УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Рассматриваются задачи об определении напряжений в изолированных эллипсоидальных жестких включениях, содержащихся в изотропном упругом пространстве, подвергнутом на бесконечности воздействию равномерно распределенных нагрузок. Для включений в виде эллипсоидов вращения построено решение в замкнутом виде.

Ключевые слова: изолированные эллипсоидальные жесткие включения, однородное поле напряжений, сплющенный и вытянутый сфероиды.

В работе [1] доказано, что задача об определении напряжений в изолированных жестких включениях в виде эллипсоидов вращения, находящихся в изотропном упругом пространстве, подвергнутом воздействию равномерно распределенных на бесконечности напряжений, имеет единственное решение. При этом поле напряжений в каждом включении является однородным. В настоящей работе приведены решения указанной задачи для сплющенного и вытянутого сфероидов.

1. Изотропное упругое пространство с изолированными эллипсоидальными жесткими включениями. Изолированными называются такие включения, расстояние между центрами любых двух из которых велико по сравнению с их размерами, поэтому влиянием одного из них на напряженное состояние любого другого можно пренебречь. В данных предположениях решение задачи сводится к определению напряженно-деформированного состояния упругого пространства v с одним включением v^* при заданных на бесконечности равномерно распределенных напряжениях σ_{kl}^∞ $(k, l = 1, 2, 3)$ [1].

В области v справедлив закон Гука $\varepsilon = a : \sigma$, $\sigma = b : \varepsilon$ (σ, ε — тензоры напряжений и деформаций соответственно; a, b — взаимно обратные тензоры упругих податливостей и упругих модулей соответственно).

В работе [1] между напряжениями на бесконечности и в жестком включении v^* установлены следующие зависимости:

$$S : \tilde{\varepsilon}^* = \varepsilon^\infty, \qquad \varepsilon^\infty = a : \sigma^\infty, \qquad \tilde{\varepsilon}^* \equiv a : \sigma^*. \tag{1.1}$$

Здесь S — тензор четвертого ранга (тензор Эшелби).

Для рассматриваемого случая изотропной среды v деформации выражаются через напряжения следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{nn}\delta_{ij}]/E \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

(E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — компоненты единичного тензора; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3).

В системе координат, связанной с осями симметрии эллипсоида v^*, компоненты тензора S в (1.1) принимают вид [1]

$$S_{kkkk} = Qa_k^2 I_{kk} + RI_k, \qquad S_{kkll} = Qa_l^2 I_{kl} - RI_k,$$
$$2S_{klkl} = 2S_{kllk} = Q(a_k^2 + a_l^2)I_{kl} + R(I_k + I_l), \tag{1.3}$$
$$Q = 3/[8\pi(1-\nu)], \qquad R = (1-2\nu)/[8\pi(1-\nu)].$$

Здесь a_k — полуоси эллипсоида; $k, l = 1, 2, 3$ ($k \neq l$); суммирование по k и l не проводится. Остальные компоненты $S_{klmn} = 0$.

Для сплющенного сфероида ($a_1 = a_2 = \alpha$, $a_3 = \delta\alpha$, $\delta < 1$) имеем [1]

$$I_1 = I_2 = I \equiv 2\pi\delta(1-\delta^2)^{-3/2}[\arccos\delta - \delta(1-\delta^2)^{1/2}],$$
$$I_3 = 4\pi - 2I, \qquad I_{11} = I_{22} = 3I_{12} = \frac{3I - 4\pi\delta^2}{4\alpha^2(1-\delta^2)}, \tag{1.4}$$
$$I_{13} = I_{23} = \frac{4\pi - 3I}{3\alpha^2(1-\delta^2)}, \qquad I_{33} = \frac{4\pi(1-3\delta^2) + 6I\delta^2}{3\alpha^2\delta^2(1-\delta^2)},$$

для вытянутого сфероида ($a_1 = \alpha$, $a_2 = a_3 = \delta\alpha$, $\delta < 1$) —

$$I_2 = I_3 = I \equiv 2\pi\delta^{-1}(\delta^{-2}-1)^{-3/2}[\delta^{-1}(\delta^{-2}-1)^{1/2} - \operatorname{arch}\delta^{-1}], \qquad I_1 = 4\pi - 2I,$$
$$I_{11} = \frac{4\pi(3-\delta^2) - 6I}{3\alpha^2(1-\delta^2)}, \quad I_{22} = I_{33} = 3I_{23} = \frac{4\pi - 3I\delta^2}{4\alpha^2\delta^2(1-\delta^2)}, \quad I_{12} = I_{13} = \frac{3I - 4\pi}{3\alpha^2(1-\delta^2)}. \tag{1.5}$$

В [1] показано, что в рассматриваемых случаях жестких включений в виде эллипсоидов вращения матрица размером 6×6, соответствующая тензору S, является невырожденной. Поэтому существует обратная матрица, а следовательно, и обратный тензор, который обозначим через S^{-1} или в покомпонентной записи — S^{-1}_{ijkl}. Тогда напряжения σ^*_{ij} в жестком включении можно выразить через напряжения σ^∞_{ij} на бесконечности.

Действительно, из (1.1) следуют равенства $\tilde\varepsilon^*_{ij} = S^{-1}_{ijkl}\varepsilon^\infty_{kl}$. Подставляя в эти равенства деформации $\tilde\varepsilon^*_{ij}$ и ε^∞_{ij}, выраженные через напряжения σ^*_{ij} и σ^∞_{ij}, получаем

$$\sigma^*_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\sigma^*_{nn}\delta_{ij} = f_{ij}, \qquad f_{ij} \equiv S^{-1}_{ijkl}\Big(\sigma^\infty_{kl} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\sigma^\infty_{nn}\delta_{kl}\Big). \tag{1.6}$$

Проведя в (1.6) свертку по индексам i и j, имеем $\sigma^*_{nn} - [3\nu/(1+\nu)]\sigma^*_{nn} = f_{nn}$. Следовательно, $\sigma^*_{nn} = [(1+\nu)/(1-2\nu)]f_{nn}$. Подставляя σ^*_{nn} в (1.6), находим искомые соотношения

$$\sigma^*_{ij} = f_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,f_{nn}\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.7}$$

2. О матрицах, соответствующих тензорам S и S^{-1}. Представим равенство (1.1) в матричной форме

$$s_{kl}\tilde f^*_l = f^\infty_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6),$$

где $\tilde f^*_k$, f^∞_k — компоненты шестимерных векторов, соответствующих тензорам деформаций $\tilde\varepsilon^*$ и ε^∞; s_{kl} — элементы матрицы размером 6×6 вида $s_{kl} = S_{kkll}$ ($k, l = 1, 2, 3$; по k и l суммирование не проводится), $s_{44} = 2S_{1212}$, $s_{55} = 2S_{1313}$, $s_{66} = 2S_{2323}$; остальные элементы s_{kl} равны нулю.

Как отмечено выше, для эллипсоидов вращения матрица $\|s_{kl}\|$ является невырожденной, т. е. $\det\|s_{kl}\| \neq 0$. Более того, из полученных в [1] результатов следует, что в обоих случаях (сплющенного и вытянутого сфероидов) $\det\|s_{kl}\| > 0$. Поэтому для матрицы $\|s_{kl}\|$

существует обратная матрица $\|c_{kl}\|$, соответствующая тензору S^{-1}. Элементы этой матрицы определяются известными соотношениями [2] и в данном случае имеют вид

$$c_{kl} = d_{lk}/\Delta_0, \tag{2.1}$$

где d_{kl} — алгебраические дополнения элементов s_{kl} матрицы $\|s^0_{kl}\| \equiv \|s_{kl}\|$ $(k, l = 1, 2, 3)$; $\Delta_0 = \det\|s^0_{kl}\|$; $c_{kk} = s^{-1}_{kk}$ ($k = 4, 5, 6$; по k суммирование не проводится); остальные элементы c_{kl} равны нулю.

Из соотношений $s_{11} = s_{22}$, $s_{12} = s_{21}$, $s_{13} = s_{23}$, $s_{31} = s_{32}$, следующих из (1.3), (1.4), для сплющенного сфероида получаем

$$\begin{gathered} d_{11} = d_{22} = s_{11}s_{33} - s_{13}s_{31}, \quad d_{12} = d_{21} = s_{13}s_{31} - s_{12}s_{33}, \\ d_{13} = d_{23} = s_{31}(s_{12} - s_{11}), \quad d_{31} = d_{32} = s_{13}(s_{12} - s_{11}), \quad d_{33} = s^2_{11} - s^2_{12}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Величина Δ_0 определяется по формуле [1]

$$\begin{gathered} 32(1-\nu)^3t^2\Delta_0 = (1+\nu)[3F - 2(1-t) + 4t(1-2\nu)F] \times \\ \times [(3 - 4\nu t)F - 2(1-t) - 2(1-2\nu)tF^2] > 0, \\ t = 1 - \delta^2, \qquad F = I/(2\pi). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Из (1.3), (1.5) следует, что $s_{12} = s_{13}$, $s_{31} = s_{21}$, $s_{32} = s_{23}$, $s_{33} = s_{22}$. Отсюда для вытянутого сфероида получаем

$$\begin{gathered} d_{11} = s^2_{22} - s^2_{23}, \qquad d_{12} = d_{13} = s_{21}(s_{23} - s_{22}), \qquad d_{21} = d_{31} = s_{12}(s_{23} - s_{22}), \\ d_{22} = d_{33} = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}, \qquad d_{23} = d_{32} = s_{12}s_{21} - s_{11}s_{23}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

По аналогии с (2.3) для Δ_0 находим

$$\begin{gathered} 32(1-\nu)^3t^2\Delta_0 = (1+\nu)[2 - 3F(1-t) + 4(1-2\nu)tF] \times \\ \times \{2 + [(3-4\nu)t - 3]F - 2(1-2\nu)tF^2\} > 0, \\ t = 1 - \delta^2, \qquad F = I/(2\pi). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Функции $I = I(\delta)$ из (2.3), (2.5) определены в (1.4), (1.5) соответственно.

Вводя шестимерный вектор напряжений с компонентами $\Sigma_k = \sigma_{kk}$ ($k = 1, 2, 3$; по k суммирование не проводится), $\Sigma_4 = \sigma_{12}$, $\Sigma_5 = \sigma_{13}$, $\Sigma_6 = \sigma_{23}$, из (1.7) получаем равенства, связывающие напряжения Σ^∞_k на бесконечности и Σ^*_k во включении:

$$\Sigma^*_k = c_{kl}\tilde{\Sigma}^\infty_l + \frac{\nu}{1-2\nu}\sum_{n=1}^{3} c_{nl}\tilde{\Sigma}^\infty_l, \qquad \tilde{\Sigma}^\infty_l \equiv \Sigma^\infty_l - \frac{\nu}{1+\nu}I^\infty_\sigma; \tag{2.6}$$

$$I^\infty_\sigma = \Sigma^\infty_1 + \Sigma^\infty_2 + \Sigma^\infty_3 \tag{2.7}$$

($k = 1, 2, 3$; суммирование по l проводится от 1 до 3),

$$\Sigma^*_k = \Sigma^\infty_k/s_{kk} \tag{2.8}$$

($k = 4, 5, 6$; по k суммирование не проводится).

3. Примеры. Из (2.6)–(2.8) следует, что напряжения σ^*_{kl} во включении v^* определяются напряжениями σ^∞_{kl} на бесконечности, геометрией области v^* и зависят от коэффициента Пуассона ν. В частности, при действии одного из касательных напряжений σ^∞_{kl} во включении возникает только одноименное напряжение σ^*_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$; $k \neq l$). Любое из нормальных напряжений σ^∞_{11}, σ^∞_{22} и σ^∞_{33} оказывает влияние только на напряжения σ^*_{11}, σ^*_{22} и σ^*_{33}.

3.1. *Сплющенный сфероид.* Рассмотрим случай сплющенного сфероида, когда величина δ^2 в (1.4) мала по сравнению с единицей. Для элементов матрицы $\|s_{kl}\|$ имеем следующие выражения [3]:

$$\begin{gathered} s_{11} = s_{22} = (13 - 8\nu)\delta_0, \qquad s_{12} = s_{21} = (8\nu - 1)\delta_0, \qquad s_{13} = s_{23} = 4(2\nu - 1)\delta_0, \\ s_{31} = s_{32} = \nu(1-\nu)^{-1} - 4(1 + 4\nu)\delta_0, \qquad s_{33} = 1 - 8(1 - 2\nu)\delta_0, \\ s_{44} = 2(7 - 8\nu)\delta_0, \qquad s_{55} = s_{66} = 1 - 8(2 - \nu)\delta_0, \qquad \delta_0 \equiv \pi\delta/[32(1 - \nu)] < \delta/4. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.2), получаем

$$\begin{gathered} d_{11} = d_{22} = \frac{13 - 17\nu}{1 - \nu}\,\delta_0 - 120(1 - 2\nu)\delta_0^2, \\ d_{12} = d_{21} = \frac{16\nu^2 - 13\nu + 1}{1 - \nu}\,\delta_0 + 8(1 - 2\nu)(1 + 16\nu)\delta_0^2, \\ d_{13} = d_{23} = \frac{2\nu(8\nu - 7)}{1 - \nu}\,\delta_0 - 8(8\nu - 7)(1 + 4\nu)\delta_0^2, \\ d_{31} = d_{32} = 8(1 - 2\nu)(7 - 8\nu)\delta_0^2, \qquad d_{33} = 24(7 - 8\nu)\delta_0^2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Для определителя Δ_0 в (2.3) с учетом следующего из (1.4) соотношения $F \equiv I/(2\pi) = \pi\delta/2 - 2\delta^2 + o(\delta^2)$ и приближенного равенства $1 - \delta^2 \approx 1$ имеем

$$\Delta_0 = 8(1 + \nu)(1 - \nu)^{-1}(7 - 8\nu)(3 - 4\nu)\delta^2 + o(\delta^2). \tag{3.3}$$

При $\delta_0 \to 0$ из (2.1), (3.2), (3.3) получаем

$$\begin{gathered} c_{11} = c_{22} = \frac{d_{11}}{\Delta_0} \sim \frac{13 - 17\nu}{8f\delta_0}, \qquad c_{12} = c_{21} = \frac{d_{21}}{\Delta_0} \sim \frac{16\nu^2 - 13\nu + 1}{8f\delta_0}, \\ c_{13} = c_{23} = \frac{d_{31}}{\Delta_0} \sim \frac{(1 - 2\nu)(1 - \nu)}{(1 + \nu)(3 - 4\nu)}, \qquad c_{31} = c_{32} = \frac{d_{13}}{\Delta_0} \sim -\frac{\nu}{4(1 + \nu)(3 - 4\nu)\delta_0}, \\ c_{33} = \frac{d_{33}}{\Delta_0} \sim \frac{3(1 - \nu)}{(1 + \nu)(3 - 4\nu)}, \qquad f \equiv (1 + \nu)(7 - 8\nu)(3 - 4\nu). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) и выражения для s_{kk} ($k = 4, 5, 6$) из (3.1) в (2.6)–(2.8), находим

$$\begin{gathered} \Sigma_1^* = \sigma_{11}^* \sim \frac{(13 - 16\nu)A_1 + A_2}{8f\delta_0}, \qquad \Sigma_2^* = \sigma_{22}^* \sim \frac{A_1 + (13 - 16\nu)A_2}{8f\delta_0}, \\ \Sigma_3^* = \sigma_{33}^* \sim \frac{3(1 - \nu)A_3}{(1 + \nu)^2(3 - 4\nu)}, \qquad A_1 \equiv \sigma_{11}^\infty - \nu(\sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty), \\ A_2 \equiv \sigma_{22}^\infty - \nu(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{33}^\infty), \qquad A_3 \equiv \sigma_{33}^\infty - \nu(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty), \\ \Sigma_4^* = \sigma_{12}^* \sim \frac{\sigma_{12}^\infty}{2(7 - 8\nu)\delta_0}, \qquad \Sigma_5^* = \sigma_{13}^* \sim \sigma_{13}^\infty, \qquad \Sigma_6^* = \sigma_{23}^* \sim \sigma_{23}^\infty. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Пусть $\sigma_{33}^\infty = \sigma \neq 0$, а остальные напряжения σ_{kl}^∞ равны нулю. Тогда согласно (3.5) $\sigma_{11}^* = \sigma_{22}^* \sim -\nu\sigma/[4(1 + \nu)(3 - 4\nu)\delta_0]$, следовательно, $\operatorname{sign}\sigma_{11}^* = -\operatorname{sign}\sigma$.

Если $\sigma_{11}^\infty = \sigma \neq 0$, а остальные напряжения $\sigma_{kl}^\infty = 0$, то $\sigma_{11}^* \sim (13 - 17\nu)\sigma/(8f\delta_0)$ и $\operatorname{sign}\sigma_{11}^* = \operatorname{sign}\sigma$, а $\sigma_{22}^* \sim f_1\sigma/(8f\delta_0)$, где $f_1(\nu) = 16\nu^2 - 13\nu + 1$. Заметим, что если коэффициент ν находится в интервале $\nu_1 < \nu < 0{,}5$, где $\nu_1 = (13 + \sqrt{105})/32 \approx 0{,}086$, то $f_1(\nu) < 0$ и $\operatorname{sign}\sigma_{22}^* = -\operatorname{sign}\sigma$. Если $0 < \nu < \nu_1$, то $\operatorname{sign}\sigma_{22}^* = \operatorname{sign}\sigma$.

Случай $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma \neq 0$ аналогичен случаю $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma \neq 0$, при этом напряжение σ_{11}^{*} нужно заменить на σ_{22}^{*}, а σ_{22}^{*} — на σ_{11}^{*}.

3.2. *Вытянутый сфероид.* Рассмотрим случай вытянутого сфероида, когда величина δ^2 в (1.5) мала по сравнению с единицей. Для элементов матрицы $\|s_{kl}\|$ имеем [3]

$$s_{11} = \frac{2-\nu}{1-\nu}\,\delta_1, \qquad s_{12} = s_{13} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\,\delta_1, \qquad s_{21} = s_{31} = \frac{\nu-(1+\nu)\delta_1}{2(1-\nu)},$$

$$s_{22} = s_{33} = \frac{5-4\nu-2(1-2\nu)\delta_1}{8(1-\nu)}, \qquad s_{23} = s_{32} = \frac{4\nu-1+2(1-2\nu)\delta_1}{8(1-\nu)}, \tag{3.6}$$

$$s_{44} = s_{55} = \frac{1}{2} - \frac{(1+\nu)\delta_1}{2(1-\nu)}, \qquad s_{66} = \frac{3-4\nu-2(1-2\nu)\delta_1}{4(1-\nu)}, \qquad \delta_1 \equiv -\delta^2 \ln\Big(\frac{\delta}{2}\Big).$$

Подставляя (3.6) в (2.4), получаем

$$d_{11} = \frac{3-4\nu-2(1-2\nu)\delta_1}{8(1-\nu)^2}, \qquad d_{12} = d_{13} = -\frac{\nu-(1+\nu)\delta_1}{8(1-\nu)^2}\,[3-4\nu-2(1-2\nu)\delta_1],$$

$$d_{21} = d_{31} = \frac{1-2\nu}{8(1-\nu)^2}\,[3-4\nu-2(1-2\nu)\delta_1]\delta_1,$$

$$d_{22} = d_{33} = \frac{\delta_1}{8(1-\nu)^2}\,[10-11\nu-6(1-2\nu)\delta_1], \tag{3.7}$$

$$d_{23} = d_{32} = \frac{\delta_1}{8(1-\nu)^2}\,[8\nu^2-11\nu+2+2(1-2\nu)^2\delta_1].$$

Из (1.5) следует, что с точностью до малых порядка δ^2 величина $I = 2\pi[1+\delta^2 \ln(\delta/2)]$, т. е. $F \equiv I/(2\pi) = 1-\delta_1$. Поэтому из (2.5) с учетом приближенного равенства $t \approx 1$ для определителя Δ_0 находим

$$8(1-\nu)^3\Delta_0 = (1+\nu)[2(1-\nu)(3-4\nu)\delta_1 - (1-2\nu)(7-8\nu)\delta_1^2] + o(\delta_1^2). \tag{3.8}$$

Элементы обратной матрицы $\|c_{kl}\|$ определяются из (2.1), (3.7), (3.8). Приведем только аналогичные (3.4) асимптотические соотношения при $\delta_1 \to 0$:

$$c_{11} \sim \frac{1}{2(1+\nu)\delta_1}, \qquad c_{12} = c_{13} \sim \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)},$$

$$c_{21} = c_{31} \sim -\frac{\nu}{2(1+\nu)\delta_1}, \qquad c_{22} = c_{33} \sim \frac{10-11\nu}{2(1+\nu)(3-4\nu)}, \tag{3.9}$$

$$c_{23} = c_{32} \sim \frac{8\nu^2-11\nu+2}{2(1+\nu)(3-4\nu)}.$$

Подставляя (3.9) и выражения для s_{kk} $(k = 4,5,6)$ из (3.6) в (2.6)–(2.8), получаем

$$\Sigma_1^* = \sigma_{11}^* \sim \frac{A_1}{2(1+\nu)\delta_1}, \qquad \Sigma_2^* = \sigma_{22}^* \sim \frac{(10-11\nu)A_2 + (8\nu^2-11\nu+2)A_3}{2(1+\nu)^2(3-4\nu)},$$

$$\Sigma_3^* = \sigma_{33}^* \sim \frac{(8\nu^2-11\nu+2)A_2 + (10-11\nu)A_3}{2(1+\nu)^2(3-4\nu)},$$

$$\Sigma_4^* = \sigma_{12}^* \sim 2\sigma_{12}^{\infty}, \qquad \Sigma_5^* = \sigma_{13}^* \sim 2\sigma_{13}^{\infty}, \qquad \Sigma_6^* = \sigma_{23}^* \sim \frac{4(1-\nu)}{3-4\nu}\,\sigma_{23}^{\infty}.$$

Величины A_1, A_2, A_3 определены в (3.5).

Как отмечено выше, в работе [1] на основе утверждения о существовании обратного тензора Эшелби доказана единственность решения задачи об определении напряжений в изолированных жестких включениях в виде эллипсоидов вращения, находящихся в упругом пространстве, при равномерно распределенных на бесконечности нагрузках. В данной работе получены компоненты этого тензора, что позволило построить решение указанной задачи в замкнутом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** Об определении напряжений в эллипсоидальных жестких включениях // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 3. С. 107–111.
2. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988.
3. **Цвелодуб И. Ю.** Эллипсоидальное физически нелинейное включение в линейно-упругой среде // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 1. С. 84–91.

Поступила в редакцию 13/IV 2010 г.