УДК 539.376

# УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ИЗГИБАЕМЫХ АРМИРОВАННЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ОСЛАБЛЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОМУ СДВИГУ

## 2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: lab4nemir@rambler.ru

Проведено исследование деформирования кольцевых пластин с различными структурами спирального армирования и показано, что использование классической теории для расчета установившейся ползучести относительно толстых армированных пластин при изгибе приводит к заниженным оценкам податливости тонкостенных металлокомпозитных конструкций. Также показано наличие в связующем таких пластин значительных скоростей деформаций поперечных сдвигов, учет которых обязателен и за счет которых в основном происходит накопление деформаций ползучести. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных с использованием двух различных моделей, учитывающих структуру композита.

Ключевые слова: армированные металлокомпозиты, структурные теории, пластины, установившаяся ползучесть, теория Тимошенко.

В работе [1] с использованием второго варианта теории Тимошенко сформулирована задача о деформировании армированных металлокомпозитных пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу в условиях установившейся ползучести всех фазовых материалов. В настоящей работе обсуждаются результаты расчетов, полученные с использованием различных структурных моделей установившейся ползучести армированных металлокомпозитов в рамках классической и уточненной теорий изгиба кольцевых пластин для модельной задачи, поставленной в [1].

В качестве примера исследуем деформирование в условиях установившейся ползучести кольцевых армированных пластин двух типов с различными размерами (см. рис. 3 в [1]):

— тип I: $r_0 = 1$ м, $r_1 = 2$ м, толщина $2h$ меняется;

— тип II: $r_0 = 0{,}2$ м, $r_1 = 0{,}6$ м, $2h = 0{,}02$ м.

Конструкции равномерно нагружены в поперечном направлении: $p_3(x_1) = 1$ МПа ($X_1(x_1) \equiv 0$ (см. (35)–(37) в [2])); внешние кромки их свободны от нагружения, т. е. $F_{nn} = 0$, $M_{nn} = 0$, $F_{13}^0 = 0$ при $x_1^0 = r_1$ (см. (44) в [2]), внутренние — жестко закреплены, т. е. $\bar{v}_{10} = 0$, $\bar{\bar{v}}_{10} = 0$, $v_{30} = 0$ при $x_1^0 = r_0$ (см. (45) в [2]).

Рассматриваются медные пластины, усиленные двумя семействами стальной проволоки У8А. Параметры, входящие в степенной закон установившейся ползучести для этих

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-90400-Укр_а).

материалов, при температуре, равной приблизительно 200 °С, определяются равенствами (1) в [2] (см. также [3, 4]). Согласно модельной задаче [1] пластины полагаются осесимметрично армированными по логарифмическим спиралям:

$$\omega_1(x_1) = \omega_2(x_1), \qquad \psi_1(x_1) = -\psi_2(x_1) = \psi = \text{const}, \qquad r_0 \leqslant x_1 \leqslant r_1. \tag{1}$$

Для армирования используется проволока постоянного поперечного сечения [3], поэтому в осесимметричном случае при армировании по логарифмическим спиралям под любыми углами $\psi$ (см. рис. 3 в [1]) плотности армирования $\omega_k$ изменяются по закону [5]

$$\omega_k(x_1) = r_0\omega_{0k}/x_1 \qquad (\omega_{0k} \equiv \omega_k(r_0), \quad k = 1, 2, \quad \omega_{01} = \omega_{02}), \tag{2}$$

где $\omega_{0k}$ — плотность армирования волокнами $k$-го семейства, заданная на внутренней кромке $x_1 = r_0$. (Из соотношений (2) следует, что при любых углах армирования $\psi$ в (1) общий расход арматуры в пластинах фиксированных размеров будет одинаковым.) Ниже при расчетах металлокомпозитных пластин примем $\omega_{01} = \omega_{02} = 0{,}3$, при этом суммарная плотность армирования на внутренней кромке пластины ($\omega_{01} + \omega_{02} = 0{,}6$) близка к предельно допустимой, которая на практике приблизительно равна 0,7.

Рассматриваемые задачи интегрируются численно путем решения двухточечной граничной задачи (42), (44), (45) из работы [2] методом пристрелки [6], при этом на каждой $(n+1)$-й итерации функция $(\xi^0_{13})^{n+1}$ заранее известна из соотношений (38), (39) в [2] (с учетом равенства (17) из [1]), так как на кромке $x^0_1 = r_1$ задано значение поперечной силы $F^0_{13} = 0$.

В работе [7] для учета ослабленного сопротивления поперечным сдвигам тонкостенных элементов армированных конструкций в линейно-упругом случае предложено высокомодульные армирующие волокна считать абсолютно жесткими на сдвиг, а сдвиговые деформации в поперечном направлении тонкостенной конструкции учитывать только в связующем. Применяя это предположение при моделировании деформирования армированных металлокомпозитных пластин в условиях установившейся ползучести, компоненты матрицы эффективных вязкостей $A^n$ в (2) из [1] можно представить в виде

$$a_{44}(x_1, x_2, x_3)^n = a_{55}(x_1, x_2, x_3)^n = (2/\omega_0)g_0(H^n_0, \Theta), \tag{3}$$

где $\Theta$ — температура композиции; $H_0$ — интенсивность скоростей деформаций сдвига в связующем [8]; $\omega_0$ — объемная доля связующего в характерном элементе композиции (см. (1) в [9]); $g_0$ — заданная функция указанных аргументов, определяющая вязкие свойства связующего материала и представляющая собой секущий модуль (в случае степенного закона установившейся ползучести функция $g_0$ определяется выражением (48) из [9]). Согласно работе [7] скорости сдвиговых деформаций в поперечном направлении в связующем $\xi^{(0)}_{i3}$ и арматуре $k$-го семейства $\xi^{(k)}_{i3}$ вычисляются следующим образом:

$$\xi^{(0)}_{i3} = \xi_{i3}/\omega_0, \qquad \xi^{(k)}_{i3} \equiv 0, \qquad i = 1, 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant K \tag{4}$$

($\xi_{i3}$ — скорость сдвиговых деформаций в композиции; $K$ — количество семейств армирующих проволок).

Соотношения (3) с учетом (4) позволяют получить для коэффициентов $a^n_{44}$, $a^n_{55}$ более простые выражения по сравнению со структурными формулами [9]. Используя равенства (3), (4), по формулам, полученным в [9], достаточно вычислить эффективные вязкости (1) из [1], т. е. матрицу $B^n$ (см. (3) в [1]). Поскольку матрица $B^n$ имеет размерность $3 \times 3$, а матрица $A^n$, полученная по формулам [9], — размерность $5 \times 5$, вычисления с использованием соотношений (3), (4) с определением (в каждой точке тела) лишь компонентов матрицы $B^n$ существенно менее трудоемки по сравнению с вычислениями с определением всех компонентов матрицы $A^n$. Целесообразно выяснить, допустимо ли использование соотношений (3), (4) вместо структурных соотношений, полученных в [9].

Сравним результаты расчетов, полученные по следующим структурным моделям:

Модель 1. Компоненты матрицы $A^n$ (см. (1), (2) в [1]) определяются по структурным соотношениям из [9].

Модель 2. Компоненты матрицы $B^n$ (см. (3) в [1]) определяются по структурным соотношениям из [9], а вязкости (2) из [1] — по формулам (3), (4).

Модель 3. В рамках модели с одномерным напряженным состоянием в волокнах [10, 11] не учитываются напряжения в арматуре в поперечном направлении (как нормальные, так и касательные); при учете ослабленного сопротивления поперечному сдвигу используются соотношения (3), (4).

Также сравним результаты расчетов, полученные с использованием второго варианта теории Тимошенко и классической теории Кирхгофа, когда поперечные сдвиги не учитываются. Для получения решения модельной задачи в рамках классической теории в равенстве (17) из [1] достаточно принять $\bar{d}_1(x_1)^n \to \infty$, или $\xi^0_{13}(x_1)^{n+1} \equiv 0$.

Многочисленные исследования влияния учета поперечных сдвигов на податливость в тонкостенных композитных конструкциях при их линейно-упругом деформировании [7, 12–14] показывают, что это влияние существенно лишь для относительно толстых пластин при значительном различии модулей упругости связующего и арматуры (в 30 и более раз [14]). С уменьшением относительной толщины пластин и оболочек решения, полученные с использованием теорий Тимошенко и Кирхгофа — Лява, различаются в меньшей степени. Кроме того, для изотропных или армированных тонкостенных композитных конструкций с "жестким" связующим (например, металлокомпозитных) указанное различие решений незначительно, даже если эти пластины имеют относительно большую толщину.

Можно предположить, что в случае установившейся ползучести изгибаемых армированных металлокомпозитных пластин решения будут обладать аналогичными свойствами, так как в предложенных в работе [9] моделях установившейся ползучести используется метод секущего модуля, аналогичного модулю упругости.

В качестве меры податливости изгибаемых пластин в условиях установившейся ползучести примем величину

$$v_3^m = \max_{r_0 \leqslant x_1 \leqslant r_1} |v_3(x_1)|, \tag{5}$$

где $v_3$ — скорость прогиба ползучести. Относительную разность решений, полученных с помощью теорий Тимошенко и Кирхгофа, с использованием (5) можно оценить по формуле

$$V_3 = [(v_3^{\text{Т}} - v_3^{\text{К}})/v_3^{\text{Т}}] \cdot 100~\%, \tag{6}$$

где $v_3^{\text{Т}}$, $v_3^{\text{К}}$ — значения $v_3^m$, рассчитанные в рамках теорий Тимошенко и Кирхгофа соответственно.

Расчеты изотропной медной пластины типа I толщиной $2h = 10$ см, выполненные по двум указанным теориям, показали, что $V_3 \approx 2$ %. (Эпюры скоростей прогибов $v_3(x_1)$ при противоположно направленной нагрузке $p_3(x_1) = -1$ МПа показаны на рис. 3,*а* в [2].) Следовательно, даже для относительно толстых изотропных пластин результаты расчетов по теории Тимошенко и теории Кирхгофа достаточно близки.

Для радиально армированных ($\psi = 0$ (см. (1), (2))) пластин типа I различной толщины величина $V_3$ имеет следующие значения (причем всегда $v_3^{\text{К}} < v_3^{\text{Т}}$):

$$V_3 = 3{,}4~\% \text{ при } 2h = 5 \text{ см}, \quad V_3 = 9{,}9~\% \text{ при } 2h = 5{,}5 \text{ см}, \quad V_3 = 33{,}6~\% \text{ при } 2h = 6 \text{ см}. \tag{7}$$

Для относительно толстых (например, $2h = 10$ см) армированных пластин величины $v_3^{\text{Т}}$, $v_3^{\text{К}}$ из (6) различаются уже на несколько порядков. Тогда согласно (7) при уменьшении толщины армированных пластин различие решений, полученных с использованием теорий Тимошенко и Кирхгофа, становится пренебрежимо малым. (При $2h = 5$ см эпюры скоростей прогибов $v_3(x_1)$ аналогичны показанным на рис. 3,*б* в [2].)

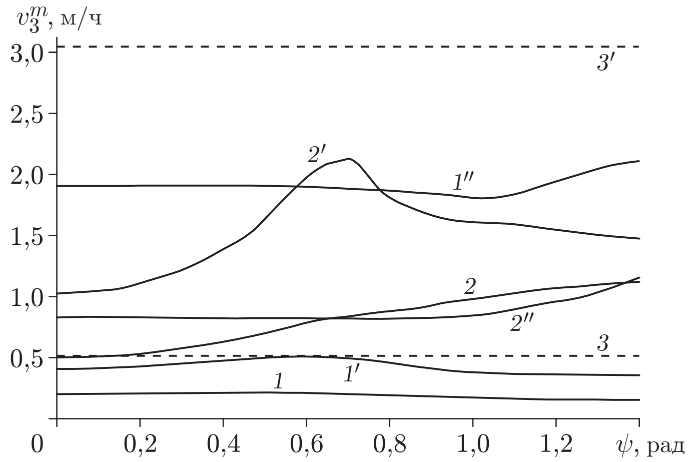


Рис. 1. Зависимость максимальной скорости прогиба ползучести от угла спирального армирования кольцевых пластин:
*1–3* — пластины типа I толщиной $2h = 3{,}5$ см, *1′–3′* — пластины типа II толщиной $2h = 2$ см, *1″*, *2″* — пластины типа I толщиной $2h = 10$ см; штриховые линии — медные пластины, сплошные — металлокомпозитные; *1*, *1′*, *1″* — расчет по структурной модели 1, *2*, *2′*, *2″* — расчет по структурной модели 3

Проведенные расчеты свидетельствуют о достоверности модели деформирования тонкостенного элемента, развитой в [1] и учитывающей ослабленное сопротивление армированного металлокомпозита поперечным сдвигам в условиях установившейся ползучести.

Исследуем зависимость податливости армированных пластин от структуры армирования в условиях установившейся ползучести. На рис. 1 приведены зависимости $v_3^m$ от величины угла спирального армирования $\psi$ для пластин различных размеров (ординаты точек кривых *1′–3′* и *1″*, *2″* на рис. 1 увеличены в $10^2$ и $10^6$ раз соответственно). Штриховые линии *3*, *3′* на рис. 1 характеризуют податливости (5) медных изотропных пластин. Линия *3″* для относительно толстой пластины типа I на рис. 1 не показана, так как для медной пластины типа I толщиной $2h = 10$ см максимальная скорость прогиба ползучести $v_3^m = 1{,}97$ мм/ч, что на три порядка больше значений $v_3^m$, соответствующих точкам кривых *1″*, *2″* на рис. 1.

В расчетах по структурной модели 2 получены зависимости, близкие к зависимостям *1*, *1′*, *1″* на рис. 1. Следовательно, для рассматриваемого металлокомпозита Cu–У8А при заданных уровнях термосилового нагружения армированных пластин вместо модели 1 можно использовать более простые соотношения модели 2, что позволяет сократить время расчета эффективных вязкостей композиции в каждой точке тонкостенного элемента.

Кривые *1*, *1′* на рис. 1 расположены существенно ниже прямых *3*, *3′* (как отмечалось выше, значения ординат точек кривой *1″* на три порядка меньше значений ординат точек не показанной на рис. 1 прямой *3″*). Следовательно, согласно моделям 1, 2 армирование медных пластин различных размеров стальной проволокой У8А позволяет в несколько раз и даже на несколько порядков уменьшить податливость таких конструкций в условиях установившейся ползучести.

Линия *2* на рис. 1 расположена выше линии *3*, т. е. согласно модели 3 при определенных условиях армирование пластины может привести не к уменьшению, а к увеличению ее податливости в условиях ползучести. Аналогичные результаты в рамках модели 3 при некоторых углах армирования получены в работах [9, 11]. Это обусловлено тем, что в рамках модели 3 напряженное состояние в поперечном направлении в арматуре не учитывается, т. е. моделируется неидеальный механический контакт арматуры со связующим (неполная адгезия), поэтому в некоторых ситуациях усиливающие волокна не участвуют в работе композита при его деформировании и в этих случаях бо́льшая часть нагрузки приходится на связующее, которое при этом ослаблено наличием неработающей арматуры. Этим обусловлен и тот факт, что в случае относительно тонких пластин кривые *2*, *2*$'$ на рис. 1 расположены значительно выше линий *1*, *1*$'$, т. е. модель 3 предсказывает существенно завышенную податливость таких металлокомпозитных пластин. В случае относительно толстых пластин модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах, наоборот, предсказывает меньшую податливость. Действительно, кривая *2*$''$ на рис. 1 расположена значительно ниже линии *1*$''$. (Это также можно объяснить особенностями структурной модели 3 и деформирования относительно тонких и относительно толстых армированных пластин при заданном типе их нагружения и закрепления.)

Кривые *2*, *2*$'$ на рис. 1 расположены существенно выше линий *1*, *1*$'$, а кривая *2*$''$ — существенно ниже линии *1*$''$. Однако при определенных условиях соответствующие кривые могут быть расположены достаточно близко. Так, при $r_0 = 1000$ м, $r_1 = 1001$ м, $2h = 3{,}5$ см (что приближенно позволяет моделировать цилиндрический изгиб прямоугольной удлиненной пластины шириной 1 м и толщиной 3,5 см) значения $v_3^m$, полученные по моделям 1, 3 при $\psi = 0$, различаются лишь на 8 %, причем в силу относительно малой толщины такой пластины модель 3 вновь дает завышенное по сравнению с моделью 1 (или моделью 2) значение $v_3^m$.

При использовании в качестве критерия рационального армирования условия минимума податливости металлокомпозитных пластин в условиях ползучести $(\min\limits_{\psi} v_3^m(\psi))$ в соответствии с поведением кривых *1*, *1*$'$ на рис. 1 оптимальным будет армирование в окружном направлении ($\psi = \pi/2$), а в соответствии с поведением линий *2*, *2*$'$ — радиальное армирование ($\psi = 0$). Следовательно, использование различных структурных моделей приводит к принципиально разным рациональным проектам армирования. Анализ поведения кривой *1*$''$ на рис. 1 показывает, что для относительно толстых пластин оптимальной является спиральная структура армирования при $\psi \approx 1{,}03$ (заметим, что при $0 \leqslant \psi \leqslant 1{,}1$ кривая *1*$''$ меняется незначительно), т. е. не всегда армирование по направлениям главных напряжений и скоростей деформаций ползучести (в рассматриваемых задачах эти направления на лицевых поверхностях пластины совпадают с радиальным и окружным направлениями) является наилучшим.

Расчеты, проведенные с использованием теории Кирхгофа (без учета поперечного сдвига), показали, что зависимости $v_3^m(\psi)$ для относительно тонких пластин практически совпадают с соответствующими зависимостями *1*, *1*$'$ и *2*, *2*$'$ на рис. 1. Это полностью согласуется с равенствами (7). Для относительно толстых пластин, рассчитанных по теории Кирхгофа, зависимости $v_3^m(\psi)$ на рис. 1 практически совпадают с зависимостями $v_3^m \equiv 0$, так как в этом случае значения $v_3^m(\psi)$, полученные с использованием классической теории, на 6–8 порядков меньше значений ординат точек кривых *1*$''$, *2*$''$. Следовательно, согласно теории Кирхгофа в случае относительно толстых армированных пластин из (Cu–У8А)-композита деформация ползучести практически отсутствует, а уточненная теория Тимошенко предсказывает достаточно интенсивный процесс ползучести вследствие поперечных сдвигов в связующем.

На рис. 2 показана зависимость скорости прогиба установившейся ползучести $v_3$ от полярного радиуса $x_1$ для пластин типа I: относительно тонких, толщиной $2h = 3{,}5$ см (рис. 2,*а*), и относительно толстых, толщиной $2h = 10$ см (рис. 2,*б*). Как отмечалось выше, в случае относительно тонких пластин (см. рис. 2,*а*) результаты расчетов по теории Кирхгофа близки к результатам расчетов по теории Тимошенко. В случае относительно толстых пластин (см. рис. 2,*б*) зависимости $v_3(x_1)$, полученные с использованием класси-

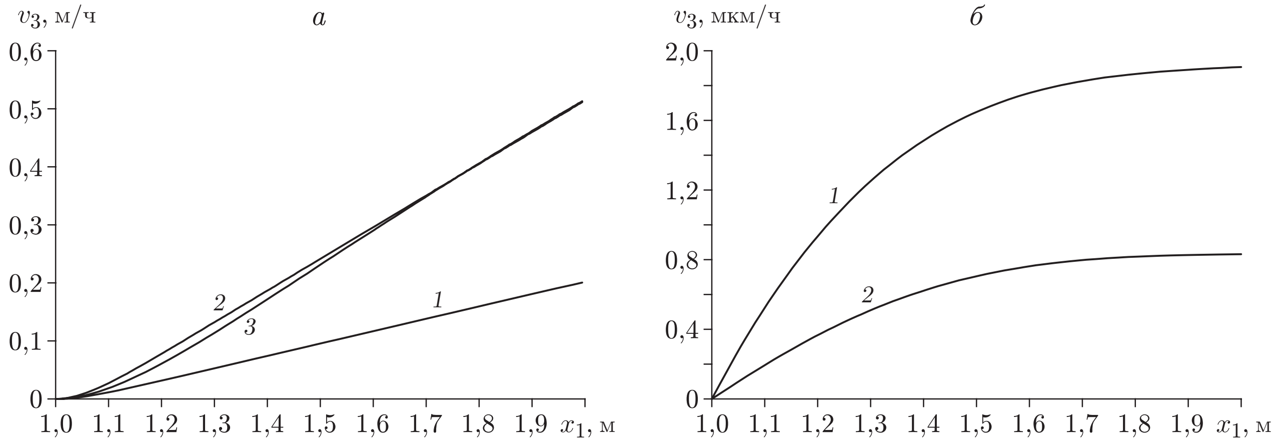


Рис. 2. Зависимость скорости прогиба ползучести от полярного радиуса для относительно тонких ($2h = 3{,}5$ см) (*а*) и толстых ($2h = 10$ см) (*б*) пластин типа I:
*1, 2* — металлокомпозитная пластина с радиальным армированием ($\psi = 0$ (см. (2))); *3* — изотропная медная пластина (*1* — расчет по структурной модели 1, *2* — расчет по структурной модели 3)

ческой теории, аналогичны зависимостям *1*, *2* на рис. 2,*а*, однако при этом значения $v_3$ на шесть порядков меньше ординат точек кривых на рис. 2,*б*, т. е. указанные зависимости $v_3(x_1)$ на рис. 2,*б* близки к горизонтальным прямым $v_3 \equiv 0$.

Таким образом, линии *1*, *2* на рис. 2 различаются знаком кривизны, причем поведение кривых на рис. 2,*а* свидетельствует о том, что в относительно тонких пластинах доминируют скорости изгибных (линейных) деформаций, а согласно рис. 2,*б* в относительно толстых пластинах преобладает деформирование за счет поперечного сдвига. Об этом свидетельствуют также зависимости $\xi^0_{13}(x_1)$, рассчитанные для случаев, показанных на рис. 2,*б*. Зависимости $\xi^0_{13}(x_1)$, не приведенные на рис. 2, монотонно и нелинейно убывают в направлении от внутренней кромки $x_1 = r_0$ к внешней $x_1 = r_1$, достигая на последней нулевого значения.

Поведение зависимостей $\xi^0_{13}(x_1)$, рассчитанных при $x_1 \approx r_0 = 1$ м, подтверждает, что в окрестности жестко закрепленной внутренней кромки в точках срединной плоскости пластины развиваются значительные (порядка $10^{-6}$ ч$^{-1}$) скорости деформаций поперечного сдвига. (В ряде случаев скорости деформаций установившейся ползучести такого порядка сопоставимы с предельно допустимыми значениями, установленными для изделий, эксплуатируемых в условиях длительного нагружения [15], или превышают их.)

Поскольку линии на рис. 2,*а,б* различаются качественно — знаком кривизны, использование модели 3 приводит к увеличению по сравнению с моделью 1 податливости (в условиях ползучести) относительно тонких пластин и, наоборот, к уменьшению податливости относительно толстых пластин. Поведение линий на рис. 2,*б* свидетельствует о том, что в рамках модели 3 в арматуре (в силу одномерности напряженного состояния в ней) возникают осевые напряжения, порождающие изгибающие моменты, которые вызывают большее сопротивление поперечному нагружению относительно толстых пластин, чем аналогичные моменты, определенные в рамках модели 1 с учетом пространственного напряженного состояния в арматуре. Вследствие этого кривая *2*$''$ на рис. 1 и кривая *2* на рис. 2,*б* расположены ниже соответствующих кривых *1*$''$, *1*.

Из результатов расчетов, представленных на рис. 2,*б*, следует, что при расчетах тонкостенных металлокомпозитных элементов конструкций, работающих в условиях установившейся ползучести, необходимо учитывать ослабленное сопротивление поперечному сдвигу, так как в силу существенной нелинейности рассматриваемой задачи (см. рис. 1,*а* в [2]) не представляется возможным заранее предсказать, при каких относительных толщинах армированных пластин расчеты по теории Кирхгофа можно считать достоверными (для различных композитов и структур армирования, температур и уровней нагружения границы области применимости классической теории также будут различными).

Для определения интегралов в соотношениях (6) из работы [1] необходимо использовать формулы численного интегрирования. Расчеты показывают, что в рассматриваемых задачах можно использовать квадратурные формулы [2].

Для того чтобы получить представление о характере распределения скоростей деформаций ползучести в компонентах композитов внутри радиально армированных ($\psi = 0$ (см. (2))) пластин типа I, на рис. 3–5 приведены их поперечные сечения в радиальном направлении и изолинии, характеризующие следы поверхностей, на которых интенсивность скоростей деформаций сдвига установившейся ползучести $H_k$ [8] имеет постоянные значения. Значения $H_k$ ($k = 0, 1$) определялись по формуле (12.11) в работе [8] с учетом соотношений (50)–(58) из [9] и (26), (28), (29) из [2].

Поведение кривых $H_0 = \mathrm{const}$ на рис. 3, 4 в окрестности внутренней кромки пластины (1,0 м $\leqslant x_1 \leqslant$ 1,6 м) свидетельствует о том, что в связующем относительно толстых пластин в окрестности жестко закрепленной кромки преобладают скорости деформаций поперечного сдвига (так как указанные кривые близки к параболам). Это предположение соответствует формуле (26) из работы [2] и определяет необычное на первый взгляд поведение кривых *1*, *2* на рис. 2,*б*, которое отличается от поведения аналогичных кривых на рис. 2,*а*.

Подобного поведения кривых $H_1 = \mathrm{const}$ на рис. 3, 4 не наблюдается, т. е. в стальной арматуре относительно толстых пластин скорости деформаций поперечного сдвига не доминируют над скоростями линейных деформаций ползучести. Сравнение кривых $H_1 = \mathrm{const}$ на рис. 3, 4 показывает, что при использовании различных структурных моделей “картины” вязкого течения в арматуре качественно различаются.

При сравнении изолиний на рис. 3 или рис. 4 видно, что в медном связующем относительно толстых пластин скорости деформаций ползучести на два порядка больше, чем в стальной арматуре. Это объясняет поведение кривых *1″*, *2″* на рис. 1 при $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, где эти линии почти горизонтальны, т. е. податливость относительно толстых пластин в условиях ползучести практически не зависит от угла армирования $\psi$ в указанном диапазоне его значений. Действительно, такие пластины можно рассматривать как слоистые с регулярно чередующимися армированными слоями и прослойками связующего между ними. При этом плотности армирования $\omega_k$ каждого элементарного слоя одинаковы при разных $\psi$ (см. (1), (2)) и согласно рис. 3, 4 в арматуре в отличие от связующего деформация ползучести практически отсутствует, а накопление деформаций ползучести происходит только за счет вязкого течения прослоек связующего между элементарными армированными слоями.

Поведение линий $H_k = \mathrm{const}$ ($k = 0, 1$) на рис. 5 свидетельствует о том, что в относительно тонких ($2h$ = 3,5 см) металлокомпозитных пластинах изгибные (линейные) скорости деформаций преобладают над скоростями деформаций поперечного сдвига как в связующем, так и в арматуре. При этом в окрестности внутренней жестко закрепленной кромки в обоих фазовых материалах возникает напряженное состояние, близкое к состоянию вязкоползучего шарнира, что определяет поведение кривой *1* на рис. 2,*а*. На рис. 5 также видно, что в относительно тонких пластинах интенсивности скоростей деформаций сдвига $H_0$ и $H_1$ в связующем и арматуре имеют один и тот же порядок.

Результаты анализа изгибного деформирования армированных металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести, показали, что армирова-

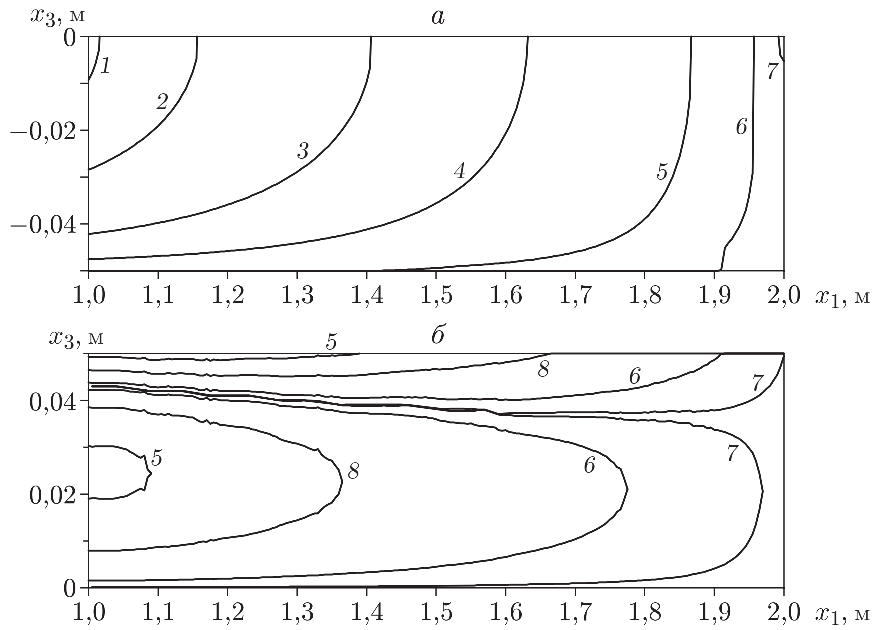


Рис. 3. Изолинии интенсивности скорости деформации установившейся ползучести в радиальном поперечном сечении металлокомпозитной пластины типа I толщиной $2h = 10$ см, рассчитанные по структурной модели 1:
*а* — в медном связующем, *б* — в стальной арматуре; *1* — $H_0 = 10^{-5}$ ч$^{-1}$, *2* — $H_0 = 7 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$, *3* — $H_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$, *4* — $H_0 = 10^{-6}$ ч$^{-1}$, *5* — $H_0 = H_1 = 10^{-7}$ ч$^{-1}$, *6* — $H_0 = H_1 = 10^{-8}$ ч$^{-1}$, *7* — $H_0 = H_1 = 10^{-9}$ ч$^{-1}$, *8* — $H_1 = 5 \cdot 10^{-8}$ ч$^{-1}$

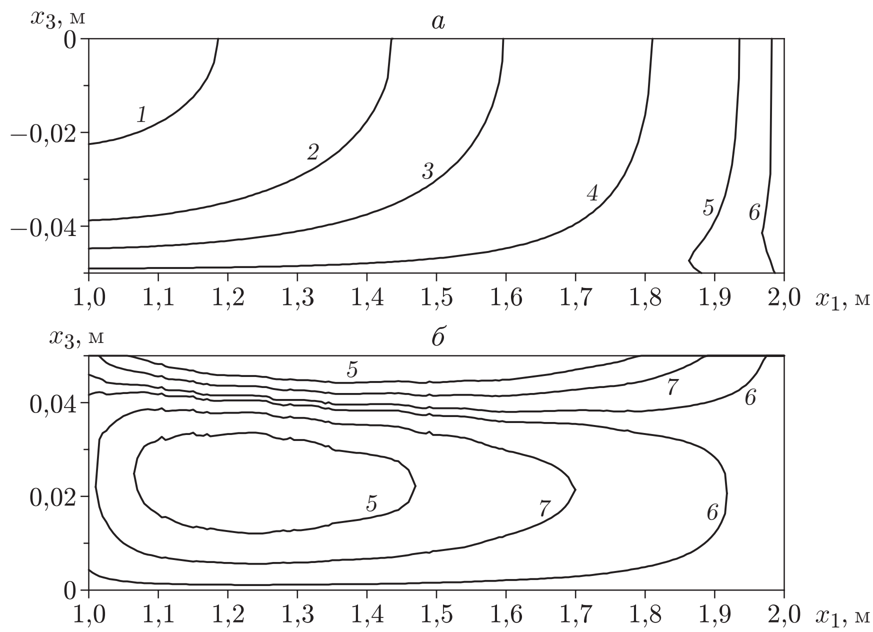


Рис. 4. Изолинии интенсивности скорости деформации установившейся ползучести в радиальном поперечном сечении металлокомпозитной пластины типа I толщиной $2h = 10$ см, рассчитанные по структурной модели 3:
*а* — в медном связующем, *б* — в стальной арматуре; *1* — $H_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$, *2* — $H_0 = 10^{-6}$ ч$^{-1}$, *3* — $H_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ ч$^{-1}$, *4* — $H_0 = 10^{-7}$ ч$^{-1}$, *5* — $H_0 = H_1 = 10^{-8}$ ч$^{-1}$, *6* — $H_0 = H_1 = 10^{-9}$ ч$^{-1}$, *7* — $H_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ ч$^{-1}$

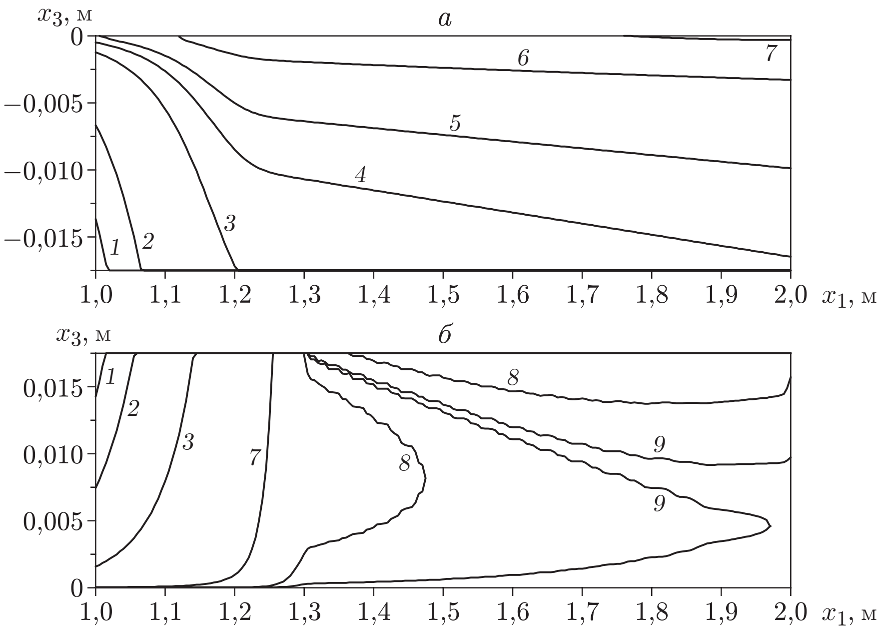


Рис. 5. Изолинии интенсивности скорости деформации установившейся ползучести в радиальном поперечном сечении металлокомпозитной пластины типа I толщиной $2h = 3{,}5$ см, рассчитанные по структурной модели 1:

*а* — в медном связующем, *б* — в стальной арматуре; *1* — $H_0 = H_1 = 10^{-1}$ ч$^{-1}$, *2* — $H_0 = H_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ ч$^{-1}$, *3* — $H_0 = H_1 = 10^{-2}$ ч$^{-1}$, *4* — $H_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$, *5* — $H_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$, *6* — $H_0 = 10^{-3}$ ч$^{-1}$, *7* — $H_0 = H_1 = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, *8* — $H_1 = 10^{-6}$ ч$^{-1}$, *9* — $H_1 = 10^{-7}$ ч$^{-1}$

ние тонкостенной конструкции позволяет существенно (в несколько раз или на несколько порядков) уменьшить по модулю скорости прогибов по сравнению с изотропными конструкциями тех же размеров, выполненных из связующего материала. Для относительно толстых армированных пластин учет их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу при ползучести обязателен, в противном случае расчеты по классической теории Кирхгофа будут предсказывать существенно заниженную податливость металлокомпозитных тонкостенных конструкций в условиях установившейся ползучести. Использование различных структурных моделей, описывающих установившуюся ползучесть в армированных металлокомпозитных средах, приводит к принципиально разным рациональным проектам армирования пластин. Не всегда армирование по направлениям главных напряжений является наилучшим. Структурная модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах, в рамках которой моделируется неидеальный механический контакт арматуры со связующим, в некоторых случаях предсказывает завышенную податливость армированных пластин по сравнению с изотропными конструкциями, т. е. отсутствие эффекта армирования. Структурная модель [9], использованная в настоящей работе в качестве эталонной, учитывает пространственное напряженное состояние в арматуре и моделирует идеальную адгезию между арматурой и связующим, поэтому результаты всех расчетов, проведенных по данной модели, свидетельствуют об эффективности армирования. Согласно [9] в рамках указанной модели, в отличие от модели с одномерным напряженным состоянием в волокнах, можно дополнительно моделировать неидеальный механический контакт между фазовыми материалами. В этом случае параметры, характеризующие неидеальную адгезию, можно использовать в качестве исходных параметров данной структурной модели.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Янковский А. П.** Установившаяся ползучесть изгибаемых армированных металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 1. Модель деформирования // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 3. С. 154–163.
2. **Янковский А. П.** Исследование установившейся анизотропной ползучести слоистых металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 2. Модель деформирования // Механика композит. материалов. 2012. Т. 48, № 2. С. 279–302.
3. **Композиционные** материалы: Справ. / Под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985.
4. **Писаренко Г. С.** Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. Киев: Наук. думка, 1981.
5. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиц. материалов и конструкций. 1997. Т. 3, № 2. С. 20–40.
6. **Холл Дж.** Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. М.: Мир, 1979.
7. **Немировский Ю. В.** Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю. В. Немировский, Б. С. Резников. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
8. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
9. **Янковский А. П.** Моделирование механического поведения перекрестно армированных металлокомпозитов в условиях установившейся ползучести // Механика композиц. материалов и конструкций. 2011. Т. 17, № 3. С. 362–384.
10. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** Расчет продольно-поперечного изгиба сложно армированных металлокомпозитных пластин в условиях установившейся ползучести // Конструкции из композиц. материалов. 2009. № 3. С. 5–22.
11. **Янковский А. П.** Установившаяся ползучесть слоистых металлокомпозитных оболочек со сложными структурами армирования // Механика композиц. материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 3. С. 400–420.
12. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987.
13. **Васильев В. В.** Механика конструкций из композитных материалов. М.: Машиностроение, 1988.
14. **Немировский Ю. В., Янковский А. П.** О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. 2004. № 3. С. 91–113.
15. **Безухов Н. И.** Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н. И. Безухов, В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, А. М. Синюков. М.: Машиностроение, 1965.


*Поступила в редакцию 28/VI 2012 г.,*
*в окончательном варианте — 20/XI 2013 г.*