

УДК 535.31 : 681.7.001

## РЕФРАКТОМЕТРИЯ ОПТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ РЕГИСТРАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ КАУСТИК ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТРУКТУРИРОВАННОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ\*

И. Л. Расковская

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»,  
111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14  
E-mail: Raskovskal@mail.ru*

Рассмотрены особенности рефрактометрии оптически неоднородных сред в условиях существенной рефракции зондирующих пучков, обусловленной значительными градиентами показателя преломления и протяжённостью исследуемой среды. Для указанных условий разработаны волновые и лучевые модели рефракции лазерных пучков при наличии каустик. Обоснованы преимущества использования структурированных пучков для регистрации каустик с целью количественной диагностики неоднородностей показателя преломления. На основе разработанных моделей предложены возможные методы решения обратной задачи рефракции и реконструкции значений показателя преломления в сечениях неоднородности.

*Ключевые слова:* оптически неоднородная среда, рефракция, лазерный пучок, лучевые методы, волновые методы, обратные задачи рефракции.

**Введение.** Классические методы рефрактометрии [1] адаптированы главным образом для измерения показателя преломления однородных сред или локальных его значений в избранных малых областях среды. Для обнаружения и визуализации градиентных оптических неоднородностей в прозрачных средах, как правило, используются теневые методы [2, 3], позволяющие в целом получить представление о форме и динамике наблюдаемого объекта. Однако для количественной диагностики параметров среды теневые изображения градиентных неоднородностей в расфокусированном лазерном пучке пригодны только при слабой рефракции, когда пространственное изменение интенсивности изображения линейно связано с градиентом показателя преломления. Для сильной рефракции, особенно при наличии каустик, количественная диагностика таким методом затруднена. В этом случае целесообразно проводить измерения с использованием зондирования среды структурированным лазерным излучением [4], что позволяет регистрировать не изменение интенсивности, а относительное смещение структурных элементов пучка [5, 6].

Данная методика в условиях слабой рефракции применяется в спекл-рефрактометрии [7] и теневом фоновом методе [8]. Однако фоновый метод и спекл-экраны являются пассивными элементами, и рефракция лучей в среде не визуализируется. Регистрация траекторий лучей и каустик в среде позволяет осуществлять диагностику изменения показателя преломления в сечениях неоднородности [6, 9, 10] и в ряде случаев реконструировать значения показателя преломления.

Цель данной работы — построение волновых и лучевых моделей распространения структурированных лазерных пучков в прозрачных неоднородных средах в условиях существенной рефракции при наличии каустик. На основе созданных моделей рассматриваются возможные подходы к решению обратной задачи рефракции и реконструкции значений

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-08-00948-а).

показателя преломления в сечениях неоднородности при использовании геометрических параметров проекций каустических поверхностей.

**Волновая модель прямолинейных изображений в условиях существенной рефракции.** Волновое поле лазерного пучка с известным значением длины волны  $\lambda$  и соответствующим волновым числом  $k$ , прошедшего через оптическую неоднородность с заданным непрерывным изменением показателя преломления  $n = n(x, y, z)$ , может быть описано на основе интеграла Кирхгофа или с помощью спектрального подхода [11]. В работе [12] отмечено, что в условиях сильной рефракции при расчёте волновых моделей рефрактограмм (прямотеневых изображений неоднородности в прошедшем структурированном излучении) в областях геометрической оптики и дифракции Френеля возникают проблемы, связанные с требованием значительных вычислительных ресурсов из-за наличия быстро осциллирующих функций под знаком интеграла Кирхгофа и существенного расширения пространственного спектра пучка. Физически это обусловлено быстрым изменением фазы волнового поля в сечении пучка на выходе из среды и нарушением его параксиальности из-за сложной лучевой картины (рис. 1, *a*). На рис. 1, *a, b* координаты  $\xi, \eta$  используются в плоскости выхода лучей из среды и фактически являются параметрами лучей. Плоскость наблюдения задана координатными осями  $X, Y$ . Нарушение параксиальности пучка требует модификации традиционно применяемых асимптотических методов нахождения поля в области геометрической оптики [13].

В данной ситуации решением служит подход, основанный на представлении поля зондирующего волнового пучка в виде суммы полей парциальных пучков и локальном описании волнового поля в сечении неоднородной среды. Локальное поле парциального пучка является медленно меняющимся в пределах заданной малой области сечения неоднородности, и здесь может быть использован метод асимптотического вычисления локального поля в области наблюдения (на экране). В зоне геометрической оптики вклад в локальное поле в области наблюдения дают только несколько парциальных пучков, причём их количество определяется числом геометрикооптических лучей  $j$ , приходящих в данную точку наблюдения (см. рис. 1, *b*). В задачах диагностики неоднородных жидких сред [14] при моделировании прямолинейных изображений фазовых объектов, соответствующих неоднородностям физических параметров в прозрачных средах, значение  $j$ , как правило, не превышает 3.

Рассмотрим наиболее наглядный пример одномерной неоднородности, когда зондируется слоистая среда с показателем преломления  $n(\xi)$ . В этом случае волновое поле пучка  $A(x, y)$  в приближении геометрической оптики с учётом многолучёвости представляет собой сумму волновых полей, соответствующих уравнениям переноса для лучей, пришедших

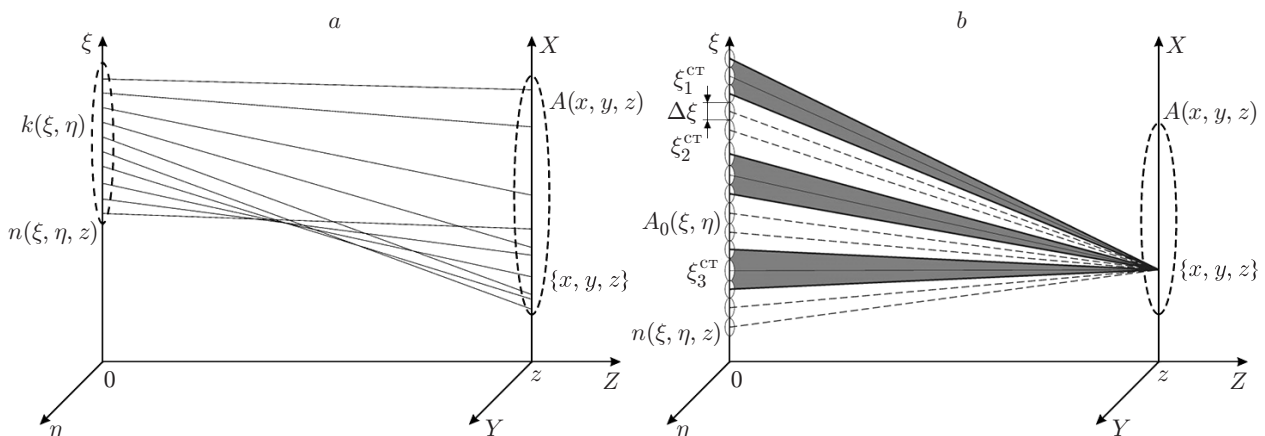


Рис. 1. Геометрические параметры задачи

в данную точку наблюдения с координатами  $(x, y)$ :

$$A(x, y, z) = \sum_{j=1}^J \frac{A_0(\xi_j(x), y)}{\sqrt{1 + z \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2}}} \exp \left[ ik \left[ z \sqrt{1 + \left( \frac{d\Psi}{d\xi} \right)^2} + \Psi(\xi_j(x)) \right] \right], \quad (1)$$

где  $\Psi = \Psi(\xi, \eta)$  — эйконал непосредственно на выходе из среды, причём значения эйконала и его производных вычисляются в наборе стационарных точек  $\xi_j^{\text{CT}}$ , соответствующих точкам выхода лучей, пришедших в точку наблюдения с координатой  $x$ ; координата  $z$  задаёт расстояние от плоскости выхода лучей из среды до плоскости наблюдения (экрана). Практически решается следующая физическая задача: задаются координаты  $x, y, z$ , т. е. точка наблюдения, в которой надо найти значение поля пучка; на основании уравнений геометрической оптики (в данном примере одномерная задача) определяются точки выхода из среды  $\xi_j^{\text{CT}}(x)$  геометрических лучей, пришедших в точку наблюдения; вычисляются значения исходного волнового поля  $A_0$  в точках  $\xi_j^{\text{CT}}(x)$  и эти значения суммируются, если имеется несколько лучей, пришедших в точку наблюдения. Выражение (1) корректно отображает волновое поле, если расстояние между стационарными точками не меньше, чем характерный размер первой зоны Френеля  $\Delta\xi = \sqrt{\lambda z}$ . В этом случае относительная погрешность нахождения интенсивности поля прямоотеневое изображение составляет не более 10 % [13], за исключением области каустик. Положение каустики при заданном виде неоднородности определяется из условия

$$1 + z_s \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} = 0. \quad (2)$$

При экспериментальном наблюдении каустик результаты количественной регистрации геометрических параметров каустических поверхностей учитываются при решении обратной задачи рефракции. Здесь целесообразно использовать не расфокусированные пучки, традиционно применяемые для прямоотеневой визуализации неоднородностей, а структурированное лазерное излучение. В этом случае проекция каустической поверхности может быть обнаружена не по максимуму интенсивности изображения, а в результате регистрации особых точек изображения сечения структурированного пучка.

Рис. 2, *a* демонстрирует рассчитанное в области трёхлучёвости на основе (1) поле цилиндрически структурированного пучка, прошедшего через горизонтальный слой с переменным (линейно зависящим от горизонтальной координаты  $y$ ) градиентом показателя преломления (вектор градиента направлен в сторону отрицательных значений оси  $OX$ ). Как показывает анализ выражения (1), каустики в случае структурированного излучения представляют собой огибающие точек экстремумов, возникающих при рефракционном искажении структурных элементов пучка. Для сравнения на рис. 2, *b* дано изображение сечения того же пучка в отсутствие каустик в случае горизонтального слоя с постоянным градиентом показателя преломления, при этом экстремумы на изображении не наблюдаются. Абсолютная погрешность при экспериментальном нахождении локализации экстремумов структурированного излучения в области геометрической оптики составляет 1–2 мм, что и определяет погрешность количественной регистрации положения каустик.

Структура изображений, рассчитанных на основе (1), полностью адекватна наблюдаемым прямоотеневым картинам при соответствующих условиях экспериментов [5, 6], что позволяет использовать (1) для решения обратных задач рефракции исходя из экспериментальных данных. Далее рассмотрен один из возможных подходов к решению обратной задачи рефракции с учётом информации о каустиках.

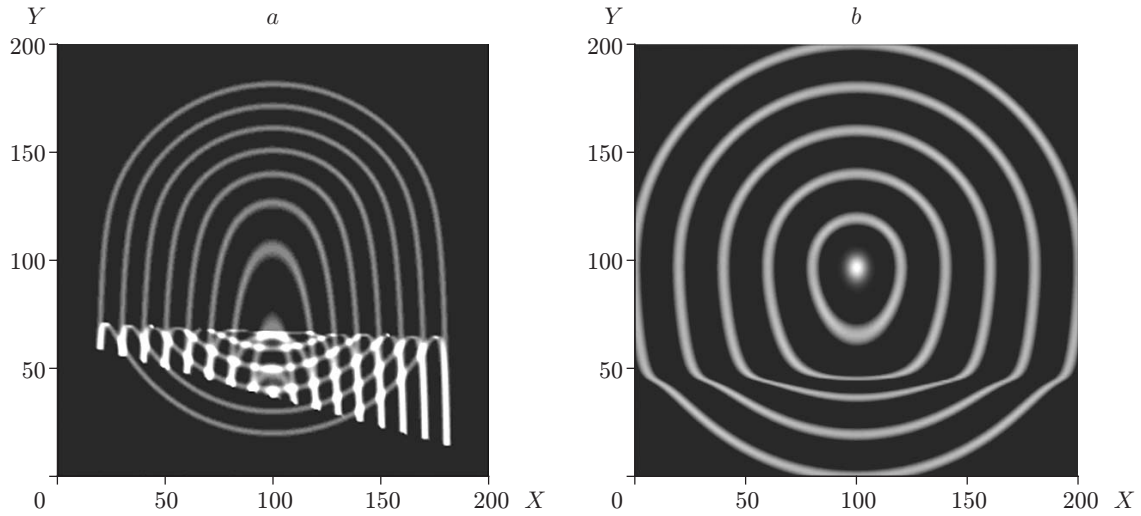


Рис. 2. Цилиндрически структурированный пучок: *a* — при наличии каустик (20 усл. ед. на осях координат соответствуют 10 мм); *b* — в отсутствие каустик (20 усл. ед. — 5 мм)

**Восстановление градиента показателя преломления слоистой неоднородности на основе заданных параметров каустики в плоскости распространения  $XOZ$ .** Постановка задачи обусловлена результатами экспериментов [10, 14], в которых с помощью структурированного излучения или в рассеянном свете в плоскости распространения визуализировались каустики в стратифицированной жидкости и на выходе из среды.

Пусть показатель преломления  $n(\xi)$  зависит от одной переменной и определяется зависимостью, представленной на рис. 3, *a*. Каустика внутри среды, соответствующая данной зависимости, изображена на рис. 3, *b*. Здесь же показаны лучи, касающиеся разных ветвей каустики. Пунктиром обозначен луч, касающийся каустики в области острия. Будем предполагать, что зависимость показателя преломления  $n(\xi)$  априори неизвестна, а известно только уравнение каустики  $x_c(z)$ . Требуется восстановить величину градиента показателя преломления  $(dn)/(d\xi)$  в слоистой среде. Из результатов работы [9] следует, что в действительности это возможно, если известны уравнения семейства лучей в данной среде. Таким образом, задача может быть сведена к нахождению уравнений семейства лучевых траекторий по заданной каустике.

При условии, что зондирующее излучение входит в неоднородность горизонтально (перпендикулярно направлению градиента показателя преломления), уравнение лучевых траекторий имеет вид

$$z = \int_x^\xi \frac{n(\xi)dx}{\sqrt{n^2(x) - n^2(\xi)}}, \quad (3)$$

где  $\xi$  — параметр луча (точка выхода при  $z = 0$ );  $x$  и  $z$  — текущие координаты.

Неудобство представления (3) заключается в том, что текущая координата  $x$  не выражается в явном виде через  $z$  и  $\xi$ . Воспользуемся тем фактом, что при горизонтальном зондировании точки поворота лучевых траекторий [15] находятся непосредственно на входе в среду при  $z = 0$ , и правая часть выражения (3) может быть разложена в ряд в окрест-

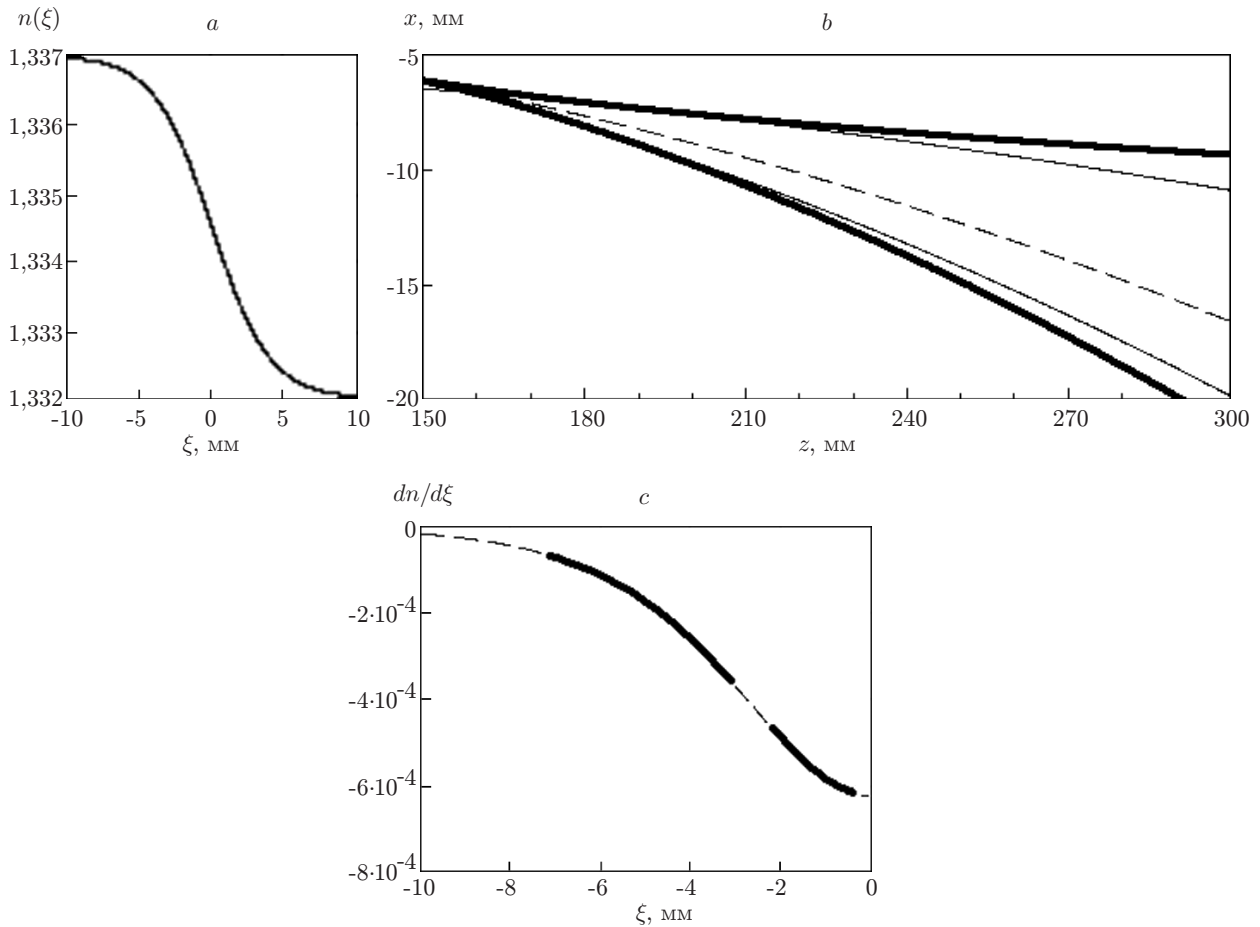


Рис. 3. Восстановление величины градиента показателя преломления в слое по положению каустики в плоскости распространения пучка: *a* — зависимость показателя преломления в слое от координаты  $y$ ; *b* — вид каустики в плоскости распространения пучка; *c* — восстановленные значения градиента показателя преломления (жирная линия) в сравнении с исходно заданными значениями (пунктирная линия)

ности точки поворота  $x = \xi$ . Тогда уравнение луча запишем в виде

$$x = \xi + \frac{1}{n(\xi)} \frac{dn}{d\xi} \frac{z^2}{2}. \quad (4)$$

Относительная погрешность аппроксимации траекторий (3) выражением (4) в условиях лабораторных экспериментов, описанных в [10, 14], при дистанциях в неоднородности порядка нескольких сантиметров не превышает 10 % в области максимального отклонения луча.

Воспользуемся тем фактом, что каустика является огибающей семейства лучей. Поэтому в некоторой точке  $x(z) = x_c(z)$  касания луча и каустики должно выполняться соотношение, вытекающее из условия совпадения касательных:

$$\frac{1}{n(\xi)} \frac{dn}{d\xi} z = \frac{dx_c}{dz}. \quad (5)$$

Правая часть в (5) известна, так как по условию известно уравнение каустики. Отсюда

известно отношение  $\frac{1}{n(\xi)} \frac{dn}{d\xi}$  как функция  $z$ . Будем считать  $z$  параметром и найдём  $\xi(z)$  как решение системы уравнений (4) и (5):

$$\xi(z) = x_c(z) - \frac{dx_c}{dz} \frac{z}{2}. \quad (6)$$

Полагая, что абсолютные значения показателя преломления в неоднородности меняются незначительно, подставим в (5)  $n(\xi) = n_0$ , где  $n_0$  — показатель преломления невозмущённой среды. Например, в эксперименте с солевой стратификацией в воде [10]  $n_0 = 1,332$ . Тогда величина градиента показателя преломления из (5) тоже может быть определена как функция от  $z$ :

$$\frac{dn}{d\xi} = n_0 \frac{dx_c(z)}{z dz}. \quad (7)$$

Таким образом, уравнения (6) и (7) представляют параметрическую зависимость  $(dn)/(d\xi)$  от  $\xi$ , т. е. зависимость величины градиента показателя преломления от координаты в слоистой неоднородности. Аналогичный подход используется при восстановлении показателя преломления плоского слоя с помощью каустик, наблюдаемых вне неоднородной среды, поскольку траектории лучей здесь заведомо являются прямыми линиями и могут быть представлены в явном виде. Восстановленная на основе (6) и (7) зависимость величины градиента показателя преломления в неоднородном слое показана на рис. 3, с в сравнении с исходно известной зависимостью. Зависимость восстанавливается «кусочно» относительно области наблюдения каустики, разрыв присутствует в области, соответствующей её острию, что связано с ограничениями алгоритма.

**Заключение.** В результате проведённого в данной работе исследования получено аналитическое выражение, позволяющее моделировать прямотеневые изображения градиентных неоднородностей в области геометрической оптики при условиях существенной рефракции. С помощью программной реализации алгоритма моделирования можно на несколько порядков сократить требуемое время вычисления интенсивности поля в плоскости наблюдения по сравнению с расчётом на основе непосредственного использования интеграла Кирхгофа, что открывает возможности корреляционной прямотеневой диагностики динамических неоднородностей среды в режиме реального времени. Результаты анализа рефракции структурированных лазерных пучков по данным моделирования позволяют сделать вывод, что использование пучков этого класса оптимально адаптировано для визуализации и количественной регистрации каустик.

С учётом лучевого подхода разработана методика восстановления значений градиента показателя преломления в слоистых средах, основанная на применении количественных данных о положении и форме каустики в плоскости распространения. Результаты численного эксперимента, параметры которого соответствуют условиям проводимых лабораторных исследований в стратифицированной жидкости, подтверждают возможность реконструкции параметров неоднородности с контролируемой погрешностью. Методика аппроксимации лучевых траекторий в окрестности точек поворота может быть аналогично реализована при восстановлении градиентов показателя преломления в цилиндрических и сферических неоднородностях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иоффе Б. В.** Рефрактометрические методы химии. Л.: Химия, 1983. 352 с.

2. **Белозеров А. Ф.** Оптические методы визуализации газовых потоков. Казань: Изд-во Казанск. гос. техн. ун-та, 2007. 747 с.
3. **Дубнищев Ю. Н., Арбузов В. А., Белоусов П. П., Белоусов П. Я.** Оптические методы исследования потоков. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2003. 418 с.
4. **Дифракционная компьютерная оптика** /Под ред. В. А. Соффера. М.: Физматлит, 2007. 736 с.
5. **Евтихиева О. А., Расковская И. Л., Ринкевичюс Б. С.** Лазерная рефрактография. М.: Физматлит, 2008. 176 с.
6. **Есин М. В., Расковская И. Л., Ринкевичюс Б. С., Толкачев А. В.** Трёхмерные рефракционные изображения в лазерных измерительных технологиях // Автометрия. 2012. 48, № 3. С. 3–12.
7. **Спекл-интерферометрия** газовых потоков /Под ред. Н. А. Фомина. Минск: Наука и техника, 1989. 166 с.
8. **Скорнякова Н. М.** Теневой фоновый метод и его применения // Современные оптические методы исследования потоков /Под ред. Б. С. Ринкевичюса. М.: Изд-во Оверлей, 2011. С. 93–106.
9. **Расковская И. Л.** Лазерная рефракционная томография фазовых объектов // Квантовая электроника. 2013. 43, № 6. С. 554–562.
10. **Ведяшкина А. В.** Компьютерная визуализация динамики распространения лазерного пучка в оптически неоднородной среде // Тр. XII Междунар. науч.-техн. конф. «Оптические методы исследования потоков». М.: НИУ «МЭИ», 2013. [CD-ROM. ISBN 978-5-91940-663-1].
11. **Дубнищев Ю. Н.** Теория и преобразование сигналов в оптических системах: Учеб. пособие. С.-Пб.: Изд-во «Лань», 2011. 368 с.
12. **Расковская И. Л.** Волновые методы моделирования рефрактограмм для диагностики градиентных неоднородностей // Автометрия. 2012. 48, № 3. С. 54–60.
13. **Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.** Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
14. **Евтихиева О. А., Расковская И. Л., Ринкевичюс Б. С., Толкачев А. В.** Исследование физических процессов в жидкости методом лазерной рефрактографии // Тр. XII Междунар. науч.-техн. конф. «Оптические методы исследования потоков». М.: НИУ «МЭИ», 2013. [CD-ROM. ISBN 978-5-91940-663-1].
15. **Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.

*Поступила в редакцию 14 декабря 2013 г.*

---