

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ СЛОЖНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ РАСТЯЖЕНИЕМ И КРУЧЕНИЕМ

А. А. Артемьева, В. Г. Баженов, Д. В. Жегалов,
Д. А. Казаков, Е. В. Нагорных

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mails: aranan@mail.ru, bazhenov@mech.unn.ru, zhegalov@mech.unn.ru,
kasakov@mech.unn.ru, pavlyonkova@mech.unn.ru

Предложена методика численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения с учетом кручения при больших деформациях, основанная на геометрически нелинейной теории оболочек Тимошенко и теории пластичности с учетом комбинированного изотропного и кинематического упрочнения. Задача решается с использованием вариационно-разностного метода. Представлены результаты численного и экспериментального исследования процессов упругопластического деформирования цилиндрических оболочек при пропорциональном и последовательном кинематических нагружениях растяжением и кручением.

Ключевые слова: осесимметричные оболочки, растяжение и кручение, упругопластичность, большие деформации, численное моделирование, вариационно-разностный метод, явная схема интегрирования.

DOI: 10.15372/PMTF20150603

Введение. Обзор работ, в которых получены численные решения осесимметричных геометрически нелинейных задач упругопластического деформирования и устойчивости оболочек при статических нагружениях, представлен в [1], а при динамических — в [2]. Эти работы в основном посвящены решению задач при малых деформациях и больших перемещениях металлических оболочек. Обзор математических моделей, постановок задач и численных методов решения нелинейных задач динамики оболочек приведен в работах [3–5]. В настоящее время отсутствуют методики и пакеты программ, с достаточной точностью моделирующие процессы деформирования оболочек при действии внутреннего давления и (или) растяжения с кручением в осесимметричной постановке. Эти задачи возникают при экспериментальных исследованиях поведения металлических цилиндрических полых образцов при больших деформациях и неоднородном сложном напряженно-деформированном состоянии. Численное решение таких задач в трехмерной постановке с использованием коротационной производной Яуманна без учета вращений оболочки как

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-593.2014.8) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-01129-а).

© Артемьева А. А., Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Казаков Д. А., Нагорных Е. В., 2015

жесткого целого малоэффективно. Наиболее простым способом численного решения нестационарных упругопластических задач при больших деформациях является применение метода конечных элементов и явной схемы интегрирования по времени, что позволяет осуществлять пошаговое изменение геометрии оболочки, при этом на каждом шаге по времени используются линеаризованные кинематические соотношения в метрике текущего состояния [2, 3].

1. Определяющая система уравнений. Обобщенная осесимметричная задача кручения формулируется в цилиндрической системе эйлеровых координат Orz (Oz — ось вращения) [6]. Для каждого элемента оболочки вводится местная лагранжева система координат $Os\xi$, связанная с общей соотношениями

$$s = r\psi_z - z\psi_r, \quad \xi = r\psi_r + z\psi_z,$$

где s — длина дуги меридиана элемента оболочки; ξ — координатная линия, проведенная по нормали к срединной поверхности; $\psi_z = r_{,s}$, $\psi_r = -z_{,s}$ — направляющие косинусы нормали к срединной поверхности.

Вводятся следующие гипотезы: элементы оболочки имеют малую толщину; геометрия оболочки не меняется по толщине; деформации поперечного сдвига и изгиба малы по сравнению с деформациями срединной поверхности; кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния.

Распределение компонент скоростей перемещений и скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений) по толщине оболочки представляется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_s(s, \xi, t) &= \dot{u}_s(s, t) + \xi \dot{u}_\varphi(s, t), \\ \tilde{u}_\xi(s, \xi, t) &= \dot{u}_\xi(s, t), \quad \tilde{u}_\beta(s, \xi, t) = r \dot{u}_\beta(s, t), \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \dot{\varepsilon}_{ii}^0 + \xi \dot{\varepsilon}_{ii}^B, \quad i = s, \beta, \quad \dot{\varepsilon}_{s\xi} = \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 (1 - (2\xi/h)^2), \quad \dot{\varepsilon}_{s\beta} = \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0, \\ \dot{\varepsilon}_{ss}^0 &= \dot{u}_{r,s} \psi_z - \dot{u}_{z,s} \psi_r, \quad \dot{\varepsilon}_{ss}^B = \dot{u}_{\varphi,s}, \quad \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^0 = \dot{u}_r r^{-1}, \quad \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^B = \dot{u}_\varphi \psi_z r^{-1}, \\ \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 &= \frac{1}{2} (\dot{u}_\varphi + \dot{u}_{r,s} \psi_r + \dot{u}_{z,s} \psi_z), \quad \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0 = \frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}, \quad \dot{\omega}_{s\beta} = -\frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}. \end{aligned}$$

Здесь $\dot{u}_s(s, t)$, $\dot{u}_\xi(s, t)$ — скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали; $\dot{u}_\varphi(s, t)$ — угловая скорость поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения; $\dot{u}_\beta(s, t)$ — угловая скорость поворота относительно оси вращения; $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ — компоненты скорости деформации срединной поверхности; $\xi \dot{\varepsilon}_{ii}^B$ — компоненты скорости деформации изгиба; $\dot{\omega}_{s\beta}$ — скорость вращения элемента.

Компоненты тензоров скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и напряжений σ_{ij} в местной системе координат $Os\xi$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0, \quad i, j = s, \beta, \xi, \\ \dot{\sigma}_{ss} &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\dot{\varepsilon}_{ss}^e + \mu \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e), \quad \dot{\sigma}_{\beta\beta} = \frac{E}{1 - \mu^2} (\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e + \mu \dot{\varepsilon}_{ss}^e), \\ \dot{\sigma}_{s\beta} &= \frac{E}{1 + \mu} \dot{\varepsilon}_{s\beta}^e, \quad \dot{\sigma}_{s\xi} = \frac{E}{1 + \mu} \dot{\varepsilon}_{s\xi}^e, \quad \sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\beta\xi} = 0, \\ D_J \sigma_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{jk} \dot{\omega}_{ki} + \sigma_{ik} \dot{\omega}_{kj}, \quad i, j, k = s, \beta, \\ \sigma_{ij} &= \int_0^t D_J \sigma_{ij} dt, \quad i, j = s, \beta, \quad \sigma_{s\xi} = \int_0^t \dot{\sigma}_{s\xi} dt, \end{aligned}$$

где E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; D_J — производная по Яуманну, учитывающая поворот за счет сдвиговой деформации элемента оболочки как квазижесткого целого относительно нормали к ее срединной поверхности при кручении. Следует отметить, что при кручении тонких оболочек деформации сдвига ограничены для предотвращения потери устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Поэтому введение производной Яуманна при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени является обоснованным. В результате существенно упрощается запись основных уравнений обобщенной осесимметричной задачи кручения, так как в качестве базовой системы координат выбирается лагранжева система.

Учет упругопластических свойств материала оболочки осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным и кинематическим упрочнением [7]:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} n_{ij}, & n_{ij} &= \sigma'_{ij} / \sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, & \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} &= \sigma_T^2(\varkappa), & i, j &= s, \beta, \xi, \\ \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} - \rho_{ij}, & \sigma &= \frac{1}{3} (\sigma_{ss} + \sigma_{\beta\beta}), \\ \dot{\rho}_{ij} &= g_1 \dot{\varepsilon}_{ij}^p - g_2 \rho_{ij} \dot{\varkappa}, & \rho_{ij} &= \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, & \varkappa &= \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt.\end{aligned}$$

Здесь $\sigma_T(\varkappa)$ — радиус поверхности текучести; \varkappa — параметр Одквиста; δ_{ij} — символ Кронекера; ρ_{ij} — тензор микронапряжений; g_1, g_2 — модули анизотропного упрочнения; $\dot{\lambda}$ — параметр, определяемый при пластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки. При сложном нагружении влияние “памяти” материала, обусловленной кинематическим упрочнением, существенно только при незначительном изменении текущего состояния. При больших сдвиговых деформациях осцилляции компонент тензора напряжений отсутствуют, так как тензор микронапряжений ρ_{ij} определяется не тензором пластических деформаций, а интегродифференциальными соотношениями, учитывающими эффект затухающей “памяти” [8].

1.1. *Уравнение движения.* Вариационное уравнение движения оболочки выводится из уравнения баланса мощностей виртуальных работ и формулируется относительно вариаций скоростей перемещений $\delta \dot{u}_r, \delta \dot{u}_z, \delta \dot{u}_\varphi, \delta \dot{u}_\beta$:

$$\begin{aligned}& \int_0^L \{ (Q\psi_r + N_s\psi_z) \delta \dot{u}_{r,s} + (Q\psi_z - N_s\psi_r) \delta \dot{u}_{z,s} + M_s \delta \dot{u}_{\varphi,s} + rT \delta \dot{u}_{\beta,s} + (M_\rho \ddot{u}_z - p_z) \delta \dot{u}_z + \\ & + [r^{-1} N_\beta + M_\rho (\ddot{u}_r - r \dot{u}_\beta^2) - p_r] \delta \dot{u}_r + (Q + r^{-1} M_\beta \psi_z + J_\rho \ddot{u}_\varphi) \delta \dot{u}_\varphi + r^2 M_\rho \ddot{u}_\beta \delta \dot{u}_\beta \} r ds - \\ & - [r(P_r \delta \dot{u}_r + P_z \delta \dot{u}_z + M^B \delta \dot{u}_\varphi + P_\beta \delta \dot{u}_\beta)] \Big|_{s=0,L} = 0.\end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность материала; P_r, P_z, P_β, M^B — внешние усилия и изгибающий момент, приложенные к контуру оболочки; p_r, p_z — поверхностные нагрузки; $N_s, N_\beta, T, Q, M_s, M_\beta$ — внутренние усилия и моменты:

$$\begin{aligned}N_i &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} d\xi, & M_i &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} \xi d\xi, & i &= s, \beta, \\ Q &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\xi} \left(1 - \left(\frac{2\xi}{h}\right)^2\right) d\xi, & T &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\beta} d\xi,\end{aligned}$$

M_ρ, J_ρ — масса и момент инерции:

$$M_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho d\xi, \quad J_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \xi^2 d\xi.$$

Вариационное уравнение движения составной тонкостенной конструкции, состоящей из A элементов оболочки, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^A \left(\int_0^L \{ (Q\psi_r + N_s\psi_z) \delta\dot{u}_{r,s} + (Q\psi_z - N_s\psi_r) \delta\dot{u}_{z,s} + M_s \delta\dot{u}_{\varphi,s} + rT \delta\dot{u}_{\beta,s} + \right. \\ \left. + (M_\rho \ddot{u}_z - p_z) \delta\dot{u}_z + [r^{-1}N_\beta + M_\rho(\ddot{u}_r - r\dot{u}_\beta^2) - p_r] \delta\dot{u}_r + \right. \\ \left. + (Q + r^{-1}M_\beta\psi_z + J_\rho\ddot{u}_\varphi) \delta\dot{u}_\varphi + r^2 M_\rho \ddot{u}_\beta \delta\dot{u}_\beta \} r ds - \right. \\ \left. - \eta [r(P_r \delta\dot{u}_r + P_z \delta\dot{u}_z + M^\alpha \delta\dot{u}_\varphi + P_\beta \delta\dot{u}_\beta)] \Big|_{s=0,L} \right)^a = 0 \end{aligned}$$

($\eta = 0$, если контур элемента оболочки примыкает к узлу сочленения, $\eta = 1$, если не примыкает).

Полученное вариационное уравнение содержит уравнение движения конструкции в целом и статические граничные условия для контурных сечений элементов, не входящих в узлы сочленения. Это уравнение дополняется граничными кинематическими и начальными условиями.

1.2. *Вариационно-разностный метод решения.* Дискретный аналог вариационного уравнения записывается в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N [(\Phi_M \ddot{u}_r - \Phi_r)_j (\delta\dot{u}_r)_j + (\Phi_M \ddot{u}_z - \Phi_z)_j (\delta\dot{u}_z)_j + \\ + (\Phi_J \ddot{u}_\varphi - \Phi_\varphi)_j (\delta\dot{u}_\varphi)_j + (\Phi_Y \ddot{u}_\beta - \Phi_\beta)_j (\delta\dot{u}_\beta)_j] = 0, \end{aligned}$$

где N — суммарное количество узлов дискретной модели конструкции. Учитывая произвольность и независимость вариаций, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение дискретной модели конструкции:

$$\begin{aligned} (\Phi_M \ddot{u}_r)_j &= (\Phi_r)_j, & (\Phi_M \ddot{u}_z)_j &= (\Phi_z)_j, \\ (\Phi_J \ddot{u}_\varphi)_j &= (\Phi_\varphi)_j, & (\Phi_Y \ddot{u}_\beta)_j &= (\Phi_\beta)_j. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_r, \Phi_z, \Phi_\varphi, \Phi_\beta$ — обобщенные силы, действующие на расчетный узел j ; Φ_M, Φ_J, Φ_Y — узловые массы и моменты инерции.

Решение полученной системы уравнений строится с использованием явной конечно-разностной схемы “крест” второго порядка точности. Скорости, перемещения и координаты узлов сетки вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} f_j^{k+1/2} &= f_j^{k-1/2} + (\Phi_\alpha)_j^k / (\Phi_\zeta)_j^k \Delta t^{k+1/2}, & f_j^{k+1} &= f_j^k + f_j^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \\ \Delta t^{k+1/2} &= \frac{1}{2} (\Delta t^{k+1} + \Delta t^k), & \alpha_j^{m+1} &= \alpha_j^0 + \sum_{p=1}^{m+1} (u_\alpha)_j^p, \\ f &= u_\alpha, \quad \alpha = r, z, \varphi, \beta, & \zeta &= M_\rho, J_\rho, Y_\rho, \quad j = 1, \dots, T_1. \end{aligned}$$

При использовании гладких решений изложенная выше явная разностная схема имеет второй порядок точности относительно шагов сетки по пространству и времени при задании кинематических граничных условий. Оценки устойчивости схемы имеют вид

$$\Delta t \leq \Delta s/c, \quad h \geq \Delta s, \quad \Delta t \leq h/c, \quad \Delta s > h,$$

где h — толщина оболочки; c — скорость звука.

При решении большинства задач достаточная точность достигается при использовании пространственного шага сетки вдоль срединной поверхности, имеющего размер порядка толщины оболочки. Вне зоны влияния краевых эффектов целесообразно применять сетки с большими размерами ячеек. В этом случае ограничение на временной шаг $\Delta t \leq h/c$ становится неэффективным. Поскольку оно определяется длинноволновыми высокочастотными сдвиговыми колебаниями, целесообразно выполнить регуляризацию разностной схемы, что позволит уменьшить частоты этих колебаний. В работе [9] предложен и обоснован метод повышения эффективности явных численных схем интегрирования уравнений теории оболочек Тимошенко путем введения регуляризирующего множителя K к инерционным членам, учитывающим вращение:

$$K = \begin{cases} 1, & \Delta s/h \leq 1, \\ (1 + (\Delta s/h)^2)^{-1}, & \Delta s/h > 1. \end{cases}$$

В результате при $\Delta s/h = n \gg 1$ можно существенно (в n раз) увеличить шаг интегрирования по времени, не уменьшая точность расчетов.

1.3. *Алгоритм решения задачи.* При решении задачи расчетная область разбивается на конические элементы. Узлы сопряжения элементов толщиной $h_{i+1/2}(s)$ определяются координатами $r_i(s)$, $z_i(s)$, $i = 0, \dots, T_1 - 1$. Начальный временной шаг Δt^0 выбирается согласно критерию устойчивости разностной схемы [9]. По известному для момента времени $t = t^m$ распределению параметров напряженно-деформированного состояния из уравнения движения определяются компоненты скоростей перемещений $(\dot{u}_r, \dot{u}_z, \dot{u}_\varphi, \dot{u}_\beta)_j^{m+1/2}$ и перемещений $(u_r, u_z, u_\varphi, u_\beta)_j^{m+1}$, а также измененная геометрия оболочки. Следующим этапом расчета на текущем временном шаге является вычисление компонент тензора скоростей деформаций. При $\sqrt{(\sigma'_{ij})^m (\sigma'_{ij})^m} > \sigma_T(\chi)$ для нахождения приращения пластических деформаций $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)^{m+1/2}$ используется итерационный процесс “посадки” девиатора напряжений σ'_{ij} на поверхность текучести.

1. Рассчитываются следующие параметры: компоненты направляющего тензора $n_{ij}^k = (\sigma'_{ij})^k / \sqrt{(\sigma'_{ij})^k (\sigma'_{ij})^k}$, $(\sigma'_{ij})^0$ в предположении упругого деформирования, параметры $\Delta \lambda^k = (\sqrt{(\sigma'_{ij})^k (\sigma'_{ij})^k} - \sigma_T(\chi) n_{ij}^0 n_{ij}^k) / (g_1 + 2G + (2/3)[q^k - g_2^k])$, $g_2^k = g_2(\chi + \Delta \chi^k) n_{ij}^k \rho_{ij}^k$, модуль упрочнения $q^k = (\sigma_T(\chi + \Delta \chi^k) - \sigma_T(\chi)) n_{ij}^0 n_{ij}^k / \Delta \chi^k$, $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)^0 = 0$, $q^0 = \partial \sigma_T(\chi) / \partial \chi$, приращения компонент пластических деформаций $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)^{k+1} = \Delta \lambda^k n_{ij}^k$, приращение параметра Ордквиста $\Delta \chi^{k+1} = \sqrt{2/3} \Delta \lambda^k$, приращение компонент тензора микронапряжений $\Delta \rho_{ij}^{k+1} = g_1 (\Delta \varepsilon_{ij}^p)^{k+1} - g_2 (\chi + \Delta \chi^{k+1}) \rho_{ij}^k \Delta \chi^{k+1}$, компоненты девиатора напряжений $(\sigma'_{ij})^{k+1} = (\sigma'_{ij})^k - \Delta \rho_{ij}^{k+1} - 2G (\Delta \varepsilon_{ij}^p)^k$.

2. Проверяется выполнение условия текучести

$$\left| 1 - \frac{\sigma_T(\chi + \Delta \chi^{k+1})}{\sqrt{(\sigma'_{ij})^{k+1} (\sigma'_{ij})^{k+1}}} \right| \leq e \approx 10^{-3} \div 10^{-4}.$$

Если это условие не выполняется, то осуществляется переход к п. 1.

3. Определяются приращение компоненты деформации $\Delta\varepsilon_{\xi\xi}$ и изменение толщины h элементов оболочки:

$$(\Delta\varepsilon_{\xi\xi})^{m+1/2} = -\frac{\mu}{1-\mu} (\Delta\varepsilon_{ss}^e + \Delta\varepsilon_{\beta\beta}^e) - (\Delta\varepsilon_{ss}^p + \Delta\varepsilon_{\beta\beta}^p),$$

$$h^{m+1} = h^m [1 + (\Delta\varepsilon_{\xi\xi})^{m+1/2}].$$

2. Численное и экспериментальное исследование. Проводится численное и экспериментальное исследование деформирования металлических цилиндрических полых образцов при комбинированном нагружении растяжением и кручением. При квазистатическом нагружении начальное распределение скоростей перемещений вдоль оболочки полагается линейным, а скорость перемещения торца оболочки — постоянной, что позволяет не учитывать силы инерции при решении задачи. При численном моделировании используется диаграмма деформирования, полученная в эксперименте на растяжение при больших деформациях [8].

2.1. *Деформирование цилиндрической оболочки при кручении.* Исследуется упруго-пластическое деформирование цилиндрической оболочки, выполненной из стали марки 12Х18Н10Т, при кручении. Оболочка имеет следующие геометрические размеры: длина рабочей части $L = 92$ мм, радиус срединной поверхности $R = 14,5$ мм, толщина $h = 1$ мм. Один торец оболочки жестко зашпемлен, другой закручивается относительно оси с постоянной угловой скоростью \dot{u}_β . На рис. 1 приведена зависимость безразмерного крутящего момента $M^* = M/M_T$ ($M_T = 2\pi h R_0^2 \sigma_T / \sqrt{3}$) от условной сдвиговой деформации $\bar{\varepsilon}_{s\beta} = u_\beta R/L$, полученная при численном расчете и в эксперименте. Хорошее соответствие экспериментальных и расчетных данных подтверждает надежность методики, описывающей деформацию кручения. Следует отметить, что возникающие при чистом кручении кольцевые напряжения остаются малыми и составляют менее 0,1 % сдвиговых напряжений при использовании модели как с изотропным упрочнением, так и с комбинированным изотропным и кинематическим упрочнением.

2.2. *Деформирование цилиндрической оболочки при последовательном нагружении растяжением и кручением.* Рассматривается задача упругопластического деформирования цилиндрической оболочки при последовательном нагружении растяжением и кручением. Один торец оболочки жестко зашпемляется, второй перемещается с постоянной осевой

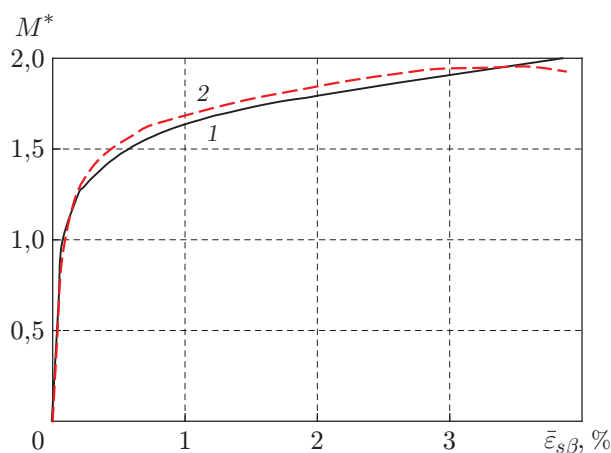


Рис. 1. Зависимость безразмерного крутящего момента M^* от условной сдвиговой деформации $\bar{\varepsilon}_{s\beta}$ при чистом кручении:

1 — численный расчет, 2 — эксперимент

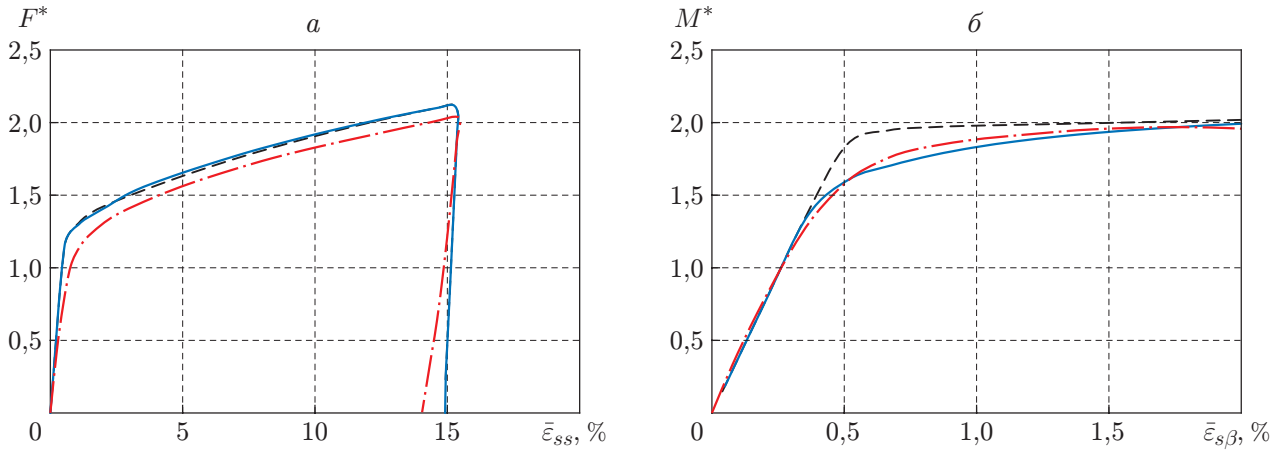


Рис. 2. Зависимости безразмерной осевой силы F^* от условной осевой деформации $\bar{\varepsilon}_{ss}$ (а) и безразмерного крутящего момента M^* от условной сдвиговой деформации $\bar{\varepsilon}_{s\beta}$ (б) при последовательном нагружении растяжением и кручением: сплошные линии — расчет с учетом кинематического упрочнения, штриховые — расчет с учетом изотропного упрочнения, штрихпунктирные — эксперимент

скоростью \dot{u}_z до достижения удлинения оболочки $\Delta L = 14,19$ мм, затем оболочка разгружается и свободный торец закручивается с постоянной угловой скоростью \dot{u}_β .

Расчетные и экспериментальные зависимости безразмерной осевой силы $F^* = F/F_T$ ($F_T = 2\pi R_0 h \sigma_T$) от условной осевой деформации $\bar{\varepsilon}_{ss} = u_z/L$ и безразмерного крутящего момента M^* от условной сдвиговой деформации приведены на рис. 2. При одноосном растяжении образца (простом нагружении) параметры напряженно-деформированного состояния, полученные с учетом изотропного и кинематического упрочнения, совпадают и хорошо согласуются с экспериментальными данными (погрешность определения безразмерной осевой силы F^* составляет менее 6 %). При сложном нагружении растяжением и кручением в начале процесса результаты расчета различаются: при изотропном упрочнении погрешность вычисления безразмерного крутящего момента M^* составляет 12 %, при комбинированном — менее 3 %. Учет комбинированного упрочнения позволяет более точно описать начало процесса сложного упругопластического деформирования при малых деформациях кручения ($\bar{\varepsilon}_{s\beta} < 1$ %). При развитых деформациях кручения расчетные кривые сближаются, так как в этом случае влияние “памяти” материала является несущественным.

2.3. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки при пропорциональном нагружении растяжением и кручением. Ниже исследуется потеря устойчивости цилиндрической оболочки при пропорциональном нагружении растяжением и кручением. Один торец оболочки остается жестко защемленным, другой перемещается и закручивается с постоянными осевой \dot{u}_z и угловой \dot{u}_β скоростями. Отношение условной деформации кручения $\bar{\varepsilon}_{s\beta} = u_\beta R/L$ к условной деформации растяжения $\bar{\varepsilon}_{ss} = u_z/L$ равно 1/6.

На рис. 3 представлены зависимости безразмерной осевой силы F^* от условной осевой деформации $\bar{\varepsilon}_{ss}$ и безразмерного крутящего момента M^* от условной сдвиговой деформации $\bar{\varepsilon}_{s\beta}$, полученные при численном расчете и в эксперименте. При пропорциональном нагружении результаты расчетов, полученные с использованием моделей, в которых учитываются изотропное и комбинированное упрочнение, совпадают. Различия результатов численных расчетов и экспериментальных данных, наблюдаемое на начальном этапе нагружения, объясняется особенностями проведения эксперимента, поскольку изменение сил,

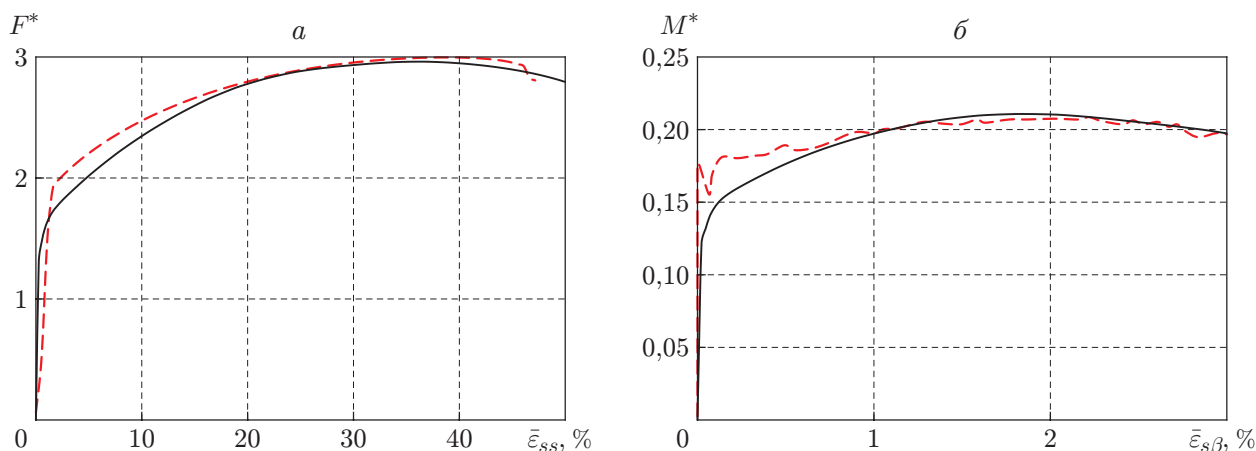


Рис. 3. Зависимости безразмерной осевой силы F^* от условной осевой деформации $\bar{\epsilon}_{ss}$ (а) и безразмерного крутящего момента M^* от условной сдвиговой деформации $\bar{\epsilon}_{s\beta}$ (б) при пропорциональном нагружении растяжением и кручением: сплошные линии — численный расчет, штриховые — эксперимент

перемещений и углов поворота происходит на захватных частях испытательной машины, а не в рабочей части образца. При комбинированном нагружении наблюдается существенное (в 10 раз) уменьшение моментов по сравнению с нагружением чистым кручением, при этом значение безразмерной осевой силы меняется менее значительно по сравнению со случаем одноосного растяжения. При заданном режиме комбинированного нагружения растяжением и кручением в эксперименте не происходит несимметричной потери устойчивости. Потеря устойчивости осесимметричного процесса упругопластического деформирования с образованием шейки происходит при $\bar{\epsilon}_{ss} = 0,4$, $\bar{\epsilon}_{s\beta} = 0,03$. Различие расчетных и экспериментальных значений диаметра шейки составляет менее 1 %.

2.4. *Динамическое нагружение цилиндрической оболочки растяжением и кручением.* Исследуется влияние скорости растяжения на потерю устойчивости цилиндрической оболочки. Свободный торец оболочки перемещается с линейно возрастающей скоростью $\dot{u}_z = at$ (ускорение a изменяется в диапазоне $0 \div 25$ м/с²). На рис. 4 приведены результаты

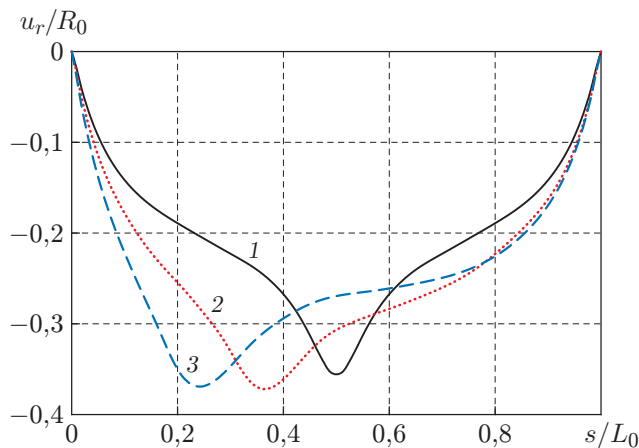


Рис. 4. Распределение относительных прогибов u_r/R_0 по длине оболочки после потери устойчивости пластического деформирования при различных скоростях нагружения: 1 — $a = 0$ (квазистатическое нагружение), 2 — $a = 5$ м/с², 3 — $a = 20$ м/с²

расчета относительного радиального перемещения. С увеличением ускорения a область локализации пластических деформаций в шейке увеличивается и смещается к нагружаемому торцу, что объясняется неоднородностью напряженно-деформированного состояния при динамическом растяжении оболочки и увеличением деформаций вблизи нагружаемого торца. При этом прогибы и деформации части оболочки, примыкающей к неподвижно защемленному торцу, уменьшаются. Аналогичные эффекты имеют место при комбинированном пропорциональном нагружении растяжением и кручением.

Заключение. Разработана методика численного моделирования процессов осесимметричного упругопластического деформирования и предельных состояний оболочек вращения в широком диапазоне скоростей нагружения (от квазистатических до динамических). В качестве базовой методики использовалась вариационно-разностная методика решения осесимметричных задач с пошаговым изменением геометрии оболочки. Вращение элементов при кручении учитывалось путем введения коротационной производной Яумана при умеренных сдвиговых деформациях. Проведено теоретическое и экспериментальное исследование поведения металлических цилиндрических полых образцов при комбинированных нагружениях растяжением и кручением. Установлено, что результаты расчетных и натуральных экспериментов хорошо согласуются.

Авторы выражают благодарность А. Н. Горохову за помощь в проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коробейников С. Н.** Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 5. С. 39–59.
2. **Баженов В. Г., Баранова М. С., Кибец А. И. и др.** Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 86–105.
3. **Баженов В. Г., Ломунов В. К.** Устойчивость и закритическое состояние оболочек вращения при осевом ударе // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 9. С. 28–33.
4. **Абросимов Н. А.** Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2002.
5. **Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т.** Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 5. С. 156–173.
6. **Баженов В. Г., Павленкова Е. В., Артемьева А. А.** Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычисл. механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 427–434.
7. **Chaboche J. L.** Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // Intern. J. Plasticity. 1989. V. 5, N 3. P. 247–302.
8. **Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Павленкова Е. В.** Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения-кручения осесимметричных тел при больших деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 57–66.
9. **Баженов В. Г.** Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом / В. Г. Баженов, Д. Т. Чекмарев. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2000.

*Поступила в редакцию 20/III 2014 г.,
в окончательном варианте — 8/VII 2014 г.*