rangle$ и $\langle \mathbf{h}_2\rangle$ от величин $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{h}_2$; для этого подставим разложение (11) в систему (1), учтем члены до второго приближения включительно и усредним полученные уравнения по времени так называемый метод Шредингера (см., например, [2]). В результате получим

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\langle \mathbf{v}_2\rangle = 0\\ \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\langle \mathbf{h}_2\rangle + \operatorname{rot}[\langle \mathbf{v}_2\mathbf{H}_0\rangle] + \operatorname{rot}[\langle \mathbf{v}_1\mathbf{h}_1\rangle] = 0\\ \operatorname{div}[\mathbf{h}_2\rangle = 0\\ \operatorname{rot}\langle(\mathbf{v}_1\nabla)\,\mathbf{v}_1\rangle = \nu\operatorname{rot}\Delta\langle \mathbf{v}_2\rangle - \frac{1}{4\pi\rho_0}\operatorname{rot}\langle[\mathbf{H}_0\operatorname{rot}\mathbf{h}_2]\rangle -\\ - \frac{1}{4\pi\rho_0}\operatorname{rot}\langle[\mathbf{h}_1\operatorname{rot}\mathbf{h}_1]\rangle, \quad \nu = \eta/\rho\end{gathered} \tag{12}$$

К последнему уравнению системы после усреднения применена операция rot.

Будем интересоваться течениями, возникающими из-за поглощения импульса волны только в средней части канала, пренебрегая влиянием его концов; предположим также, что скорость течения везде направлена по оси x, изменение же всех связанных с ней величин происходит гораздо быстрее вдоль оси y, чем вдоль оси x (т. е. пренебрежем всеми величинами вида $\partial / \partial x$ по сравнению с $\partial / \partial y$).

При этих предположениях для течений в средней части канала получим следующую систему уравнений (исходя из уравнений (12)):

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 \langle h_{2x}\rangle}{\partial y^2} + H_0 \frac{\partial \langle v_{2x}\rangle}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

$$\left\langle v_{1x}\frac{\partial v_{1x}}{\partial x}\right\rangle = \nu \frac{\partial^2 \langle v_{2x}\rangle}{\partial y^2} + \frac{H_0}{4\pi\rho}\frac{\partial \langle h_{2x}\rangle}{\partial y} + C$$

где C — постоянная интегрирования.

Граничные условия для системы (13) имеют вид

$$h_{2x} = 0 \quad \text{при } y = \pm a, \qquad \langle v_{2x}\rangle = 0 \text{ при } y = \pm a \tag{14}$$

Из системы (13) легко получить уравнение для величины $\langle v_{2x}\rangle$, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 \langle v_{2x}\rangle}{\partial y^2} - D^2 \langle v_{2x}\rangle + c_1 = -\frac{\alpha v_0^2 \theta(y)}{2\nu} \tag{15}$$

$$D^2 = \frac{H_0^2\sigma}{c^2\eta}, \qquad \theta(y) = \begin{cases} 0 & (b < |y| \leqslant a) \\ 1 & (0 \leqslant |y| \leqslant b) \end{cases} \tag{16}$$

Решение уравнения (15) с граничными условиями (14) имеет вид

$$\langle v_{2x}\rangle = \begin{cases} a_1(\operatorname{ch} Dy - \operatorname{ch} Da) + a_2(\operatorname{ch} Db - \operatorname{ch} Dy) & (|y| < b) \\ a_1(\operatorname{ch} Dy - \operatorname{ch} Da) \quad (b < |y| < a) & a_2 = \alpha v_0^2 / 2\nu D^2 \end{cases} \tag{17}$$

где a_1 — постоянная, которая определяется из условия сохранения массы по сечению канала

$$\rho_0 \int_0^a \langle v_{2x}\rangle\, dy = 0 \tag{18}$$

Подставив в это равенство выражение (17), получим для

$$a_1 = \frac{a_2}{\operatorname{ch} Db}\left\{\frac{b \operatorname{ch} Db - (\operatorname{sh} Db) / D}{a \operatorname{ch} Da - (\operatorname{sh} Da) / D}\right\} \tag{19}$$

Как уже отмечалось, наличие магнитного поля будет влиять как на абсолютные значения скоростей течений, так и на конфигурацию профиля скорости. Степень влияния магнитного поля на скорость течения зависит от величины Da.

Так, когда $Da \ll 1$ получим

$$\langle v_{2x}\rangle = \begin{cases} {}^1/_2\, a_2 b^2 D^2 \left[(1 - b/a) + (y/b)^2 (b^3/a^3 - 1)\right] & (|y| < b) \\ {}^1/_4\, \alpha v_0^2 b^3 (y^2 - a^2)\, \nu^{-1} a^{-3} & (b < |y| < a) \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, в этом случае конфигурация профиля скорости течения, вызванного волной, такая же как в обычном акустическом течении. Увеличение абсолютной величины скорости может произойти только за счет увеличения коэффициента поглощения (при прочих одинаковых условиях). Отношение максимальных значений скоростей течений в обычном $\langle v_{2x}\rangle_1$ и магнитогидродинамическом $\langle v_{2x}\rangle_2$ случаях равно

$$\frac{\langle v_{2x}\rangle_2}{\langle v_{2x}\rangle_1}=\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{(^4/_3)\,\eta+\zeta+H_0^2c^2/u_0^2 4\pi\sigma}{(^4/_3)\,\eta+\zeta}\approx 1+\frac{H_0^2c^2}{\eta u_0^2 4\pi^2 b} \tag{21}$$

В том случае, когда величина $Da \gg 1$, имеем

$$\langle v_{2x}\rangle=\begin{cases} {}^1/_2 a_2\,(b/a)\,[e^{-D(a-|y|)}-1)+(a/b)\,(1-e^{-D(b-|y|)})] & (|y|<b)\\ {}^1/_2 a_2 a^{-1}\,[1-e^{-D(a-|y|)}] & (b<|y|<a)\end{cases} \tag{22}$$

Конфигурация профиля скорости при этом становится более плоской.

Подчеркнем, что полученные выше выражения для скоростей потоков справедливы лишь при следующих ограничениях:

$$\alpha L \ll 1,\quad H^2 \ll 4\pi\rho v_0^2,\quad 2\pi v_0 u_0/\omega\nu \ll 1 \tag{23}$$

Последнее ограничение — малость числа Рейнольдса — необходимо для того, чтобы сходились ряды типа (11).

Рассмотрим теперь случай, когда в условиях (23) второе неравенство заменяется на обратное, а остальные два сохраняются (т. е. $H^2 \gg 4\pi\rho u_0^2$ (см. (7))). Так как в этом случае величина h_{1y} не зависит от y, то не изменяется система уравнений (12) для величин второго приближения и, следовательно, не изменится уравнение для скорости течения. Граничные условия также не меняются, поэтому вид решения остается прежним, изменяется лишь коэффициент поглощения и скорость распространения самой волны. При условии (9) отношение максимальных скоростей течений в обычном $\langle v_{2x}\rangle_1$ и магнитогидродинамическом случаях $\langle v_{2x}\rangle_2$ равно

$$\frac{\langle v_{2x}\rangle_2}{\langle v_{2x}\rangle_1}=\frac{2\pi u_0^2}{H_0^2}\left\{1+\frac{H_0^2c^2}{4\pi\sigma u_0^2\,(4\eta/3+\zeta)}\right\} \tag{24}$$

Для реальных проводящих жидкостей, в частности плазмы, это отношение может составлять величину порядка 10^2—10^3.

В заключение заметим следующее. Существование постоянного течения приводит к появлению постоянного во времени электрического поля, направленного вдоль оси z, с напряженностью $|E|=j_z\sigma$, где j_z — z-компонента плотности тока.

Используя равенство $j=c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}/4\pi$ и уравнение (13), получаем $E=\sigma^2 H_0\,\langle v_{2x}\rangle/c$.

Величина E для течений в электролитах может иметь значение порядка 10^{-1}—10^{-2} *мкв/см*; например, если удастся создать течение со скоростью 10^2 *см/сек* в растворе KCl с проводимостью ~ 0.1 *ом*$^{-1}\cdot$*см*$^{-1}$ при напряженности магнитного поля $H=3$ *кгс*.

Авторы благодарят Н. А. Роя за полезные замечания.

Поступила 26 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
2. Eckart C. Vortices and streams caused by sound waves. Phys. Rev., 1948, vol. 73, No. 1.