

УДК 512.816:532.529.2

## ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ

И. И. Рыжков, И. В. Степанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск  
E-mails: rii@icm.krasn.ru, stepiv@icm.krasn.ru

Рассматривается модель вибрационной конвекции бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии. Найдены симметрии уравнений модели в зависимости от значений физических параметров. Построено и исследовано частично инвариантное решение, описывающее разделение бинарной смеси в термодиффузионной колонне. Исследовано влияние продольных вибраций на режим течения и разделение смеси.

**Ключевые слова:** вибрационная конвекция, бинарная смесь, термодиффузия, групповая классификация, частично инвариантные решения.

**Введение.** Вибрационной конвекцией называется движение, возникающее в жидкости с градиентом плотности под действием внешней вибрации [1]. Если период колебаний значительно меньше характерных времен (вязкого, теплового, диффузионного), то говорят о вибрациях высокой частоты. В этом случае движение можно разделить на две составляющие — “быструю”, которая осциллирует с частотой внешнего воздействия, и “медленную”, осредненную по времени. Метод осреднения впервые применен к задачам конвекции в работе [2]. Заметим, что вибрационная конвекция является одним из механизмов теплообмена в невесомости и может использоваться для управления поведением жидкостей в космосе.

Если жидкость является бинарной смесью, то градиент плотности может быть обусловлен как градиентом температуры, так и градиентом концентрации. Теплообмен в смесях определяется такими процессами, как конвекция, теплопроводность, диффузия и термодиффузия (разделение смеси под действием градиента температуры, называемое также эффектом Соре).

Результаты теоретических и экспериментальных исследований вибрационной конвекции в однородной жидкости в условиях микрогравитации представлены в [3, 4]. Поведение бинарных смесей с учетом эффекта Соре под действием вибрации изучалось в работах, посвященных исследованию устойчивости механического равновесия в плоском слое [5], устойчивости стационарной конвекции в вертикальном слое [6], а также влияния вибрации на процесс разделения смеси в кубической полости [7].

Следует отметить, что модель конвекции бинарной смеси с термодиффузией в отсутствие внешней вибрации исследовалась с помощью методов группового анализа дифференциальных уравнений [8]. Проведена групповая классификация уравнений для случаев линейной зависимости плотности от температуры и концентрации [9, 10], а также для произвольной зависимости плотности от температуры, концентрации и давления [11]. Кроме

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-299.2009.1) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 65.

того, построены точные решения, описывающие течения бинарной смеси в плоских [12] и цилиндрических [13] слоях.

В данной работе изучаются групповые свойства уравнений вибрационной конвекции бинарной смеси с учетом эффекта Соре. Строится и исследуется частично инвариантное решение, описывающее вибрационную конвекцию в термодиффузионной колонне (экспериментальной установке для измерения коэффициентов переноса и разделения смесей [14]).

**1. Уравнения модели.** Рассмотрим бинарную смесь с уравнением состояния

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T T - \beta_C C),$$

где  $\rho_0$  — плотность смеси при средних значениях температуры  $T_0$  и концентрации  $C_0$ ;  $T$ ,  $C$  — отклонения от средних значений температуры и концентрации;  $\beta_T$  и  $\beta_C > 0$  — коэффициенты теплового и концентрационного расширений соответственно. Предполагается, что  $C$  — концентрация легкого компонента.

Пусть бинарная смесь находится в поле внешней силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ . Рассмотрим вибрации высокой частоты, период которых  $\tau = 2\pi/\omega$  существенно меньше характерных времен системы:

$$\tau \ll \min(L^2/\nu, L^2/\chi, L^2/D).$$

Здесь  $L$  — характерный размер;  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $D$  — кинематическая вязкость, температуропроводность и коэффициент диффузии соответственно. В этом случае поля скорости, давления, температуры и концентрации можно представить в виде суммы двух составляющих: осредненной (получается с помощью осреднения данной величины по периоду колебаний) и пульсационной (представляет собой разность данной величины и ее осредненного значения). В предположении, что амплитуда колебаний достаточно мала (см. [1]), уравнения для осредненных компонент представляются в виде

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - (\beta_T T + \beta_C C) \mathbf{g} + (1/2)(A\omega)^2 [((\beta_T T + \beta_C C) \mathbf{e} - \nabla \Phi) \cdot \nabla] \nabla \Phi; \quad (1)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T; \quad (2)$$

$$\partial_t C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D \nabla^2 C + D_T \nabla^2 T; \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (4)$$

$$\nabla^2 \Phi - (\beta_T \nabla T + \beta_C \nabla C) \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (5)$$

а пульсационные компоненты определяются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= -A\omega \sin(\omega t) \mathbf{w}, & p' &= -\rho_0 A \omega^2 \cos(\omega t) \Phi, \\ T' &= -A \cos(\omega t) \mathbf{w} \cdot \nabla T, & C' &= -A \cos(\omega t) \mathbf{w} \cdot \nabla C. \end{aligned}$$

Вектор  $\mathbf{w}$  и функция  $\Phi$ , характеризующие амплитуды колебаний скорости и давления соответственно, связаны с разложением вектора  $(\beta_T T + \beta_C C) \mathbf{e}$  на безвихревой вектор  $\nabla \Phi$  и соленоидальный вектор  $\mathbf{w}$  с равной нулю проекцией на нормаль  $\mathbf{n}$  к границе области движения  $\Gamma$ :

$$(\beta_T T + \beta_C C) \mathbf{e} = \mathbf{w} + \nabla \Phi; \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

В системе (1)–(5)  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  — вектор координат;  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор скорости;  $p$  — отклонение осредненного давления от гидростатического;  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$  — вектор

ускорения постоянной внешней силы;  $D_T$  — коэффициент термодиффузии. При нормальной ( $D_T < 0$ ) или аномальной ( $D_T > 0$ ) термодиффузии легкий компонент накапливается в более нагретой или более холодной области соответственно.

**2. Групповая классификация.** Система (1)–(5) содержит 15 произвольных параметров (включая компоненты векторов  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{e}$ ). Поставим задачу групповой классификации уравнений модели относительно этих параметров. Предположим, что постоянные  $\mathbf{g}$ ,  $\beta_T$ ,  $\beta_C$ ,  $D_T$  могут обращаться в нуль при отсутствии соответствующих членов в уравнениях. В то же время будем считать, что  $\beta_T^2 + \beta_C^2 \neq 0$  (в противном случае из (5)–(7) следует, что  $\Phi = 0$ , и уравнения (1)–(4) сводятся к модели конвекции бинарной смеси, групповые свойства которой изучены в [9, 10]). Кроме того, предполагается, что  $|\mathbf{e}| \neq 0$ , а величины  $\rho_0$ ,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $D$ ,  $A$ ,  $\omega$  положительны. Далее, если  $f(\mathbf{x}, t)$  является некоторой функцией, то ее производные обозначаются в соответствии с равенствами

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_i, \quad \frac{\partial f}{\partial t \partial x^i} = f_{ti}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} = f_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой, будем искать в виде

$$X = \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \eta^p \frac{\partial}{\partial p} + \eta^T \frac{\partial}{\partial T} + \eta^C \frac{\partial}{\partial C} + \eta^\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi},$$

считая, что его компоненты зависят от всех зависимых и независимых переменных (по повторяющимся индексам  $i = 1, 2, 3$  проводится суммирование). Для формирования определяющих уравнений необходимо подействовать продолженным оператором  $\bar{X}_2$  на уравнения (1)–(5) и перейти на многообразие, задаваемое системой. Так как рассматриваемые уравнения не находятся в инволюции, выделение внешних и внутренних переменных затруднено. Добавим к системе ее дифференциальное следствие

$$(\nabla \mathbf{u})^2 + 2(u_2^1 u_1^2 + u_3^1 u_1^3 + u_3^2 u_2^3) + \rho_0^{-1} \nabla^2 p + \nabla J \cdot \mathbf{g} + (1/2)(A\omega)^2 [\Phi_{11}^2 + \Phi_{22}^2 + \Phi_{33}^2 + 2(\Phi_{12}^2 + \Phi_{13}^2 + \Phi_{23}^2) - \nabla J \cdot (\Upsilon \mathbf{e}) + (\nabla \Phi - J \mathbf{e}) \cdot (\Upsilon^* \mathbf{e})] = 0. \quad (8)$$

Здесь  $J = \beta_T T + \beta_C C$ ;  $\Upsilon$ ,  $\Upsilon^*$  — матрицы вторых производных с компонентами  $\{\Upsilon\}_{ij} = \Phi_{ij}$ ,  $\{\Upsilon^*\}_{ij} = J_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Равенство (8) получаем в результате дифференцирования уравнений (1) по  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  соответственно с использованием (4), (5). При переходе на многообразие также будем учитывать дифференциальные следствия из уравнения (4)

$$u_{t1}^1 + u_{t2}^2 + u_{t3}^3 = 0, \quad u_{1i}^1 + u_{2i}^2 + u_{3i}^3 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Поскольку система (1)–(5), (8), (9) находится в инволюции, нетрудно выбрать внешние переменные  $u_{11}^1$ ,  $u_{11}^2$ ,  $u_{11}^3$ ,  $p_{11}$ ,  $T_{11}$ ,  $C_{11}$ ,  $\Phi_{11}$ ,  $u_1^1$ ,  $u_{t3}^3$ ,  $u_{13}^3$ ,  $u_{23}^3$ ,  $u_{33}^3$ . Действуя продолженным оператором  $\bar{X}_2$  на систему и подставляя выражения для внешних переменных в полученные уравнения, находим систему определяющих уравнений. После значительных преобразований ее решение представляется в виде

$$\begin{aligned} \xi^t &= 2c_4 t + c_0, \\ \xi^1 &= c_4 x^1 + c_1 x^2 + c_2 x^3 + f^1(t), & \eta^1 &= -c_4 u^1 + c_1 u^2 + c_2 u^3 + f_t^1(t), \\ \xi^2 &= -c_1 x^1 + c_4 x^2 + c_3 x^3 + f^2(t), & \eta^2 &= -c_1 u^1 - c_4 u^2 + c_3 u^3 + f_t^2(t), \\ \xi^3 &= -c_2 x^1 - c_3 x^2 + c_4 x^3 + f^3(t), & \eta^3 &= -c_2 u^1 - c_3 u^2 - c_4 u^3 + f_t^3(t), \\ \eta^p &= -\rho_0 (f_{tt}^1(t) x^1 + f_{tt}^2(t) x^2 + f_{tt}^3(t) x^3 + (\beta_T c_5 + \beta_C c_6)(g_1 x^1 + g_2 x^2 + g_3 x^3)) - 2c_4 p + f^0(t), \\ \eta^T &= c_7 T + c_9 C + c_5, & \eta^C &= c_8 T + c_{10} C + c_6, \\ \eta^\Phi &= (\beta_T c_5 + \beta_C c_6)(e_1 x^1 + e_2 x^2 + e_3 x^3) + \varphi(t). \end{aligned} \quad (10)$$

## Результаты групповой классификации модели

Основная алгебра			Операторы $X_0, H_i, H_0, H_\Phi, U_T, U_C$			Дополнительные операторы	
$D_T$	$\beta_T$	$\beta_C$	$\mathbf{g} \times \mathbf{e} \neq 0$	$\mathbf{g} \times \mathbf{e} = 0, \mathbf{g} \neq 0$	$\mathbf{g} = 0$	$D = \chi$	$D_T = D_T^*$
0	0	$\neq 0$	$T^1$	$T^1, X_R$	$T^1, X_R, Z_C$	$T^2$	—
0	$\neq 0$	0	$C^1$	$C^1, X_R$	$C^1, X_R, Z_T$	$C^2$	—
0	$\neq 0$	$\neq 0$	—	$X_R$	$X_R, Z$	$R_1, R_2$	—
$\neq 0$	0	$\neq 0$	—	$X_R$	$X_R, Z$	—	—
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$L$	$L, X_R$	$L, X_R, Z_T^* (D \neq \chi)$	$Z$	—
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	—	$X_R$	$X_R, Z (D_T \neq D_T^*)$	—	$R_1, Z_C^*$

Здесь  $c_0, \dots, c_{10}$  — групповые константы;  $f^i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ),  $\varphi(t)$  — произвольные гладкие функции. Групповые константы связаны с параметрами данной модели с помощью системы классифицирующих уравнений

$$\begin{aligned}
(\beta_T(c_7 + 3c_4) + \beta_C c_8)\mathbf{g} + \beta_T G\mathbf{c} &= 0, & (\beta_T c_9 + \beta_C(c_{10} + 3c_4))\mathbf{g} + \beta_C G\mathbf{c} &= 0, \\
(\beta_T(c_7 + c_4) + \beta_C c_8)\mathbf{e} + \beta_T E\mathbf{c} &= 0, & (\beta_T c_9 + \beta_C(c_{10} + c_4))\mathbf{e} + \beta_C E\mathbf{c} &= 0, \\
E^*\mathbf{c} &= 0, & D_T \beta_C (e_1(c_4 + c_{10}) - e_2 c_1 - e_3 c_2) &= 0, \\
D_T(c_{10} - c_7) + (\chi - D)c_8 &= 0, & D_T c_9 &= 0, & (\chi - D)c_9 &= 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -g_2 & -g_3 & 0 \\ g_1 & 0 & -g_3 \\ 0 & g_1 & g_2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -e_2 & -e_3 & 0 \\ e_1 & 0 & -e_3 \\ 0 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}, \quad E^* = \begin{pmatrix} e_1^2 + e_2^2 & e_2 e_3 & -e_1 e_3 \\ e_2 e_3 & e_1^2 + e_3^2 & e_1 e_2 \\ -e_1 e_3 & e_1 e_2 & e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}.$$

С использованием формул (10) и системы (11) выделим алгебры операторов, допускаемые уравнениями модели в зависимости от значений входящих в нее параметров. Результаты групповой классификации модели приведены в таблице. Указанные в таблице операторы имеют вид

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_{ij} &= x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial}{\partial u^j} - u^j \frac{\partial}{\partial u^i}, & H_0(f^0(t)) &= f_0(t) \frac{\partial}{\partial p}, \\
H_i(f^i(t)) &= f^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} + f_t^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f_{tt}^i(t) \frac{\partial}{\partial p}, & i, j &= 1, 2, 3 \quad (i < j), \\
H_\Phi(\varphi(t)) &= \varphi(t) \frac{\partial}{\partial \Phi}, & Z_0 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) - 2p \frac{\partial}{\partial p}, \\
U_T &= -\rho_0 \beta_T (g_1 x^1 + g_2 x^2 + g_3 x^3) \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T} + \beta_T (e_1 x^1 + e_2 x^2 + e_3 x^3) \frac{\partial}{\partial \Phi}, \\
U_C &= -\rho_0 \beta_C (g_1 x^1 + g_2 x^2 + g_3 x^3) \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C} + \beta_C (e_1 x^1 + e_2 x^2 + e_3 x^3) \frac{\partial}{\partial \Phi}, \\
T^1 &= T \frac{\partial}{\partial T}, & T^2 &= C \frac{\partial}{\partial T}, & C^1 &= C \frac{\partial}{\partial C}, & C^2 &= T \frac{\partial}{\partial C}, \\
Z_T &= Z_0 - T^1, & Z_C &= Z_0 - C^1, & Z &= Z_0 - T^1 - C^1,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$Z_T^* = Z_T + \frac{D_T}{D - \chi} C^2, \quad Z_C^* = Z_C - \frac{D_T}{D - \chi} C^2, \quad L = (D_T T + (D - \chi) C) \frac{\partial}{\partial C},$$

$$R_1 = T^1 - \frac{\beta_T}{\beta_C} C^2, \quad R_2 = C^1 - \frac{\beta_C}{\beta_T} T^2, \quad X_R = e_3 X_{12} - e_2 X_{13} + e_1 X_{23}.$$

Операторы  $X_0, H_i, H_0, H_\Phi, U_T, U_C$  допускаются системой независимо от значений параметров и образуют основную алгебру Ли, которая может быть расширена (см. таблицу). В графах 1–3 указаны значения постоянных  $D_T, \beta_T, \beta_C$ . Операторы, допускаемые системой в тех случаях, когда векторы  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{e}$  неколлинеарны, коллинеарны или когда  $\mathbf{g} = 0$ , представлены в графах 4–6. В графах 7, 8 указаны дополнительные операторы, допускаемые системой в случае  $D = \chi$  или  $D_T = D_T^*$ , где  $D_T^* = \beta_T(D - \chi)/\beta_C$ . Заметим, что в случае  $D_T \neq 0, \beta_T \neq 0, \beta_C = 0, \mathbf{g} = 0$  уравнения допускают оператор  $Z_T^*$  при  $D \neq \chi$ . Аналогично, если параметры  $D_T, \beta_T, \beta_C$  отличны от нуля, а  $\mathbf{g} = 0$ , то при  $D_T \neq D_T^*$  допускается оператор  $Z$ .

В данной задаче групповой классификации не учитываются преобразования эквивалентности параметров. С точки зрения приложений (т. е. при построении точных решений и их физической интерпретации в областях различной геометрии) важно знать зависимость групповых свойств модели от всех физических параметров системы.

Опишем преобразования однопараметрических групп, порождаемые операторами (12). Конечные формулы преобразований, порождаемых операторами  $X_0, X_{ij}, H_i, H_0$ , приводятся в работе [10]. Оператору  $H_\Phi$  соответствует добавление к амплитуде колебаний давления  $\Phi$  произвольной функции времени, оператору  $X_R$  — вращение в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{e}$ . Оператор  $X_R$  допускается, если векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{g}$  коллинеарны или  $\mathbf{g} = 0$ . Преобразования, соответствующие остальным операторам, имеют вид

$$U_T: \quad \tilde{p} = p - a\rho_0\beta_T(g_1x^1 + g_2x^2 + g_3x^3), \quad \tilde{T} = T + a, \quad \tilde{\Phi} = \Phi + a\beta_T(e_1x^1 + e_2x^2 + e_3x^3);$$

$$U_C: \quad \tilde{p} = p - a\rho_0\beta_C(g_1x^1 + g_2x^2 + g_3x^3), \quad \tilde{C} = C + a, \quad \tilde{\Phi} = \Phi + a\beta_C(e_1x^1 + e_2x^2 + e_3x^3);$$

$$T^1: \quad \tilde{T} = e^a T; \quad T^2: \quad \tilde{T} = T + aC;$$

$$C^1: \quad \tilde{C} = e^a C; \quad C^2: \quad \tilde{C} = C + aT;$$

$$Z_0: \quad \tilde{t} = e^{2a} t, \quad \tilde{x}^i = e^a x^i, \quad \tilde{u}^i = e^{-a} u^i, \quad \tilde{p} = e^{-2a} p, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$R_1: \quad \tilde{T} = e^a T, \quad \tilde{C} = C + (\beta_T/\beta_C)(1 - e^a)T;$$

$$R_2: \quad \tilde{C} = e^a C, \quad \tilde{T} = T + (\beta_C/\beta_T)(1 - e^a)C;$$

$$L: \quad \tilde{C} = \left(C + \frac{D_T}{D - \chi} T\right) e^{a(D - \chi)} - \frac{D_T}{D - \chi} T.$$

Здесь  $a$  — параметр однопараметрических подгрупп, который имеет свое значение для каждого оператора. Переменные, закон преобразования которых не указан, преобразуются тождественно. Преобразования, порождаемые операторами  $Z, Z_T, Z_C, Z_T^*, Z_C^*$ , получаются в результате расширения однопараметрической подгруппы, соответствующей оператору  $Z_0$ , с помощью следующих преобразований:

$$Z_T: \quad \tilde{T} = e^{-a} T; \quad Z_C: \quad \tilde{C} = e^{-a} C; \quad Z: \quad \tilde{T} = e^{-a} T, \quad \tilde{C} = e^{-a} C;$$

$$Z_T^*: \quad \tilde{T} = e^{-a} T, \quad \tilde{C} = C + \frac{aD_T}{D - \chi} T; \quad Z_C^*: \quad \tilde{C} = e^{-a} C + \frac{D_T}{D - \chi} (e^{-a} - 1)T.$$

Отметим, что операторы  $X_0, X_{ij}, H_i, H_0, Z_0$  допускаются многими моделями гидродинамики, в то время как остальные операторы характерны именно для данной модели.

**3. Построение точных решений.** Использование групповых свойств модели вибрационной конвекции позволяет построить точные решения. Рассмотрим случай, когда постоянные  $D_T$ ,  $\beta_T$ ,  $\beta_C$  отличны от нуля, внешняя сила является силой тяжести и описывается с помощью вектора  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ , векторы  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{e}$  коллинеарны. В этом случае уравнения (1)–(5) допускают основную алгебру операторов, дополненную оператором вращения  $X_R$  (см. таблицу).

Для построения и физической интерпретации решений целесообразно перейти к безразмерным переменным. Введем характерные масштабы длины  $L$ , температуры  $\Delta T$ , времени  $L^2/\nu$ , скорости  $g\beta_T\Delta TL^2/\nu$ , давления  $\rho_0 g\beta_T\Delta TL$ , концентрации  $\beta_T\Delta T/\beta_C$  и амплитуды колебаний давления  $\beta_T\Delta TL$ . В безразмерных переменных уравнения (1)–(5) имеют вид

$$\partial_t \mathbf{u} + \text{Gr} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} - (T + C) \mathbf{q} + \frac{\text{Gs}}{\text{Gr Pr}} [((T + C) \mathbf{e} - \nabla \Phi) \cdot \nabla] \nabla \Phi; \quad (13)$$

$$\partial_t T + \text{Gr} \mathbf{u} \cdot \nabla T = \text{Pr}^{-1} \nabla^2 T; \quad (14)$$

$$\partial_t C + \text{Gr} \mathbf{u} \cdot \nabla C = \text{Sc}^{-1} (\nabla^2 C - \psi \nabla^2 T); \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (16)$$

$$\nabla^2 \Phi - (\nabla T + \nabla C) \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (17)$$

( $\mathbf{q} = (0, 0, -1)$ ). Уравнения содержат пять безразмерных параметров: число Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\chi$ , число Шмидта  $\text{Sc} = \nu/D$ , число Грасгофа  $\text{Gr} = g\beta_T\Delta TL^3/\nu^2$ , число Гершуни  $\text{Gs} = (A\omega\beta_T\Delta TL)^2/(2\nu\chi)$ , характеризующее вибрационное воздействие (известно также как вибрационное число Рэлея), и отношение разделения  $\psi = -D_T\beta_C/(D\beta_T)$ , описывающее эффект термодиффузии. При  $\psi > 0$  или  $\psi < 0$  легкий компонент концентрируется в более нагретой или более холодной области соответственно.

В данной работе групповые свойства уравнений модели используются для построения точного решения, описывающего разделение бинарной смеси в термодиффузионной колонне при наличии ее вибрации. Колонна представляет собой длинный вертикальный слой, высота которого равна  $2H$ , ширина —  $2L$ , толщина —  $2S$  ( $H/L \approx 10^2$ ,  $S/L \approx 10$ ). Температура вертикальных стенок колонны остается постоянной:  $T_0 \pm \Delta T$ . В дальнейшем рассматривается двумерная постановка задачи в плоскости  $(x, z)$  (рис. 1).

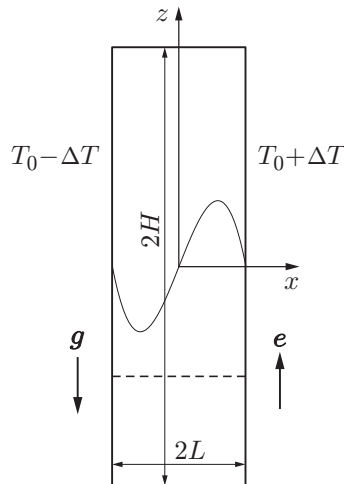


Рис. 1. Схема термодиффузионной колонны

Под действием эффекта Соре в колонне происходит разделение смеси в горизонтальном направлении. Вследствие наличия в поле силы тяжести вертикального конвективного потока происходит вертикальное разделение смеси. С помощью измерения постоянно-го вертикального градиента концентрации в стационарном состоянии экспериментально определяются коэффициенты термодиффузии [14]. Заметим, что в основной части колонны (за исключением торцов) температура изменяется только в горизонтальном направлении, горизонтальная компонента скорости отсутствует, а ее вертикальная компонента зависит только от продольной координаты  $x$ . Предполагается, что колонна находится в поле вибрационной силы, действующей в направлении, совпадающем с направлением вектора  $e = (0, 0, 1)$ .

Для описания данной конфигурации колонны строится частично инвариантное решение осредненных уравнений относительно подалгебры

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\partial}{\partial t}, & H_2(1) &= \frac{\partial}{\partial x^2}, & H_0(1) &= \frac{\partial}{\partial p}, \\ H_3(1) + \frac{R}{Gr Sc} U_C &= \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{R}{Gr Sc} \left( x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C} + x^3 \frac{\partial}{\partial \Phi} \right). \end{aligned}$$

Здесь операторы записаны в безразмерных переменных, при этом  $R = g\beta_C BL^4/(\nu D)$  — концентрационное число Рэлея, соответствующее постоянному вертикальному градиенту концентрации  $B$ . Соответствующее решение ранга 1 и дефекта 1 имеет вид

$$\begin{aligned} u^1 &= u(x), & u^2 &= v(x), & u^3 &= w(x), & p &= p(x, z), \\ T &= T(x), & C &= c(x) + \frac{R}{Gr Sc} z, & \Phi &= \varphi(x) + \frac{R}{2 Gr Sc} z^2 \end{aligned} \quad (18)$$

( $x^1 = x$ ;  $x^3 = z$ ). Согласно описанной выше конфигурации полагаем  $u = v = 0$ .

Зададим граничные условия на боковых стенках колонны

$$x = \pm 1: \quad w = 0, \quad \Theta = \pm 1, \quad \frac{\partial c}{\partial x} - \psi \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Первое равенство означает условие прилипания, второе задает распределение температуры, третье обозначает отсутствие потока легкого компонента через стенки, четвертое показывает, что горизонтальный градиент амплитуды колебаний давления равен нулю. Последнее равенство следует из граничного условия для  $\Phi$ , полученного с помощью подстановки выражения для  $w$  из (6) в граничное условие (7). Далее, расход жидкости через любое поперечное сечение колонны должен быть равен нулю, а среднее значение концентрации компонента в колонне должно оставаться постоянным (заметим, что функция  $C$  в (18) задает отклонение от среднего значения данной концентрации):

$$\int_{-1}^1 w dx = 0, \quad \int_{-1}^1 c dx = 0. \quad (20)$$

Вертикальный градиент концентрации в колонне формируется за счет вертикального конвективного потока и горизонтального термодиффузионного разделения смеси. Таким образом, этот градиент зависит от интенсивности конвекции и физических свойств смеси. Поэтому для нахождения концентрационного числа Рэлея необходимо задать дополнительное условие

$$\frac{Gr^2}{2} \int_{-1}^1 cw dx - \frac{R}{Sc^2} = 0, \quad (21)$$

которое означает отсутствие потока легкого компонента через любое поперечное сечение колонны. Заметим, что это условие выполняется в реальной колонне за счет замкнутости объема. Первое и второе слагаемые в (21) характеризуют конвективный и диффузионный перенос массы легкого компонента в вертикальном направлении соответственно.

Подставляя представление решения (18) в систему (13)–(17) и интегрируя полученные равенства с учетом граничных условий, получаем, что отклонение осредненного давления  $p$  от гидростатического и амплитуда колебаний давления  $\Phi$  зависят только от вертикальной координаты  $z$ :

$$\Phi = \frac{R}{2 \text{Gr Sc}} z^2 + \varphi_0, \quad p = \frac{R}{2 \text{Gr Sc}} z^2 + p_1 z + p_0 \quad (22)$$

( $\varphi_0, p_0, p_1$  — произвольные постоянные). Введя функцию тока

$$Q(x) = - \int_{-1}^x w(\tau) d\tau, \quad w = - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4} - \left(1 + \frac{\text{Gs R}}{\text{Gr}^2 \text{Pr Sc}}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial x}\right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + R \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Из второго уравнения в (23) и соответствующего граничного условия следует, что  $T = x$ . Тогда из третьего уравнения с учетом граничных условий (19) получаем представление для концентрации в виде

$$C = -R \int_{-1}^x Q(\tau) d\tau + \psi x + \frac{R}{\text{Gr Sc}} z + c^*,$$

где  $c^*$  определяется с помощью второго условия в (20). В результате получаем следующую задачу для функции тока:

$$\frac{\partial^4 Q}{\partial x^4} + R \left(1 + \frac{\text{Gs R}}{\text{Gr}^2 \text{Pr Sc}}\right) Q = \left(1 + \frac{\text{Gs R}}{\text{Gr}^2 \text{Pr Sc}}\right) (1 + \psi); \quad (24)$$

$$Q(-1) = Q(1) = \frac{\partial Q}{\partial x}(-1) = \frac{\partial Q}{\partial x}(1) = 0; \quad (25)$$

$$\psi \int_{-1}^1 Q(x) dx - R \int_{-1}^1 Q^2(x) dx - \frac{2R}{\text{Gr}^2 \text{Sc}^2} = 0. \quad (26)$$

Условия (25) следуют из первых равенств в (19), (20), а соотношение (26) — из условия (21).

Найдем решение задачи (24)–(26) в зависимости от значений отношения разделения  $\psi$ , введя обозначение

$$R^* = R \left(1 + \frac{\text{Gs R}}{\text{Gr}^2 \text{Sc Pr}}\right). \quad (27)$$

1. Если  $\psi = 0$ , то из условия (26) следует, что  $R = 0$ . В результате получаем решение

$$Q = (x^2 - 1)^2/24, \quad w = (x^3 - x)/6, \quad T = x, \quad C = 0.$$

В данном случае эффект Соре отсутствует и разделения смеси в горизонтальном и вертикальном направлениях не происходит. Конвекция вызвана только неоднородностью температуры.



2. Если  $\psi = -1$ , то уравнение (24) становится однородным и в случае  $R^* \geq 0$  имеет единственное решение  $Q = 0$ . Тогда из (26) следует, что  $R = 0$  и соответственно  $R^* = 0$ . Решение задачи имеет вид

$$w = 0, \quad T = x, \quad C = -x.$$

Здесь горизонтальное разделение смеси обусловлено только эффектом Соре, а вертикального разделения не происходит вследствие отсутствия конвекции.

При  $R^* < 0$  нетривиальное решение уравнения (24) существует только для таких значений параметров задачи, которые удовлетворяют уравнению  $\cos 2\gamma \operatorname{ch} 2\gamma - 1 = 0$ , где  $\gamma = (-R^*)^{1/4}$ . Эти случаи вырожденных решений требуют отдельного исследования и в данной работе не рассматриваются.

3. Если  $\psi \neq 0, -1$ , то решение задачи зависит от знака  $R^*$ .

3.1. Случай  $R^* = 0$  возможен либо при  $R = 0$ , либо при  $R = -\operatorname{Gr}^2 \operatorname{Pr} \operatorname{Sc} / \operatorname{Gs}$ . При  $R = 0$  в результате интегрирования уравнения (24) с граничными условиями (25) получаем

$$Q = \frac{\psi + 1}{24} (x^2 - 1)^2.$$

Подстановка найденной функции тока в условие (26) соответствует случаям  $\psi = 0$  или  $\psi = -1$  (см. выше). Если  $R = -\operatorname{Gr}^2 \operatorname{Pr} \operatorname{Sc} / \operatorname{Gs}$ , то задача имеет только тривиальное решение  $Q = 0$ . Тогда из условия (26) следует  $R = 0$ , что противоречит исходному предположению об отрицательном значении  $R$ .

В случае  $R^* \neq 0$  (в предположении  $\psi \neq 0, -1$ ) функция тока всегда отлична от нуля. Таким образом, в колонне возникают гравитационная и вибрационная конвекции, интенсивности которых определяются числами Грасгофа  $\operatorname{Gr}$  и Гершуни  $\operatorname{Gs}$  соответственно. При достаточно больших числах Грасгофа диффузионный перенос массы легкого компонента в вертикальном направлении, обусловленный наличием градиента концентрации, пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом. В работе [14] показано, что конвективный перенос превышает диффузионный для широкого класса бинарных смесей при  $\operatorname{Gr} > 3765 / \operatorname{Sc}$  (заметим, что для жидких смесей число Шмидта порядка  $10^3$ ). Таким образом, в указанных условиях можно пренебречь членом  $R / \operatorname{Sc}^2$  в условии (21) и соответственно последним слагаемым в соотношении (26).

3.2. Если  $R^* < 0$ , то искомые функции записываются в виде

$$Q = \frac{\psi + 1}{R} \left( 1 - \frac{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma x + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma x}{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma} \right),$$

$$w = \frac{(\psi + 1)\gamma}{R} \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} \gamma x - \operatorname{sh} \gamma \sin \gamma x}{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma}, \quad T = x,$$

$$C = \frac{\psi + 1}{\gamma} \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} \gamma x + \operatorname{sh} \gamma \sin \gamma x}{\sin \gamma \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \gamma \cos \gamma} - x + \frac{R}{\operatorname{Gr} \operatorname{Sc}} z,$$

где  $\gamma = (-R^*)^{1/4}$ . Подставляя выражение для функции тока в (26) и не учитывая член  $2R / (\operatorname{Gr}^2 \operatorname{Sc}^2)$ , получаем равенство, связывающее концентрационное число Рэлея  $R$  с отношением разделения  $\psi$  и другими безразмерными параметрами:

$$\psi = \frac{\gamma(3 \operatorname{ch} 2\gamma - 3 \cos 2\gamma + 2 \sin 2\gamma \operatorname{sh} 2\gamma) - 5(\sin^2 \gamma \operatorname{sh} 2\gamma + \operatorname{sh}^2 \gamma \sin 2\gamma)}{\sin^2 \gamma (\operatorname{sh} 2\gamma - 2\gamma) + \operatorname{sh}^2 \gamma (\sin 2\gamma - 2\gamma)}. \quad (28)$$

3.3. Если  $R^* > 0$ , то решение задачи имеет представление

$$Q = \frac{\psi + 1}{R} \left( 1 + \frac{2(\operatorname{sh} \eta \cos \eta - \sin \eta \operatorname{ch} \eta) \sin \eta x \operatorname{sh} \eta x - 2(\sin \eta \operatorname{ch} \eta + \operatorname{sh} \eta \cos \eta) \cos \eta x \operatorname{ch} \eta x}{\operatorname{sh} 2\eta + \sin 2\eta} \right),$$

$$w = \frac{4\eta(\psi + 1)}{R} \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta x \cos \eta x - \operatorname{sh} \eta \cos \eta \sin \eta x \operatorname{ch} \eta x}{\sin 2\eta + \operatorname{sh} 2\eta}, \quad T = x,$$

$$C = \frac{2(\psi + 1)}{\eta} \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \eta \sin \eta x \operatorname{ch} \eta x + \operatorname{sh} \eta \cos \eta \operatorname{sh} \eta x \cos \eta x}{\sin 2\eta + \operatorname{sh} 2\eta} - x + \frac{R}{\operatorname{Gr} \operatorname{Sc}} z,$$

где  $\eta = (R^*/4)^{1/4}$ . Соотношение между  $R$  и отношением разделения  $\psi$  (а также другими безразмерными параметрами) имеет вид

$$\psi = \frac{8\eta(\sin^2 2\eta + \operatorname{sh}^2 2\eta + 3 \sin 2\eta \operatorname{sh} 2\eta) + 5(\sin 4\eta - \operatorname{sh} 4\eta + 2 \cos 2\eta \operatorname{sh} 2\eta - 2 \sin 2\eta \operatorname{ch} 2\eta)}{\operatorname{sh} 4\eta - \sin 4\eta + 2(\sin 2\eta \operatorname{ch} 2\eta - \cos 2\eta \operatorname{sh} 2\eta - 4\eta \sin 2\eta \operatorname{sh} 2\eta)}. \quad (29)$$

Заметим, что для решений всех типов постоянная  $p_1$  в выражении для давления (22), определяемая с помощью уравнения (13), равна нулю.

На рис. 2 представлена зависимость между концентрационным числом Рэлея  $R$ , характеризующим вертикальный градиент концентрации, и отношением разделения  $\psi$  при  $\operatorname{Pr} = 10$ ,  $\operatorname{Sc} = 1000$ ,  $\operatorname{Gr} = 50$  и различных значениях числа Гершуни. В отсутствие вибрации  $G_s = 0$ ,  $R^* = R$ . Для этого случая в работе [14] показано, что уравнение  $\psi = \psi(R)$ , задаваемое соотношениями (28), (29), имеет единственное решение относительно  $R$  при заданном  $\psi > -1$ , имеет бесконечное множество решений в случае  $-5 < \psi < -1$  и не имеет решений при  $\psi < -5$ . Кроме того, знак  $R$  совпадает со знаком  $\psi$  и  $R = 0$  при  $\psi = 0$ . Заметим, что для смесей с аномальным эффектом Соре ( $\psi < 0$ ) тяжелый компонент накапливается в верхней части колонны, поэтому конвективное течение является неустойчивым и на практике не реализуется [15].

При наличии вибрации  $G_s \neq 0$  и  $R^*$  определяется по формуле (27). В этом случае заданному значению  $\psi > 0$  соответствуют положительное и отрицательное значения  $R$  (см. рис. 2). Это обусловлено указанными выше свойствами функции  $\psi = \psi(R^*)$  и тем, что  $R^* \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow \pm\infty$ . Заметим, что при нормальном эффекте Соре ( $\psi > 0$ ) легкий компонент накапливается в верхней части колонны, поэтому физически значимым является

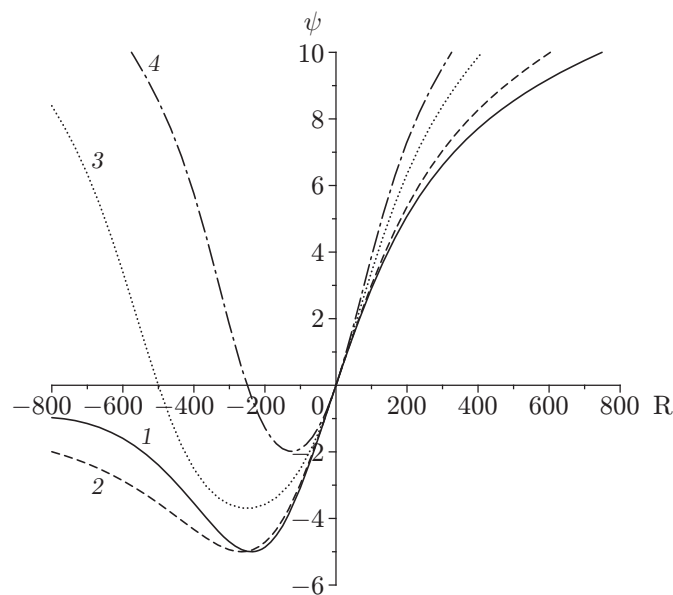


Рис. 2. Зависимость отношения разделения  $\psi$  от концентрационного числа Рэлея  $R$  при  $\operatorname{Pr} = 10$ ,  $\operatorname{Sc} = 1000$ ,  $\operatorname{Gr} = 50$  и различных значениях числа Гершуни: 1 —  $G_s = 0$ ; 2 —  $G_s = 10^4$ ; 3 —  $G_s = 5 \cdot 10^4$ ; 4 —  $G_s = 10^5$

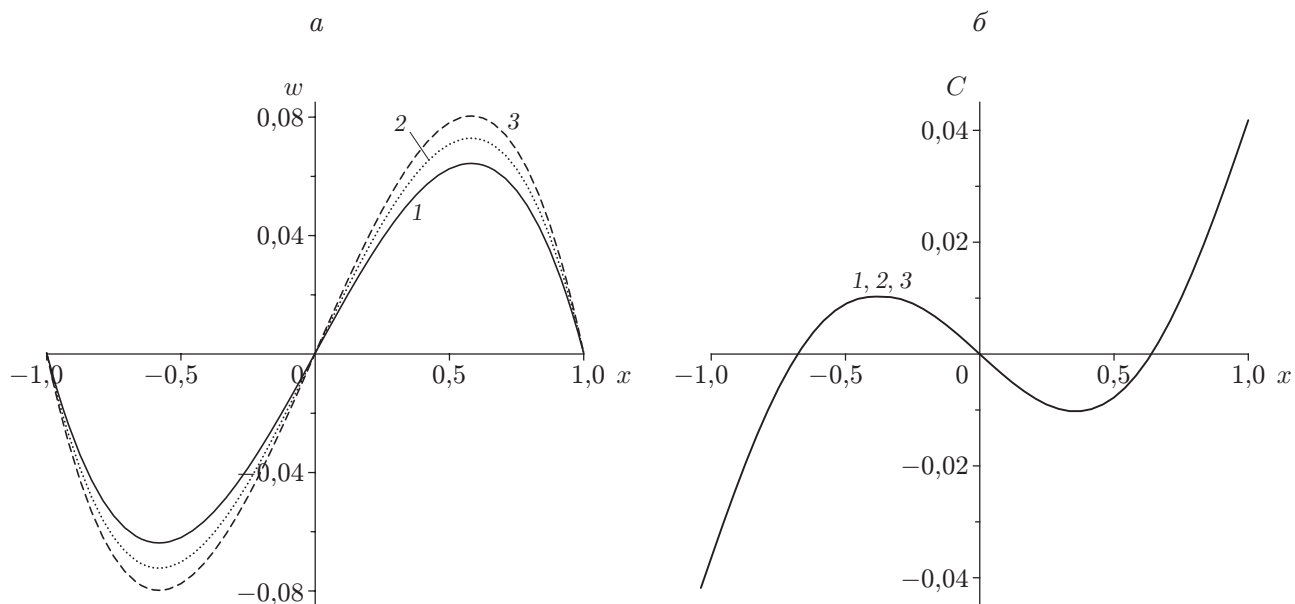


Рис. 3. Профили осредненной скорости (а) и концентрации этанола (б) в смеси вода — этанол при различных значениях числа Гершуни:  
 1 —  $G_s = 0$ ; 2 —  $G_s = 5 \cdot 10^6$ ; 3 —  $G_s = 10^7$

лишь корень  $R > 0$ . На рис. 2 видно, что увеличение интенсивности продольных вибраций приводит к уменьшению вертикального разделения бинарной смеси в колонне при заданном положительном отношении разделения (происходит частичное перемешивание смеси).

Рассмотрим смесь воды (90 %) и этанола (10 %), которая характеризуется безразмерными параметрами  $\psi = 0,14$ ,  $Pr = 22,53$ ,  $Sc = 2493$ . На рис. 3 представлены профили осредненной скорости и концентрации в сечении  $z = 0$  при  $Gr = 50$  и различных значениях числа Гершуни. Видно, что вблизи нагретой (правой) границы концентрация легкого компонента (этанола) повышается, и за счет конвекции он накапливается в верхней части колонны. Вследствие увеличения интенсивности продольных вибраций скорость движения увеличивается, а распределение концентрации практически не изменяется.

**Заключение.** Таким образом, проведено исследование групповых свойств модели вибрационной конвекции бинарной смеси с учетом эффекта *Sore*. Решена задача групповой классификации уравнений относительно постоянных физических параметров модели вибрационной конвекции. Приведен пример частично инвариантного решения, описывающего разделение бинарной смеси в термодиффузионной колонне под действием продольной вибрации. Исследовано влияние интенсивности вибрации на режим течения и разделение смеси.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Gershuni G. Z.** Thermal vibrational convection / G. Z. Gershuni, D. V. Lyubimov. N. Y.: Wiley, 1998.
2. **Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.** О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 51–55.
3. **Mialdun A., Ryzhkov I. I., Melnikov D. E., Shevtsova V. M.** Experimental evidence of thermal vibrational convection in non-uniformly heated fluid in a reduced gravity environment // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 084501.

4. **Shevtsova V. M., Ryzhkov I. I., Melnikov D. E., et al.** Experimental and theoretical study of vibration-induced convection in low gravity // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 648. P. 53–82.
5. **Gershuni G. Z., Kolesnikov A. K., Legros J. C., Myznikova V. I.** On the vibrational convective instability of a horizontal, binary-mixture layer with the Soret effect // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 330. P. 251–269.
6. **Гневанов Н. В., Смородин Б. Л.** Конвективная неустойчивость течения бинарной смеси в условиях вибрации и термодиффузии // *ПМТФ.* 2006. Т. 47, № 2. С. 77–84.
7. **Shevtsova V., Melnikov D., Legros J. C., et al.** Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19, iss. 1. 017111.
8. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. **Андреев В. К., Рыжков И. И.** Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии // *Дифференц. уравнения.* 2005. Т. 41, № 4. С. 508–517.
10. **Ryzhkov I. I.** Symmetry analysis of equations for convection in binary mixture // *J. Siberian Fed. Univ.* 2008. V. 1, iss. 4. P. 410–431.
11. **Родионов А. А., Степанова И. В.** Групповая классификация уравнений модели конвекции с учетом сил плавучести // *Вычисл. технологии.* 2008. Т. 13, № 5. С. 61–69.
12. **Рыжков И. И.** Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии бинарной смеси в случае плоского движения // *ПМТФ.* 2006. Т. 47, № 1. С. 95–108.
13. **Ryzhkov I. I.** On double diffusive convection with Soret effect in a vertical layer between co-axial cylinders // *Phys. D. Nonlinear Phenomena.* 2006. V. 215, iss. 2. P. 191–200.
14. **Ryzhkov I. I., Shevtsova V. M.** On thermal diffusion and convection in multicomponent mixtures with application to the thermogravitational column // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19, iss. 2. 027101.
15. **Ryzhkov I. I., Shevtsova V. M.** Convective stability of multicomponent fluids in the thermogravitational column // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 79, iss. 2. 026308.

*Поступила в редакцию 20/VII 2010 г.*

---