

УДК 539.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СГЛАЖИВАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛАХ

А. Л. Свистков, С. Е. Евлампиева

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

При переходе от структурного к макроскопическому моделированию напряженно-деформированного состояния изделия из композитного материала с учетом конечных деформаций используется сглаживающий оператор осреднения. С помощью интегрального оператора построена модель, в которой макроскопические законы сохранения энергии и массы и уравнение движения имеют обычный вид, используемый при описании процессов в однородных материалах. Рассмотрен пример вычисления макроскопических параметров в системе, состоящей из ансамбля включений в бесконечной матрице.

Ключевые слова: интегральный оператор, осреднение, макроскопические параметры, структурно-неоднородные материалы.

Введение. Переход от моделирования свойств среды на структурном уровне к моделированию свойств на макроскопическом уровне можно осуществлять с использованием гипотезы макроскопической определимости (когда каждой точке изделия ставится в соответствие композитный образец большого размера, находящийся в макроскопически однородном состоянии). К трудностям использования такого подхода при построении макроскопической модели относятся следующие. Операция осреднения параметров состояния среды (без подробного анализа результатов осреднения определяющих уравнений в макроскопически неоднородном состоянии материала) не позволяет установить, корректно ли вводятся понятия более высокого уровня, не нарушаются ли законы сохранения при определении макроскопических величин. Трудно установить, какую деформационную меру и какой тензор напряжений (Коши, Пиола, Кирхгофа и т. д.) следует осреднять.

Использование операторного метода для перехода от определяющих уравнений структурного уровня к макроскопическим определяющим уравнениям позволяет проводить анализ свойств как самого оператора, так и макроскопической модели, получаемой в результате его применения. При таком подходе речь идет не о правильной формулировке гипотезы (выборе способа вычисления макросвойств и вида макроскопических уравнений), а об анализе получаемой макроскопической модели. Интегральные операторы осреднения определяющих уравнений среды неоднократно использовались для описания макроскопических процессов в многокомпонентных системах [1–4].

В настоящее время предложены различные теории интегральных операторов и исследованы возможные области их применимости. Показано, что вейвлет-анализ [5, 6] является эффективным средством фильтрации изображений с целью выделения структур заданного масштабного уровня. С использованием метода резольвентно-точечного воспроизведения [7–10] можно построить эффективные бессеточные алгоритмы решения краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-96404) и Департамента образования и науки Пермской области.

В данной работе предлагается использовать интегральный оператор осреднения с плавно меняющимся дифференцируемым ядром. С его помощью можно получать гладкие макроскопические образы полей структурных параметров состояния материала. Ниже приведен алгоритм исследования осредненных свойств среды. Вначале выясняется, почему та или иная сглаженная величина может называться макроскопической и будет ли она корректно использоваться в макроскопических законах сохранения энергии и массы и уравнениях движения. Затем проверяется, можно ли между сглаженными параметрами установить функциональные связи. Если такие связи существуют, то сглаженные параметры состояния или их комбинации следует назвать макроскопическими параметрами состояния, а функциональные связи — макроскопическими свойствами среды.

Оператор вычисления макроскопических параметров состояния материала. Оператором вычисления макроскопической характеристики $\hat{a}(t, \hat{\mathbf{x}})$ композитного материала в момент времени t в точке пространства $\hat{\mathbf{x}}$ назовем оператор, ставящий в соответствие функции состояния на структурном уровне $a(t, \mathbf{x})$ значение $\hat{a}(t, \hat{\mathbf{x}})$ с помощью отображения

$$\hat{a}(t, \hat{\mathbf{x}}) = \int_{V-S} a(t, \mathbf{x}) \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) dV.$$

Здесь V — объем евклидова пространства, точки которого определяются радиус-вектором \mathbf{x} ; $\hat{\mathbf{x}}$ — радиус-вектор точки пространства, для которой определяется значение макроскопической величины. Полагается, что ядро интеграла обращается в нуль при удалении от точки $\hat{\mathbf{x}}$ на расстояние, превышающее значение a_Φ , и является непрерывной дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условию нормировки $\int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) dV = 1$

и требованию независимости от ориентации базисных векторов в пространстве. При интегрировании по объему V из области интегрирования исключены точки границы раздела фаз S структурно-неоднородной среды, в которых значение подынтегральной функции $a(t, \mathbf{x})$ однозначно не определено. При подходе точки к границе раздела фаз с разных сторон для функции $a(t, \mathbf{x})$ получаются разные предельные значения.

Из сформулированного выше вида ядра Φ оператора вычисления макроскопической характеристики композитного материала следует равенство

$$\nabla \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = -\hat{\nabla} \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}), \quad (1)$$

где операторы ∇ , $\hat{\nabla}$ определяются выражениями

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \hat{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i},$$

\mathbf{i}_i — базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат; x^i , \hat{x}^i — координаты векторов \mathbf{x} и $\hat{\mathbf{x}}$ в прямоугольной декартовой системе координат.

Можно показать, что равенство нулю ядра Φ на удалении от точки $\hat{\mathbf{x}}$ и его непрерывность означают справедливость условия

$$\int_{V-S} b \Phi \nabla \cdot \mathbf{c} dV = - \int_{V-S} \mathbf{c} \cdot \nabla (b \Phi) dV + \int_S \Phi \mathbf{n} \cdot (b \mathbf{c} - \bar{b} \bar{\mathbf{c}}) dS, \quad (2)$$

где $b = b(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t, \mathbf{x})$ — кусочно-непрерывные кусочно-гладкие скалярная и векторная функции; $\Phi = \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$. Интегрирование по поверхности S означает вычисление интеграла по всем внутренним поверхностям изделия. Черта над символами означает, что величины

берутся на границе раздела со стороны фазы, для которой нормаль \mathbf{n} к поверхности S является внутренней. Отсутствие черты над параметрами означает, что их значения на границе раздела берутся со стороны фазы, для которой нормаль \mathbf{n} является внешней.

Физический смысл оператора вычисления макроскопических характеристик сводится к пространственному осреднению структурного параметра с заданным весовым коэффициентом. Значение этого коэффициента зависит от расстояния между точкой вычисления подинтегральной функции и точкой, для которой определяется значение макроскопического параметра. Непрерывность и дифференцируемость функции Φ необходима для того, чтобы макроскопические характеристики композитного материала в результате действия оператора оказались непрерывными и дифференцируемыми.

Макроскопический закон сохранения энергии. Применим оператор вычисления макроскопических характеристик композитного материала к закону сохранения энергии, сформулированному на структурном уровне в актуальной конфигурации:

$$\int_{V-S} \Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) + \nabla \cdot \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot (T \cdot \mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (3)$$

Здесь ρ — плотность материала; e — массовая плотность внутренней энергии; \mathbf{v} — скорость; T — тензор напряжений Коши. В дальнейшем параметры состояния ρ , e , \mathbf{v} , T рассматриваются как функции аргументов t и \mathbf{x} (используется актуальная конфигурация). Если для ядра Φ не указана его зависимость от аргумента, то подразумевается, что ядро оператора представлено в виде функции $\Phi = \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$.

В выражении (3) используются внутренние макроскопические точки изделия, т. е. точки $\hat{\mathbf{x}}$, отстоящие от внешней границы изделия на расстояние, большее a_Φ . Поэтому при вычислении макроскопических параметров состояния среды влияние границ изделия не учитывается. Они расположены достаточно далеко от рассматриваемой макроскопической точки, в которой ядро интегрального оператора Φ имеет нулевое значение.

Используя независимость ядра оператора Φ от времени и свойство (2), получаем

$$\begin{aligned} \int_{V-S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) \right) dV - \int_{V-S} \nabla \Phi \cdot \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - T \cdot \mathbf{v} \right) dV + \\ + \int_S \Phi \mathbf{n} \cdot \left((\rho e \mathbf{v} - \bar{\rho} \bar{e} \bar{\mathbf{v}}) + \frac{1}{2} (\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - \bar{\rho}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}}) - (T \cdot \mathbf{v} - \bar{T} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \right) dS = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Производная по времени от объемного интеграла, в области интегрирования которого находятся поверхности со скачком подинтегральной функции, определяется с помощью следующего выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) dV \right) = \int_{V-S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) \right) dV + \\ + \int_S \Phi \left((\rho e - \bar{\rho} \bar{e}) + \frac{1}{2} (\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \bar{\rho}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}})) \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^s dS. \end{aligned} \quad (5)$$

Изменение во времени объемного интеграла от кусочно-непрерывной функции равно сумме объемного интеграла от производной по времени подинтегральной функции и интегралов по поверхностям разрыва функции с учетом величины скачка и скорости движения поверхностей разрыва в пространстве. При этом в записи уравнения учтено, что на достаточном расстоянии от точки $\hat{\mathbf{x}}$ в объеме V подинтегральная функция равна нулю.

Будем рассматривать композитные материалы, в которых связующее имеет жесткую связь с наполнителем. Это означает, что скорость движения точек внутренних поверхностей раздела фаз \mathbf{v}^s является одновременно скоростью движения точек связующего и скоростью точек наполнителя, т. е. на внутренних границах выполняется условие

$$\mathbf{v}^s = \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}. \quad (6)$$

На границе раздела фаз выполняется условие равенства действующих сил

$$\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}. \quad (7)$$

Это позволяет с учетом (5)–(7) записать выражение (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) dV \right) - \int_{V-S} \nabla \Phi \cdot \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (8)$$

Используя свойство ядра интегрального оператора (1), приходим в (8) к условию

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) dV \right) + \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0, \quad (9)$$

в которое входят осредненные структурные величины и макроскопический набла-оператор.

Требование выполнения принципа Галилея для макроскопического закона сохранения энергии. Дополнительное сообщение равномерного поступательного движения всем точкам изделия не должно приводить к нарушению закона сохранения энергии и изменению значений макроскопических величин. Рассмотрим вытекающие из этого требования следствия, используя результаты работы [11]. Для любого постоянного вектора \mathbf{v}_0 потребуем выполнения равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi^* \left(\rho^* e^* + \frac{1}{2} \rho^* (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}^*) \right) dV \right) + \\ + \hat{\nabla}^* \cdot \int_{V-S} \Phi^* \left(\rho^* e^* \mathbf{v}^* + \frac{1}{2} \rho^* (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}^*) \mathbf{v}^* - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{v}^* \right) dV = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

где $\Phi^* = \Phi(\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x})$; $\rho^*(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x} - t \mathbf{v}_0)$; $e^*(t, \mathbf{x}) = e(t, \mathbf{x} - t \mathbf{v}_0)$; $\mathbf{T}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x} - t \mathbf{v}_0)$; $\mathbf{v}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x} - t \mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0$; $\hat{\mathbf{x}}^* = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_0 t$; оператор набла определяется выражениями

$$\hat{\nabla}^* = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_*^i}, \quad \hat{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_*^i \mathbf{i}.$$

Поскольку интегрирование осуществляется по всему объему евклидова пространства, то

$$\int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x} - t \mathbf{v}_0) dV = \int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}}^* - t \mathbf{v}_0 - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x}) dV = \int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x}) dV.$$

С физической точки зрения зависимость (10) представляет собой обобщение закона (9) на случай сообщения точкам системы дополнительного равномерного поступательного движения.

Для дальнейшего преобразования макроскопического закона сохранения энергии используем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x} - t\mathbf{v}_0) dV \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}}^* - t\mathbf{v}_0 - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x}) dV \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x}) dV \right) - \mathbf{v}_0 \cdot \hat{\nabla} \int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x}) dV, \\ \hat{\nabla}^* \int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x} - t\mathbf{v}_0) dV &= \hat{\nabla} \int_{V-S} \Phi(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x}) dV, \end{aligned}$$

с помощью которых запишем закон (10), группируя слагаемые при одинаковых степенях вектора \mathbf{v}_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \rho dV \right) + \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi \rho \mathbf{v} dV \right] (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0) + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \rho \mathbf{v} dV \right) + \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi \rho \mathbf{v} \mathbf{v} dV - \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi T dV \right] \cdot \mathbf{v}_0 + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) dV \right) - \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi (T \cdot \mathbf{v}) dV + \right. \\ \left. + \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) dV \right] = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

Выполнение равенства возможно при любом значении вектора \mathbf{v}_0 , только если в (11) выражения в квадратных скобках обращаются в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \rho dV \right) + \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi \rho \mathbf{v} dV = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \rho \mathbf{v} dV \right) + \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi \rho \mathbf{v} \mathbf{v} dV - \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi T dV = 0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{V-S} \Phi \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right) dV \right) - \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi (T \cdot \mathbf{v}) dV + \\ + \hat{\nabla} \cdot \int_{V-S} \Phi \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Определение макроскопических величин материала. Рассмотрим полученные зависимости. В соответствии с физическим смыслом слагаемых необходимо ввести макроскопические понятия таким образом, чтобы равенства (12)–(14) имели классический вид закона сохранения массы

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}) = 0, \quad (15)$$

уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}}) + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}) - \hat{\nabla} \cdot \hat{T} = 0 \quad (16)$$

и закона сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{\rho}\hat{e} + \frac{1}{2}\hat{\rho}(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \right) + \hat{\nabla} \cdot \left(\hat{\rho}\hat{e}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\hat{\rho}(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \right) - \hat{\nabla} \cdot (\hat{T} \cdot \hat{\mathbf{v}}) + \hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{h}} = 0 \quad (17)$$

на макроскопическом уровне. В последней формуле использован макроскопический поток энергии $\hat{\mathbf{h}}$. Законы (15)–(17) на макроскопическом уровне получаются из уравнений (12)–(14) при введении следующих макроскопических величин.

Макроскопическую плотность материала $\hat{\rho}$ в произвольной точке евклидова пространства в текущий момент времени целесообразно определять путем осреднения микроструктурной плотности ρ :

$$\hat{\rho} = \int_{V-S} \rho \Phi dV. \quad (18)$$

Макроскопическую скорость среды необходимо вычислять из условия равенства макроскопического и осредненного структурного импульсов

$$\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}} = \int_{V-S} \rho \mathbf{v} \Phi dV. \quad (19)$$

Если ввести макроскопическую скорость путем осреднения структурной скорости точек материала, то нарушится требование объективности макроскопической модели. Закон сохранения макроскопической массы выполняться не будет.

В соответствии с приведенными определениями макроскопический радиус-вектор следует вычислять по формуле

$$\hat{\mathbf{x}}(t, \hat{\mathbf{x}}_0) = \hat{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_*}^t \hat{\mathbf{v}}(\tau, \hat{\mathbf{x}}(\tau)) d\tau,$$

где $\hat{\mathbf{x}}_0$ — макроскопический радиус-вектор в отсчетный момент времени t_0 . В отличие от вводимых ранее величин макроскопический радиус-вектор находится не путем осреднения соответствующего структурного вектора по какой-либо области пространства, а как радиус-вектор положения точек макроскопического континуума, соответствующий полю макроскопических скоростей.

Макроскопический тензор напряжений \hat{T} материала введем с помощью осреднения тензора структурных напряжений и осредненного дополнительного слагаемого:

$$\hat{T} = - \int_{V-S} \Phi \rho \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} dV + \int_{V-S} \Phi T dV.$$

Здесь

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) - \hat{\mathbf{v}}(t, \hat{\mathbf{x}}). \quad (20)$$

Для вычисления макроскопической массовой плотности внутренней энергии материала \hat{e} целесообразно использовать следующее утверждение. Сумма макроскопических объемных

плотностей внутренней и кинетической энергий представляет собой сумму соответствующих осредненных структурных величин:

$$\hat{\rho}\hat{e} + \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \int_{V-S} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \Phi dV.$$

Используя формулы (18)–(20), получаем

$$\hat{\rho}\hat{e} = \int_{V-S} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} \right) \Phi dV.$$

В уравнении (17) поток энергии $\hat{\mathbf{h}}$ появляется в силу равенства суммы макроскопических потоков энергии и мощности потока совершаемой работы $\hat{T} \cdot \hat{\mathbf{v}}$ соответствующим осредненным потокам на структурном уровне:

$$\hat{\rho}\hat{e}\hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\hat{\rho}(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} - \hat{T} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{h}} = \int_{V-S} \Phi \left(\rho e \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - T \cdot \mathbf{v} \right) dV.$$

Нетрудно убедиться, что значение макроскопического потока энергии определяется выражением

$$\hat{\mathbf{h}} = \int_{V-S} \Phi \left(\rho e \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho (\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}) \Delta \mathbf{v} - T \cdot \Delta \mathbf{v} \right) dV.$$

Во многих практических задачах значение вектора $\hat{\mathbf{h}}$ мало и часто принимается равным нулю.

Введение макроскопических параметров состояния имеет смысл только в том случае, когда с их помощью удастся построить замкнутую систему определяющих уравнений, что не всегда возможно. Необходимы такое распределение на структурном уровне параметров состояния материала и такой выбор области осреднения (т. е. величины \hat{a}_Φ), которые позволят установить функциональные связи между макроскопическими параметрами среды и описать макроскопические свойства материала с помощью соответствующих уравнений.

Использование оператора осреднения для анализа макроскопических параметров среды. Приведем пример использования сглаживающего оператора осреднения. Для простоты ограничимся анализом плоской задачи. Рассмотрим задачу вычисления макроскопической плотности и макроскопических напряжений в системе, состоящей из несжимаемой матрицы и 91 абсолютно жестких включений одинакового радиуса с центрами в узлах правильной треугольной решетки (рис. 1). На достаточном расстоянии от включений система нагружена растягивающим напряжением в направлении оси x_1 . Объемная доля наполнителя в ансамбле равна 0,5. Радиусы включений $r_{pat} = 1$. Решим задачу для малых деформаций. Полагаем, что поведение материала матрицы описывается изотропным законом Гука. Краевая задача нахождения напряжений в любой точке решается итерационным методом с использованием теории функций комплексной переменной [12].

В качестве ядра оператора осреднения Φ выберем функцию

$$\Phi(r) = \begin{cases} \gamma/a_\Phi^2, & 0 \leq r < a_\gamma, \\ \gamma[1 + \cos(\pi(r - a_\gamma)/(a_\Phi - a_\gamma))]/(2a_\Phi^2), & a_\gamma \leq r < a_\Phi, \\ 0, & a_\Phi \leq r, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})}$. Значение параметра γ определяется из условия нормировки. При увеличении значения аргумента происходит плавное изменение функции $\Phi(r)$ от

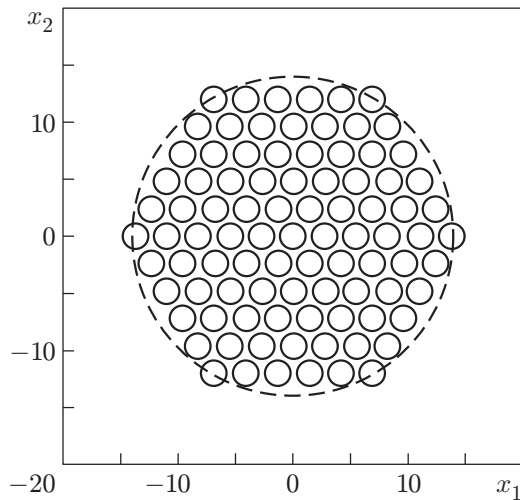


Рис. 1. Геометрия плоской композитной системы (штриховая линия — предполагаемая макроскопическая область пространства, занимаемая ансамблем включений)

максимального значения до нуля. Поэтому точки евклидова пространства, находящиеся около границы действия интегрального оператора (для которых $r \approx a_{\Phi}$), практически не принимают участия в формировании значения макроскопической величины. В расчетах (за исключением особо оговоренного случая) будет использоваться значение константы $a_{\gamma} = 0$.

Наиболее нагляден результат действия оператора осреднения при вычислении макроскопической плотности среды. Исследуем поведение функции $z = z(x_1, x_2)$, дающее представление об отличии искомой макроскопической плотности от плотности матрицы ρ_{bin} :

$$z = \Delta\rho / \Delta\rho_c.$$

Здесь $\Delta\rho = \hat{\rho} - \rho_{bin}$; $\Delta\rho_c = \rho_{inc} - \rho_{bin}$; для обезразмеривания результата вычисления используется разность $\Delta\rho_c$ плотностей наполнителя ρ_{inc} и матрицы ρ_{bin} . Поскольку рассматривается ансамбль включений, объемная доля наполнителя в котором равна 0,5, значение функции z в ансамбле также должно быть равным 0,5. Это число является контрольным для проверки получаемого решения.

Для проведения вычислений необходимо выбрать значение параметра a_{Φ} . Для этого определим, при каких значениях a_{Φ} макроскопическую плотность материала в рассматриваемом ансамбле можно рассчитать с высокой точностью. На рис. 2, а, б показана функция $z = z(x_1, x_2)$ при $a_{\Phi} = 5, 10$, на рис. 2, в, г приведены линии постоянного уровня этой функции с шагом 0,05 в интервале изменения функции от 0,05 до 0,5. При $a_{\Phi} = 5$ (рис. 2, а) на поверхности z видна область с эффективной плотностью массы ансамбля. Значение функции в ней практически совпадает со значением 0,5, что подтверждает характер распределения линий постоянного уровня (рис. 2, в). Между областью с эффективной макроскопической плотностью ансамбля частиц и матрицей находится переходная область, обеспечивающая плавный переход свойств.

Графики функции при $a_{\Phi} = 10$ (рис. 2, б, г) аналогичны графикам, полученным при $a_{\Phi} = 5$. Отличие состоит в том, что область с эффективными свойствами ансамбля уменьшается, в то время как область с переходными свойствами существенно увеличивается (рис. 2, г). При этом линии постоянного уровня более похожи на круги, чем на правильные шестиугольники.

Использование интегрального оператора осреднения для получения макроскопических свойств ансамбля включений позволят сделать вывод о существовании переходной области, обеспечивающей плавный переход характеристик матрицы к эффективным характеристикам ансамбля.

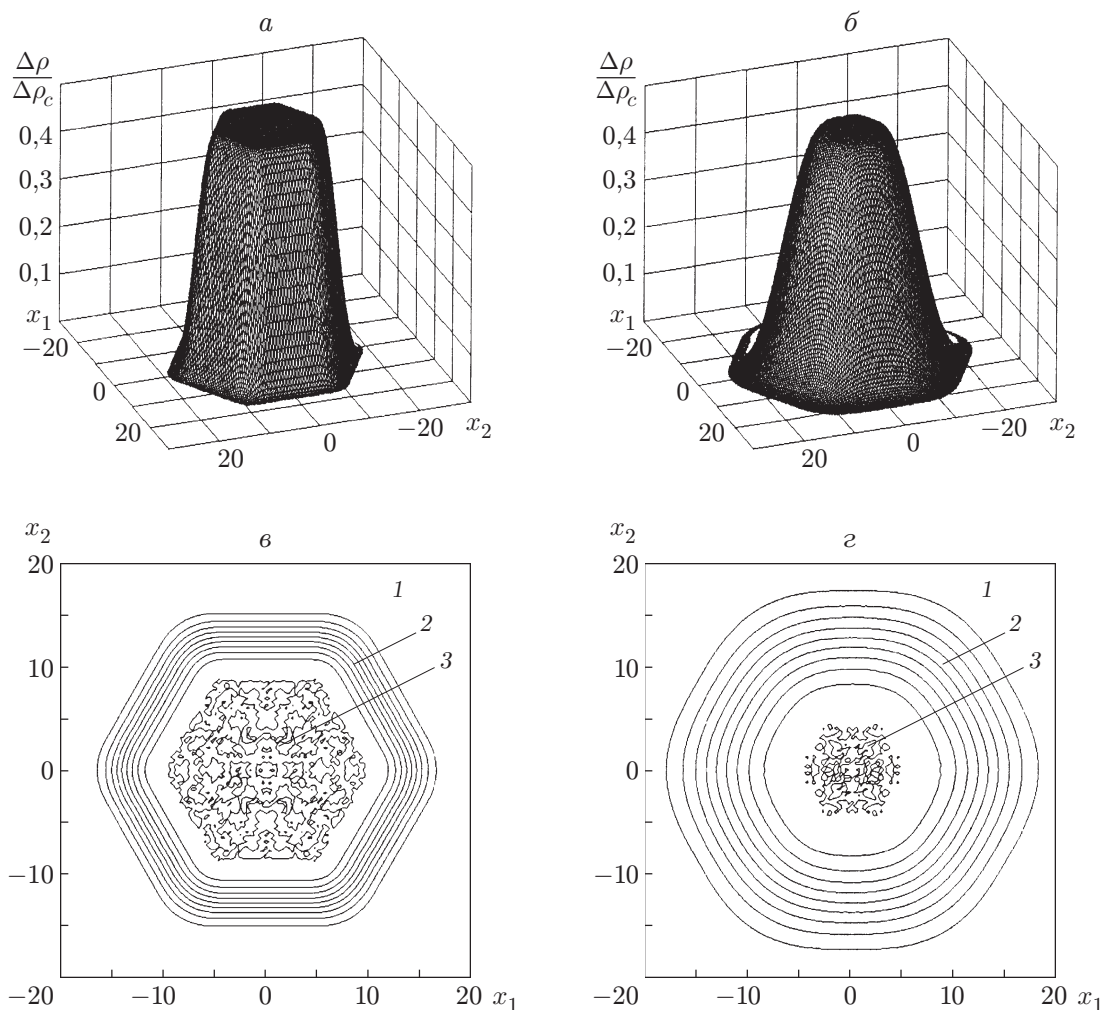


Рис. 2. Поверхности (а, б) и линии уровня (в, г) функции $z = z(x_1, x_2)$:
 а, в — $a_\Phi = 5$; б, г — $a_\Phi = 10$; 1 — матрица, 2 — переходная область, 3 — композит

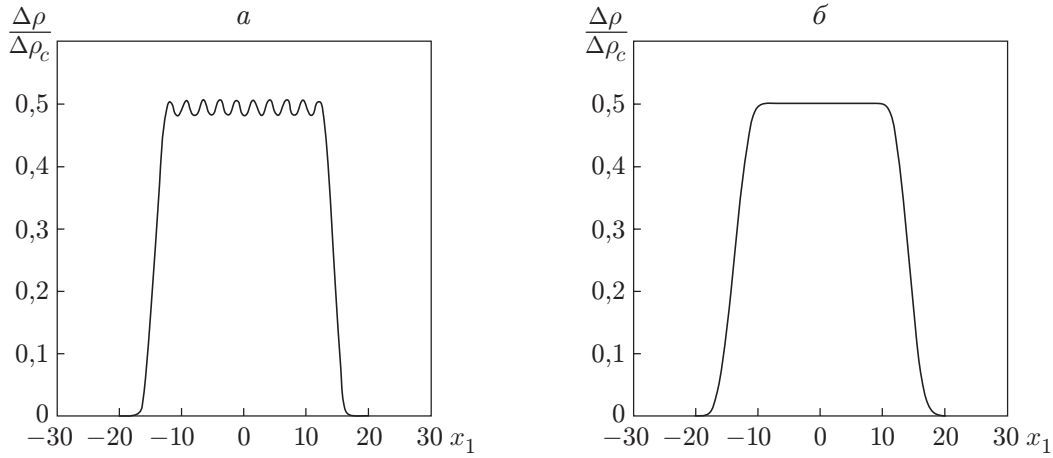
На рис. 3 показаны центральные сечения поверхности $z = z(x_1, x_2)$ плоскостью $x_2 = \text{const}$, построенные при $a_\Phi = 3, 5$. Из рис. 3 следует, что с высокой точностью макроскопическая плотность в ансамбле включений определяется при $a_\Phi > 5$. Ее малые отклонения (менее 0,01) от значения 0,5 практически не видны на графике, в то время как при $a_\Phi = 3$ наблюдаются значительные отклонения от значения 0,5.

В рассматриваемой задаче связующее и частицы наполнителя являются несжимаемым материалом. Естественно, что и на макроскопическом уровне объем композита не может меняться. Представляет интерес вычисление макроскопического модуля сдвига \hat{G} . Определим его по формуле

$$2\hat{G} = \frac{\sqrt{(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)^2 + (\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_3)^2 + (\hat{\sigma}_3 - \hat{\sigma}_1)^2}}{\sqrt{(\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2)^2 + (\hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_3)^2 + (\hat{\epsilon}_3 - \hat{\epsilon}_1)^2}},$$

где $\hat{\sigma}_i, \hat{\epsilon}_i$ — главные компоненты макроскопических напряжений и макроскопических деформаций в системе.

На рис. 4 показано изменение макроскопического модуля сдвига \hat{G} вдоль оси r , проведенной из начала координат под углами 0, 10, 20 и 30° к оси x_1 . Видно, что в центре рассматриваемого ансамбля включений макроскопический модуль сдвига является

Рис. 3. Поведение функции $z = z(x_1, 0)$:

$a - a_{\Phi} = 3$; $b - a_{\Phi} = 5$

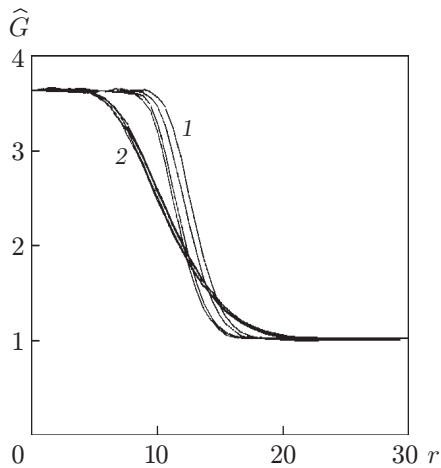


Рис. 4

Распределение эффективного модуля сдвига в системе с ансамблем включений вдоль оси r , проведенной к оси x_1 под углами $0, 10, 20, 30^\circ$:

1 — $a_{\Phi} = 5$; 2 — $a_{\Phi} = 10$

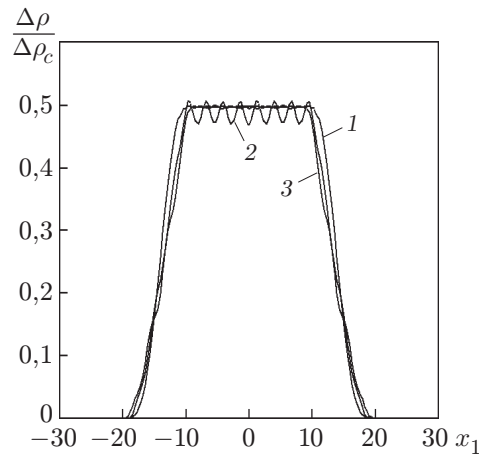


Рис. 5

Поведение функции $z = z(x_1, 0)$:

1 — $a_{\gamma}/a_{\Phi} = 0$; 2 — $a_{\gamma}/a_{\Phi} = \sqrt{2}/2$; 3 — $a_{\gamma}/a_{\Phi} = 0,99$

константой. Эта константа совпадает с эффективным модулем, вычисленным на ячейке периодичности композитного материала с центрами включений в узлах правильной треугольной решетки. На некотором удалении от центра происходит плавный переход до значения модуля сдвига упругой матрицы. При использовании в операторе осреднения значения $a_{\Phi} = 10$ зависимости $\hat{G}(r)$ практически совпадают (семейство кривых 2 на рис. 4). Это объясняется тем, что в рассматриваемом случае форма области, занятой композитным материалом, близка к круглой. При использовании в операторе осреднения значения $a_{\Phi} = 5$ кривые смещаются относительно друг друга. Это обусловлено тем, что форма композитной области системы близка к шестиугольной.

На рис. 5 показаны графики функции $z = z(x_1, 0)$ для различных значений параметра a_{γ} при фиксированном значении a_{Φ} . Для двух из рассмотренных значений a_{γ}/a_{Φ}

получены гладкие графики функции $z = z(x_1, x_2)$. При $a_\Phi/a_\gamma = \sqrt{2}$ получен график, в поведении которого проявляется периодичность структуры. Этот пример свидетельствует о том, что выбор сглаживающего оператора и размера области осреднения играет важную роль и зависит от специфики композитного материала. Критерием применимости оператора является получение макроскопических полей параметров состояния, между которыми существуют макроскопические связи (можно сформулировать макроскопические уравнения состояния среды).

Заключение. Использование интегрального оператора для установления связи между структурным и макроскопическим уровнями описания композитного материала и требования объективности макроскопической формулировки закона сохранения энергии позволяет корректно ввести макроскопические параметры состояния среды с учетом конечных деформаций материала.

На макроскопическом уровне описания четко выраженной границы между ансамблем из конечного числа включений и окружающей его бесконечной матрицей не существует. Происходит плавный переход от эффективных свойств ансамбля к свойствам матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
2. **Bennethum L. S., Cushman J. H.** Multiscale, hybrid mixture theory for swelling systems. 1. Balance laws // Intern. J. Engng Sci. 1996. V. 34. P. 125–145.
3. **Bennethum L. S., Murad M. A., Cushman J. H.** Macroscale thermodynamics and the chemical potential for swelling porous media // Transport Porous Media. 2000. V. 39. P. 187–225.
4. **Gray W. G., Hassanizadeh S. M.** Macroscale continuum mechanics for multiphase porous-media flow including phases, interfaces, common lines and common points // Adv. Water Resource. 1998. V. 21. P. 261–281.
5. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001.
6. **Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А.** Вейвлеты и их использование // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171, № 5. С. 465–501.
7. **Chen J.-S., Pan C., Wu C.-T., Liu W. K.** Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1996. V. 139. P. 195–227.
8. **Chen J.-S., Pan C., Wu C.-T.** Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method // Comput. Mech. 1997. V. 19. P. 211–227.
9. **Hardee E., Chang K.-H., Grindeanu I., et al.** A structural nonlinear analysis workspace (SNAW) based on meshless methods // Adv. Engng Software. 1999. V. 30. P. 153–175.
10. **Liu W. K., Hao S., Belytschko T., et al.** Multiple scale meshfree methods for damage fracture and localization // Comput. Materials Sci. 1999. V. 16. P. 197–205.
11. **Green A. E.** On Cauchy's equations of motion // Z. angew. Math. Phys. 1964. Bd 15. S. 290–292.
12. **Свистков А. Л., Гаришин О. К., Евлампиева С. Е., Лебедев С. Н.** Итерационный метод расчета напряженно-деформированного состояния в ансамблях включений // Механика композиц. материалов и конструкций. 1999. Т. 5, № 2. С. 17–28.

*Поступила в редакцию 15/V 2002 г.,
в окончательном варианте — 23/I 2003 г.*