

УДК 517.928, 532.517.43, 532.527

ДВИЖЕНИЕ ТРЕХ ВИХРЕЙ С НУЛЕВОЙ СУММАРНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

А. И. Гудименко, А. Д. Захаренко

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: algud@poi.dvo.ru

Изучается движение в идеальной жидкости трех точечных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью. Численно исследованы траектории вихрей в широком диапазоне значений их интенсивностей при различных начальных положениях. Вычислены асимптотики движения вихрей в конфигурациях, близких к сингулярным и коллинеарной.

Ключевые слова: точечные вихри, вихревая динамика, динамические системы, асимптотический анализ, алгебраическая редукция.

Введение. Считается, что наиболее полное исследование проблемы движения трех точечных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью содержится в работе [1]. В этой работе на основе известных интегралов движения и элементарных геометрических представлений выполнена редукция исходной шестимерной гамильтоновой системы, описывающей движение вихрей, к двумерной динамической системе; исследованы положения равновесия этой системы и проведен асимптотический анализ движения вихрей вблизи положений равновесия. Со времени опубликования работы (1989 г.) какого-либо прогресса в изучении движения трех вихрей с нулевой суммарной интенсивностью не отмечалось. Он наметился лишь в последние годы при исследовании алгебраической структуры задачи о трех вихрях и при разработке адекватных методов анализа данной задачи. Так, в работе [2] предложен метод алгебраической редукции, раскрывающий Ли-алгебраическую структуру уравнений движения вихрей и делающий возможным применение методов алгебр Ли для их изучения. Важной особенностью метода является каноничность редуцированной системы, что делает естественным использование в задаче переменных угол — действие.

В настоящей работе, являющейся продолжением цикла работ по исследованию асимптотик движения трех вихрей [3–5], с использованием предложенной в [2] схемы редукции и варианта теории возмущений для гамильтоновых систем получены как результаты Н. Ротта [1], так и ряд новых. При этом вывод и представление результатов отличаются наглядностью и естественностью, отсутствующими в [1] вследствие использования неадекватного способа редукции.

1. Уравнения движения и первые интегралы. Движение трех точечных вихрей описывается гамильтоновой динамической системой

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad \dot{y}_i = \{y_i, H\} \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} (\gamma_1 \gamma_2 \ln m_3 + \gamma_2 \gamma_3 \ln m_1 + \gamma_3 \gamma_1 \ln m_2) \quad (2)$$

и скобкой Пуассона

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\gamma_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial y_i} \right). \quad (3)$$

Здесь x_i, y_i — декартовы координаты i -го вихря; γ_i — интенсивность i -го вихря; $m_i = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2$ — квадрат расстояния между вихрями, отличными от i -го. Помимо гамильтониана система (1) обладает тремя независимыми первыми интегралами

$$P = \sum_{i=1}^3 \gamma_i x_i, \quad Q = \sum_{i=1}^3 \gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^3 \gamma_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (4)$$

связанными с инвариантностью уравнений движения относительно сдвигов и поворотов системы координат. Интегралы (4) не находятся в инволюции, однако из них можно сконструировать пару инволютивных интегралов, например:

$$P^2 + Q^2, \quad D = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)I - P^2 - Q^2}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} = \frac{m_1}{\gamma_1} + \frac{m_2}{\gamma_2} + \frac{m_3}{\gamma_3}, \quad (5)$$

что позволяет понизить порядок системы на четыре единицы.

2. Редукция. Система (1)–(3) описывает абсолютное движение вихрей. С относительным движением вихрей ассоциируют редуцированную динамическую систему. Обозначим через $m_0 = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)$ удвоенную ориентированную площадь вихревого треугольника, через $F = 4m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1)$ — функцию, вытекающую из соотношения Герона, связывающего площадь треугольника с длинами его сторон.

Редуцированная система определяется как ограничение на симплектический лист $D = \text{const}$, $F = 0$ гамильтоновой системы с координатами m_0, m_1, m_2, m_3 , гамильтонианом (2) и скобкой Пуассона

$$\{m_i, m_j\} = -4a_k m_0, \quad \{m_0, m_i\} = (a_k - a_j)m_i + (a_j + a_k)(m_k - m_j),$$

где $a_i = \gamma_i^{-1}$ — обратная интенсивность i -го вихря; набор индексов (i, j, k) , если их диапазон не задан, принимает все циклические перестановки тройки чисел $(1, 2, 3)$. Данная скобка является линейной, соответствующая ей алгебра Ли называется вихревой алгеброй.

С помощью линейного преобразования вихревой алгебры симплектический лист в зависимости от знака величины $a = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$ трансформируется в эллипсоид ($a > 0$), параболоид ($a = 0$) или гиперboloид ($a < 0$). Рассматриваемому в настоящей работе случаю суммарной интенсивности вихрей, не равной нулю, соответствует значение $a = 0$.

3. Канонические координаты. Введем новые образующие вихревой алгебры

$$e_0 = \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3}{g}, \quad e_1 = \frac{m_0}{g}, \quad e_2 = \frac{m_3}{2g(a_1 + a_2)},$$

$$e_3 = -\frac{(a_1 + a_2)(m_1 - m_2) + (a_1 - a_2)m_3}{2g(a_1 + a_2)},$$

где $g \neq 0$ — произвольная константа. Непосредственно проверяется, что

$$\{e_0, e_i\} = 0, \quad \{e_1, e_2\} = g^{-1} e_3, \quad \{e_2, e_3\} = g^{-1} e_1, \quad \{e_3, e_1\} = -g^{-1} e_0 \quad (6)$$

и, поскольку $F = 0$,

$$e_1^2 + e_3^2 - 2e_0 e_2 = 0.$$

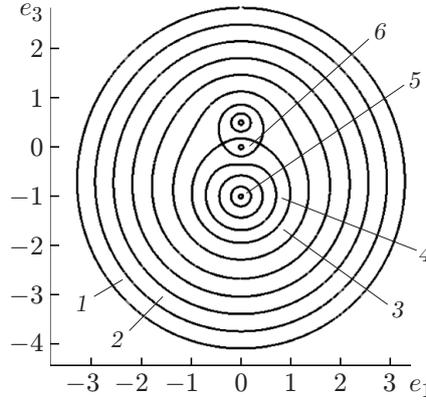


Рис. 1. Фазовый портрет редуцированной системы в нормированных канонических координатах при $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0,5, D = 1$:

1–6 — точки, соответствующие траекториям вихрей, показанным на рис. 2, а–е

Таким образом, в координатах e_1, e_2, e_3 фазовое пространство редуцированной системы представляет собой параболоид. Преобразование к исходным образующим выполняется по формулам

$$m_0 = ge_1, \quad m_1 = g \frac{e_0 + 2a_2^2 e_2 - 2a_2 e_3}{a_1 + a_2}, \quad m_2 = g \frac{e_0 + 2a_1^2 e_2 + 2a_1 e_3}{a_1 + a_2}; \quad (7)$$

$$m_3 = 2g(a_1 + a_2)e_2. \quad (8)$$

Проекция $(e_1, e_2, e_3) \rightarrow (e_1, e_3)$ превращает скобку (6) с точностью до множителя в каноническую

$$\{e_3, e_1\} = -g^{-1}e_0. \quad (9)$$

Далее будем считать $g = D$ и называть e_1, e_3 нормированными каноническими координатами.

Типичный фазовый портрет редуцированной системы в нормированных канонических координатах приведен на рис. 1. На фазовом портрете имеются три особые точки, расположенные на прямой $e_1 = 0$, и две гиперболические точки, соединенные сепаратрисой. Особым точкам, расположенным на прямой $e_1 = 0$, соответствуют сингулярные конфигурации вихрей, гиперболическим точкам — равнобедренные, коллинеарной конфигурации вихрей соответствует окружность с бесконечным радиусом, т. е. бесконечно удаленная точка расширенной фазовой плоскости. (Сингулярная конфигурация трех вихрей — это конфигурация, в которой два вихря бесконечно близки друг к другу, так что можно считать их слившимися. Коллинеарная конфигурация вихрей — это конфигурация, в которой вихри расположены на одной прямой.)

4. Связь абсолютных и относительных координат. Положим $x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j$. Справедливы соотношения

$$x_i P + y_i Q = (I - \gamma_k m_j - \gamma_j m_k)/2, \quad y_{ij} P - x_{ij} Q = \gamma_k m_0. \quad (10)$$

При $P = 0, Q \neq 0$ из соотношений (10) находим

$$x_{ij} = -\gamma_k m_0 / Q, \quad y_i = (I - \gamma_k m_j - \gamma_j m_k) / (2Q). \quad (11)$$

Таким образом, для восстановления абсолютных координат требуется одна квадратура. В качестве этой квадратуры может выступать, например, уравнение на x_3 из (1) с подстановкой y_{23}, y_{31} из соотношений (11).

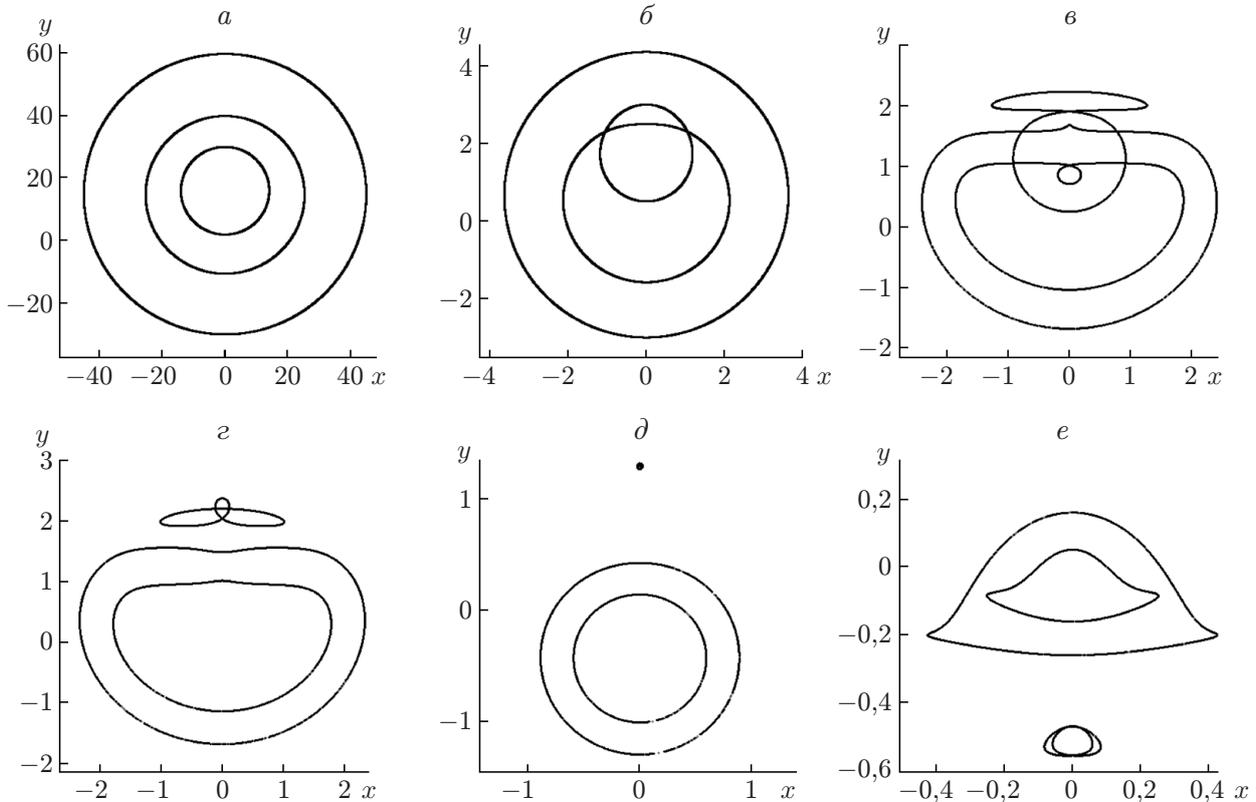


Рис. 2. Траектории вихрей в движущейся системе отсчета в декартовых координатах: *a, б* — конфигурации, близкие к коллинеарной, *в, г, е* — к равносторонней, *д* — к сингулярной

5. Численное моделирование. На рис. 2 представлены траектории вихрей, полученные в результате численного решения уравнений динамики (1)–(3) и соответствующие точкам фазового портрета редуцированной системы, показанным на рис. 1. Все приведенные траектории отнесены к системе отсчета, где вихри описывают замкнутые кривые [2]. Рис. 2 позволяет получить полное представление о характере траекторий движения вихрей при любом их начальном положении.

6. Движение в коллинеарной конфигурации. При $P = Q = 0$ абсолютная динамика восстанавливается по относительной динамике без квадратур. Этот случай соответствует движению вихрей в коллинеарной конфигурации.

Из соотношений (4), (10) находим

$$\gamma_i x_{ij} = \gamma_k x_{jk}, \quad \gamma_i y_{ij} = \gamma_k y_{jk}; \quad (12)$$

$$m_0 = 0, \quad m_i = -\gamma_i^2 I / (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3). \quad (13)$$

С использованием соотношений (12), (13) уравнения динамики вихрей (1)–(3) запишем в виде

$$\dot{x}_k = -\frac{\gamma_{ij}\gamma_k}{\gamma} \Omega y_{ij}, \quad \dot{y}_k = \frac{\gamma_{ij}\gamma_k}{\gamma} \Omega x_{ij}, \quad \Omega = -\frac{\gamma}{2\pi I} \quad (14)$$

или

$$\dot{x}_{ij} = \Omega y_{ij}, \quad \dot{y}_{ij} = -\Omega x_{ij}, \quad (15)$$

где $\gamma_{ij} = \gamma_i - \gamma_j$; $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_3 \gamma_1$. Считая, что при $t = 0$ вихри расположены на оси y , из соотношений (15) получаем

$$x_{ij} = A_{ij} \sin \Omega t, \quad y_{ij} = A_{ij} \cos \Omega t. \quad (16)$$

В силу (13) положим

$$A_{12} = \gamma_3 \sqrt{-\frac{I}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}. \quad (17)$$

Тогда из выражений (12), (16) следует, что остальные значения A_{ij} получаются из (17) путем циклической перестановки индексов. Интегрируя (14), окончательно получаем

$$x_k = r_k \sin \Omega t, \quad y_k = r_k \cos \Omega t + y_{k0},$$

где

$$r_k = -\frac{\gamma_{ij} \gamma_k^2}{\gamma} \sqrt{-\frac{I}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}},$$

y_{k0} — константы интегрирования, удовлетворяющие соотношениям (12).

Таким образом, вихри, образуя коллинеарную конфигурацию, вращаются с угловой скоростью Ω вокруг общего центра, расположенного на прямой, соединяющей эти вихри.

7. Относительное движение в окрестности сингулярной конфигурации. Процедура определения динамики вихрей в конфигурациях, близких к сингулярной и коллинеарной, состоит в следующем. Сначала путем вычисления асимптотики переменных угол — действие в окрестности соответствующей особой точки (нуля или бесконечности) определяется редуцированная динамика. Затем с использованием связи абсолютных и относительных координат находятся асимптотики абсолютного движения.

Найдем асимптотику переменных угол — действие (Θ, J) в окрестности сингулярной точки. Без потери общности ограничимся рассмотрением сингулярной точки, расположенной в центре системы нормированных канонических координат. Положим

$$e_1 = \rho \cos \varphi, \quad e_3 = \rho \sin \varphi \quad (18)$$

и примем, что траектория, близкая к сингулярной точке, задается разложением

$$\rho = \varepsilon + \rho_2 \varepsilon^2 + \rho_3 \varepsilon^3 + \rho_4 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5), \quad (19)$$

где ε — параметр разложения; ρ_i — функции φ . Примем также, что справедливо разложение

$$h = h_\infty \ln \varepsilon + h_0 + h_1 \varepsilon + \dots + O(\varepsilon^5), \quad (20)$$

где h_∞, h_i — константы. Коэффициенты разложений определим из условий

$$H(\rho, \varphi) = h; \quad (21)$$

$$J \equiv \frac{g}{4\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} g \varepsilon^2 + O(\varepsilon^6). \quad (22)$$

Подставляя (19), (20) в соотношения (21), (22), отделяя коэффициенты при одинаковых степенях ε и разрешая полученные уравнения, находим

$$h_\infty = -\frac{\gamma_1 \gamma_2}{2\pi}, \quad h_1 = h_2 = h_3 = 0, \quad h_4 = \frac{3\gamma_3^4}{16\pi\gamma_2^3\gamma_1^3},$$

$$\rho_2 = 0, \quad \rho_3 = \frac{\gamma_3^2 \cos 2\varphi}{2\gamma_1^2\gamma_2^2}, \quad \rho_4 = \frac{\gamma_{12}\gamma_3^2 \sin 3\varphi}{3\gamma_1^3\gamma_2^3}.$$

Производящая функция преобразования к переменным угол — действие и угловая переменная определяются соотношениями

$$S = \frac{g}{2} \int_{\pi/2}^{\varphi} \rho^2 d\varphi, \quad \theta = -\frac{\partial S}{\partial J} = -\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} / \frac{\partial J}{\partial \varepsilon},$$

в которых значение $\pi/2$ для нижнего предела интегрирования выбрано для удобства. Опуская выражение для S , имеем

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\gamma_3^2 \sin 2\varphi}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \varepsilon^2 + \frac{5\gamma_{12}\gamma_3^2 \cos 3\varphi}{9\gamma_1^3 \gamma_2^3} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

Окончательно связь канонических координат с координатами угол — действие задается соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\gamma_3^2 \sin 2\theta}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \varepsilon^2 - \frac{5\gamma_{12}\gamma_3^2 \sin 3\theta}{9\gamma_1^3 \gamma_2^3} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\ \rho &= \varepsilon + \frac{\gamma_3^2 \cos 2\theta}{2\gamma_1^2 \gamma_2^2} \varepsilon^3 + \frac{\gamma_{12}\gamma_3^2 \sin 3\theta}{3\gamma_1^3 \gamma_2^3} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) \end{aligned}$$

вместе с соотношениями (18), (22). Используя выражение для гамильтониана в переменных угол — действие, находим частоту относительного движения трех вихрей

$$\omega \equiv \frac{\partial h}{\partial J} = -\frac{\gamma_1 \gamma_2}{2\pi g} \varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^2).$$

8. Абсолютное движение в окрестности сингулярной конфигурации. В предположении $P = 0$ для нормированных на g/Q декартовых координат первого и третьего вихрей имеем следующие выражения:

$$\bar{x}_1 = \bar{v}t + \gamma_2 \sin \theta \varepsilon + \frac{\gamma_3^2 (\sin 3\theta + 3 \sin \theta)}{4\gamma_1^2 \gamma_2} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4); \quad (23)$$

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_0 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} + \gamma_2 \cos \theta \varepsilon + \frac{\gamma_3^2 (\cos 3\theta - 3 \cos \theta)}{4\gamma_1^2 \gamma_2} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4); \quad (24)$$

$$\bar{x}_3 = \bar{v}t - \frac{\gamma_3^2 \sin 2\theta}{2\gamma_1^2 \gamma_2^2} \varepsilon^4 - \frac{\gamma_{12}\gamma_3^2 \sin 3\theta}{3\gamma_1^3 \gamma_2^3} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^6); \quad (25)$$

$$\bar{y}_3 = \bar{y}_0 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} + \frac{\gamma_3^2 \cos 2\theta}{2\gamma_1^2 \gamma_2^2} \varepsilon^4 + \frac{\gamma_{12}\gamma_3^2 \cos 3\theta}{3\gamma_1^3 \gamma_2^3} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^6). \quad (26)$$

Здесь

$$\bar{v} = \frac{\gamma_3^2}{2\pi g} - \frac{3\gamma_3^4}{4\pi g \gamma_1^3 \gamma_2^3} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6), \quad \bar{y}_0 = \frac{1}{2} g^{-1} I - \frac{1}{2} \varepsilon^2,$$

чертой отмечены нормированные величины. Выражения для координат второго вихря аналогичны выражениям (23), (24) с проведенными в них циклической заменой индексов 1 и 2 и поворотом θ на угол π . При этом константа интегрирования, общая для всех горизонтальных координат, полагается равной нулю.

Анализируя начальные приближения координат, можно сделать вывод, что в системе отсчета, движущейся вдоль оси x со скоростью v , первые два вихря вращаются с угловой

скоростью ω по окружностям вокруг своего центра интенсивностей, а третий вихрь вращается со скоростью 2ω вокруг точки, расположенной на расстоянии $\bar{r} = \gamma_1\gamma_2$ от первых двух вихрей. С учетом (5) для угловой скорости ω получаем соотношение

$$\omega = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\pi(r_1 + r_2)^2},$$

совпадающее с выражением для угловой скорости вращения двух свободных вихрей. Это свидетельствует о том, что третий вихрь не оказывает влияния на первые два вихря.

Для анализа последующих приближений для каждого вихря перейдем в систему отсчета, в которой в начальном приближении вихрь покоится. В системе отсчета, вращающейся со скоростью ω вокруг центра интенсивностей первых двух вихрей, с точностью до ε^4 имеем

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{\gamma_3^2 \sin 2\theta}{\gamma_1^2 \gamma_2} \varepsilon^3, & \bar{y}_1 &= \gamma_2 \varepsilon - \frac{\gamma_3^2 \cos 2\theta}{2\gamma_1^2 \gamma_2} \varepsilon^3, \\ \bar{x}_2 &= -\frac{\gamma_3^2 \sin 2\theta}{\gamma_1 \gamma_2^2} \varepsilon^3, & \bar{y}_2 &= -\gamma_1 \varepsilon + \frac{\gamma_3^2 \cos 2\theta}{2\gamma_1 \gamma_2^2} \varepsilon^3, \end{aligned}$$

т. е. вихри вращаются со скоростью 2ω по эллипсам с эксцентриситетом $1/2$. При переходе в систему отсчета, вращающуюся со скоростью 2ω вокруг точки с координатами

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -\gamma_1\gamma_2/2 + \bar{A}\varepsilon^5$$

(\bar{A} — произвольная константа), для третьего вихря с точностью до ε^6 получаем

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= -\frac{3\gamma_1^3\gamma_2^3\bar{A}\sin 2\theta + \gamma_{12}\gamma_3^2\sin \theta}{3\gamma_1^3\gamma_2^3} \varepsilon^5, \\ \bar{y}_3 &= \frac{\gamma_3^2}{2\gamma_1^2\gamma_2^2} \varepsilon^4 - \frac{3\gamma_1^3\gamma_2^3\bar{A}\cos 2\theta - \gamma_{12}\gamma_3^2\cos \theta}{3\gamma_1^3\gamma_2^3} \varepsilon^5. \end{aligned}$$

При варьировании значений $|A|$ от нуля до достаточно больших предельным траекториям соответствуют окружности, а совокупность промежуточных траекторий включает траектории, приведенные на рис. 3, а, б. Траекториям на рис. 3, а, б соответствуют значения $A = A_1$; $A = A_1/2$, где $\bar{A}_1 = \gamma_{12}\gamma_3^2/(6\gamma_1^3\gamma_2^3)$.

При $\gamma_1 = \gamma_2$ в разложениях (25), (26) члены порядка ε^5 исчезают. В этом случае в системе отсчета, вращающейся со скоростью 2ω вокруг точки с координатами

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = -\gamma_1\gamma_2/2 + \bar{A}\varepsilon^6,$$

имеем

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{(\gamma_1^4\bar{A} + 11)\sin 2\theta}{\gamma_1^4} \varepsilon^6 - \frac{16\sin 4\theta}{\gamma_1^6} \varepsilon^8, \\ y_3 &= \frac{2}{\gamma_1^2} \varepsilon^4 - \frac{(\gamma_1^4\bar{A} + 5)\cos 2\theta}{\gamma_1^4} \varepsilon^6 - \frac{2(\cos 4\theta - 12)}{\gamma_1^6} \varepsilon^8. \end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом, траектория вихря представляет собой эллипс. При $\bar{A} = -5/\gamma_1^4$ второе слагаемое в выражении (27) исчезает, соответствующая траектория приведена на рис. 3, в.

9. Относительное движение в окрестности коллинеарной конфигурации. Алгоритм вычисления переменных угол — действие на периферии фазовой плоскости совпадает с соответствующим аналогичным алгоритмом в окрестности сингулярной точки. Различаются данные и результаты.

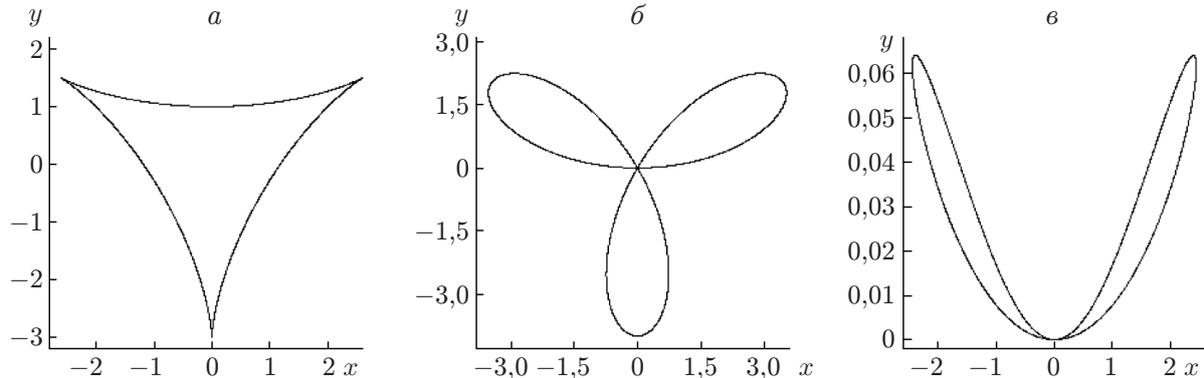


Рис. 3. Траектория движения третьего вихря в специальной системе отсчета в декартовых координатах:

a, б — $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0,5, D = 1$, начальные координаты $x_{10} = x_{20} = 0, y_{10} = -y_{20} = 0,003$ (*a* — $A = A_1, б$ — $A = A_1/2$), *в* — $\gamma_1 = \gamma_2 = 1, D = 1, x_{10} = x_{20} = 0, y_{10} = -y_{20} = 0,01, \bar{A} = -5/\gamma_1^4$

Положим, что в полярных координатах выражения для фазовых кривых принимают вид

$$\rho = 1/\varepsilon + \rho_0 + \rho_1\varepsilon + \rho_2\varepsilon^2 + \rho_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad (28)$$

гамильтониан допускает разложение

$$h = h_\infty \ln \varepsilon + h_0 + h_2\varepsilon^2 + h_4\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6), \quad (29)$$

а действие связано с малым параметром соотношением

$$J = \frac{g}{2\varepsilon^2} + O(\varepsilon^3). \quad (30)$$

Используя формулы (28)–(30), находим

$$\rho_0 = \frac{\gamma_{12}\gamma_3^2 \sin \varphi}{\gamma}, \quad \rho_1 = -\frac{(\gamma_1^4 + 4\gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_2^4)\gamma_3^2 \cos 2\varphi + \gamma_{12}^2\gamma_3^4}{4\gamma^2}; \quad (31)$$

$$\rho_2 = -\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_{12}(\gamma_{12}^2 \sin 3\varphi + 9\gamma_3^2 \sin \varphi)}{6\gamma^3}; \quad (32)$$

$$h_\infty = \frac{\gamma}{2\pi}, \quad h_2 = 0, \quad h_4 = -\frac{9\gamma_1^4\gamma_2^4\gamma_3^4}{16\pi\gamma^3}; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{2}\pi - \theta + \frac{\gamma_{12}\gamma_3^2 \sin \theta}{\gamma} \varepsilon - \frac{\gamma_{12}^2\gamma_3^4 \sin 2\theta}{2\gamma^2} \varepsilon^2 - \\ - \frac{\gamma_{12}\gamma_3^2}{2\gamma^3} \left[\gamma_{23}\gamma_{31} \left(\frac{1}{3}\gamma^2 - \frac{5}{6}\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 + \frac{1}{9}\gamma_1^2\gamma_2^2 \right) \sin 3\theta - \frac{3}{2}\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2 \sin \theta \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (34)$$

Выражение для r_3 вследствие громоздкости опускается.

Дифференцируя гамильтониан (29), (33) по J , находим частоту относительного движения

$$\omega = -\frac{\gamma}{2\pi g} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^6). \quad (35)$$

10. Абсолютное движение в окрестности коллинеарной конфигурации. Повторяя процедуру вычисления абсолютных координат вихрей в конфигурации, близкой к сингулярной, с использованием для относительных координат выражений (28), (30)–(32), (34), с точностью до ε^3 получаем

$$\begin{aligned} \bar{y}_3 + i\bar{x}_3 = \bar{y}_{30} - \frac{\gamma_{12}\gamma_3^2 e^{i\omega t}}{\gamma\varepsilon} - \frac{3\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2 e^{i2\omega t}}{2\gamma^2} - \frac{\gamma_{12}\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2((7\gamma - 15\gamma_1\gamma_2) e^{3i\omega t} + 9\gamma_3^2 e^{-i\omega t})}{12\gamma^3} \varepsilon + \\ + \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2}{\gamma^4} \left[\left(\frac{13}{36} \gamma^3 - \frac{4}{9} \gamma_1\gamma_2\gamma^2 - \frac{61}{24} \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma + \frac{93}{24} \gamma_1^3\gamma_2^3 \right) e^{4i\omega t} - \frac{2}{9} \gamma_3^2\gamma_{12}^2\gamma_{31}\gamma_{23} e^{-2i\omega t} \right] \varepsilon^2, \end{aligned}$$

где

$$\bar{y}_{30} = \frac{1}{2} g^{-1} I - \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} + \frac{\gamma^3 - 5\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma + 3\gamma_1^3\gamma_2^3}{2\gamma^2}.$$

Координаты остальных вихрей получаем циклической перестановкой индексов.

В рассматриваемых приближениях горизонтальная прецессия вихрей отсутствует. С помощью вычислений, проведенных с большей точностью, для скорости прецессии находим

$$v = \frac{\gamma_1^4\gamma_2^4\gamma_3^4}{\pi\gamma^3 Q} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5).$$

Из полученных выражений для координат следует, что в начальном приближении вихри, образуя коллинеарную конфигурацию, вращаются с угловой скоростью (35) вокруг точки

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = g^{-1} I / 2 - \varepsilon^{-2} / 2 \quad (36)$$

на расстоянии от этой точки, равном

$$\bar{r}_k = -\gamma_{ij}\gamma_k^2 / (\gamma\varepsilon).$$

Если в (36) принять $y \sim 0$, что эквивалентно условию

$$\varepsilon \sim \sqrt{g/I}, \quad (37)$$

то полученная динамика вихрей будет совпадать с рассмотренной выше при $P = Q = 0$. Асимптотика (37) дает представление о соотношении интегралов D и I , при котором реализуется конфигурация, близкая к коллинеарной. Такая конфигурация реализуется при любых значениях импульса вихрей, а не только при малых, как в работе [1].

Для описания движения с учетом следующего приближения перейдем во вращающуюся со скоростью ω систему отсчета, в которой вихри в начальном приближении покоятся, а в качестве центра вращения может использоваться любая точка с координатами

$$x = 0, \quad y = A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C$$

(A, B, C — произвольные константы). В такой системе отсчета с точностью до ε имеем

$$x_k = A_k \sin \omega t, \quad \bar{y}_k = -\gamma_{ij}\gamma_k^2 / (\gamma\varepsilon) + \bar{B}_k \cos \omega t,$$

где

$$\bar{B}_3 = -\bar{A} + (\gamma_1^4 + 2\gamma_1^3\gamma_2 + \gamma_1^2\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2^3 + \gamma_2^4) / (2\gamma),$$

остальные коэффициенты находятся из соотношений

$$\bar{A}_k + \bar{B}_k = -3\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2 / \gamma^2, \quad \bar{A}_i - \bar{A}_j = -\gamma_{ij}\gamma_k^3 / \gamma, \quad (38)$$

не зависящих от смещения A , определяющего систему отсчета.

Таким образом, в любой из указанных систем отсчета вихри вращаются со скоростью ω по эллипсам. Направления вращений зависят от интенсивностей, интегралов и смещения A и могут быть произвольными. В соответствии с (39) инвариантом по отношению к смещению и номеру вихря является величина, равная $\alpha + (-1)^s \beta$, где α, β — соответственно большая и малая оси эллипса; $s = 0; 1$ в зависимости от направления вращения вихря.

На рис. 4 приведены траектории вихрей во вращающейся системе отсчета при различных смещениях A , отнесенные к одному центру.

В случае если длина вертикальной оси одного из эллипсов равна нулю, для описания движения вихря требуются дополнительные члены асимптотик. При $B_3 = 0$ имеем

$$\bar{x}_3 = -\frac{3\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2 \sin \omega t}{\gamma^2} + O(\varepsilon),$$

$$\bar{y}_3 = -\frac{\gamma_{ij}\gamma_k^2}{\gamma\varepsilon} - \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_{12}^3 \cos 2\omega t + 6\bar{B}\gamma^3 \cos \omega t}{6\gamma^3} \varepsilon -$$

$$-\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2(\gamma^3/12 + 2\gamma_1\gamma_2\gamma^2/3 - \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma/8 - 15\gamma_1^3\gamma_2^3/8) \cos 3\omega t + \bar{C}\gamma^4 \cos \omega t}{\gamma^4} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

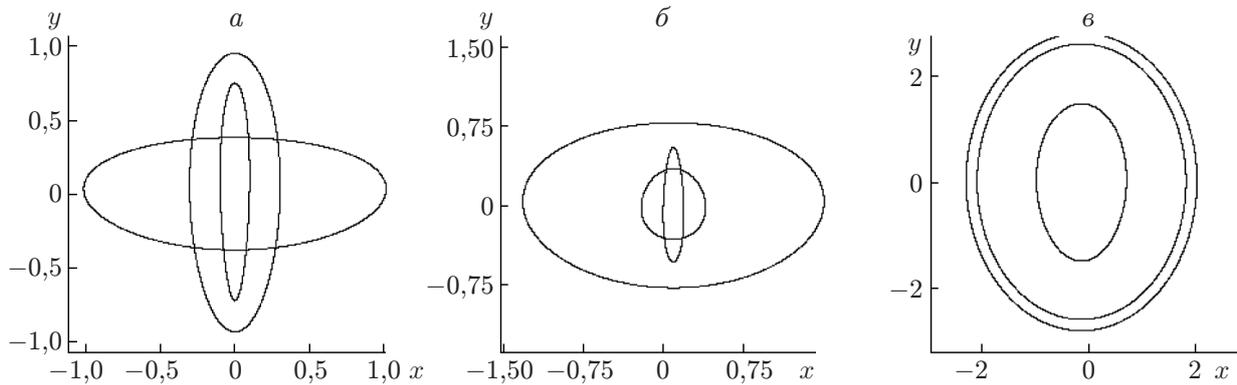


Рис. 4. Траектории движения вихрей в специальных системах отсчета в декартовых координатах при $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0,5, D = 1, x_{10} = x_{20} = 0, y_{10} = -y_{20} = 20$ и различных смещениях A :

a — $A = -5, b$ — $A = 10, v$ — $A = 100$

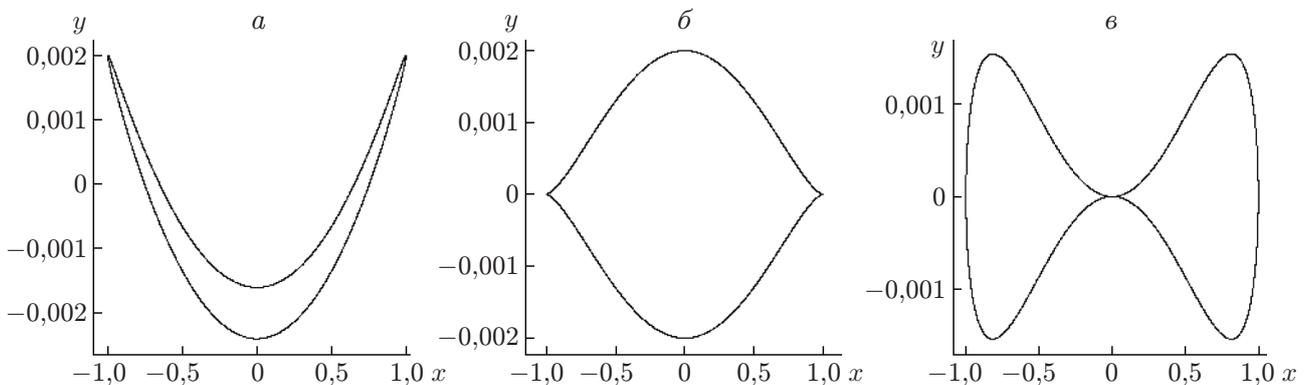


Рис. 5. Траектория движения третьего вихря в специальной системе отсчета в декартовых координатах:

a — $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0,25, D = 10; b$ — $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0,85, D = 1; v$ — $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2,5, D = 1$

Если интенсивности γ_1, γ_2 существенно различаются, в последнем выражении можно пренебречь членом, содержащим ε^2 . В этом случае траектория движения вихря варьируется от параболы при $B = 0$ до эллипса при достаточно больших $|B|$. Промежуточная траектория приведена на рис. 5,а. Если интенсивности γ_1, γ_2 близки и $B = 0$, слагаемое с ε можно не учитывать. В этом случае при варьировании C траектория вихря изменяется от эллипса до эллипса включая траектории, показанные на рис. 5,б,в. Траекториям, показанным на рис. 5,б,в, соответствуют значения C , при которых отношения амплитуд третьей и первой гармоник в выражении для y_3 равны $1/1$ и $-1/3$ соответственно. В декартовых координатах при должной нормировке эти траектории задаются уравнениями

$$y^2 = (1 - x^2)^3, \quad y^2 = x^4(1 - x^2).$$

Следует отметить, что уравнения данного вида возникают также при описании движения трех вихрей, в случае если траектория одного из них проходит через центр завихренности [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rott N.** Three-vortex motion with zero total circulation // *Z. angew. Math. und Phys.* 1989. Bd 40, N 4. S. 473–494.
2. **Борисов А. В.** Математические методы динамики вихревых структур / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2005.
3. **Гудименко А. И.** Динамика трех вихрей в возмущенной сингулярной конфигурации // *Нелинейная динамика.* 2008. Т. 4, № 2. С. 429–441.
4. **Gudimenko A. I.** Dynamics of perturbed equilateral and collinear configurations of three point vortices // *Regular Chaotic Dynamics.* 2008. V. 13, N 2. P. 85–95.
5. **Гудименко А. И., Купцов К. Г.** Движение трех точечных вихрей в случае, если один из них проходит через центр завихренности // *Вестн. Удмурт. гос. ун-та.* 2009. Вып. 2. С. 38–52.

Поступила в редакцию 19/V 2009 г.