

С. С. Вильковский

## ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ОПИСАНИЕ С ИХ ПОМОЩЬЮ КИНЕТИКИ СТЕКЛОВАНИЯ ЖИДКОСТИ

Жидкости и аморфные твердые тела одновременно проявляют как вязкие, так и упругие свойства, и между ними существует только количественное различие, характеризующее временем релаксации [1—4]. Поэтому поведение вещества в жидком и аморфном (стеклообразном) состоянии может быть описано одними и теми же уравнениями, переходящими в уравнения гидродинамики и теории упругости изотропных тел при высоких и низких температурах соответственно [3]. Необходимость таких уравнений в настоящее время существенно возросла в связи с разработкой методов получения с помощью сверхбыстрой закалки из расплава новых аморфных материалов, особенно аморфных металлов [5, 6], механические, магнитные и многие другие свойства которых во многом определяются вязкоупругими процессами, происходящими при их образовании [6—8]. Впервые Максвелл предложил уравнения, описывающие одновременно вязкое и упругое поведение жидкости для однородной сдвиговой деформации [2, 3]. Дальнейшее обобщение теории Максвелла в случае простых аморфных тел и жидкостей предложено в [3, 7—10].

В настоящей работе приведено обобщение уравнений гидродинамики жидкости и теории упругости изотропных тел для произвольного движения и изменения температуры вязкоупругого сжимаемого материала. Обобщение уравнений производилось без разделения движения на чисто сдвиговое и объемное. Полученные уравнения позволяют единым образом описать основные особенности вязкоупругого поведения обычных жидкостей и аморфных твердых тел и кинетики превращения переохлажденной жидкости в стеклообразное состояние с понижением температуры. Решение уравнений приводится для однородного изменения объема жидкости под действием изменяющейся температуры в области температуры стеклования и распространения упругой поперечной волны в глубь полубесконечного вязкоупругого материала.

Рассмотрим деформацию жидкости, тензор деформации которой может быть представлен в виде  $u_{ik} = (\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i) / 2$  ( $\mathbf{u}$  — вектор деформации). Данная деформация зависит от упругого изменения расстояния между атомами, которое охарактеризуем параметром  $\psi$ , и перестройки структуры атомов жидкости, деформацию которой будем характеризовать параметром  $\varphi$  (если какая-нибудь из данных деформаций не может быть описана одним параметром, то под соответствующей величиной следует понимать совокупность необходимых параметров).

Таким образом, считаем, что тензор деформации  $u_{ik}$  — функция переменных  $\varphi$  и  $\psi$ , которые формально можно рассматривать не зависящими друг от друга, и в то же время каждая из них есть функция времени. Поэтому тензор скорости деформации  $v_{ik} = (\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i) / 2$  ( $\mathbf{v}$  — вектор скорости деформации) может быть представлен как

$$(1) \quad v_{ik} = \frac{du_{ik}}{dt} = \left. \frac{du_{ik}}{dt} \right|_{\varphi=\text{const}} + \left. \frac{du_{ik}}{dt} \right|_{\psi=\text{const}} = v'_{ik} + v''_{ik},$$

где  $v'_{ik}$  соответствует тензору скорости упругой деформации;  $v''_{ik}$  связан с перестройкой структуры жидкости и поэтому отвечает тензору скорости вязкой деформации. Это эквивалентно объединению, согласно Максвеллу, вязкой и упругой деформации. В [3, 9] такое объединение используется для недиагональных компонент тензоров  $u_{ik}$  и  $v_{ik}$  и их девиаторов. Будем считать, согласно предыдущим рассуждениям, что формула (1) верна для всех компонент тензора  $v_{ik}$ .

Рассмотрим движение вязкоупругого вещества. Общее уравнение механики сплошных сред имеет вид [11]

$$(2) \quad \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i.$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала;  $f_i$  — компонента вектора объемной силы;  $\sigma_{ik}$  — тензор напряжений. Уравнение (2) обычно дополняется уравнением неразрывности

$$(3) \quad \partial \rho / \partial t + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0.$$

Считаем, что действующие на вещество напряжения не являются достаточно большими. В этом случае для упругой деформации выполняется закон Гука. В теории упругости тензор напряжений для изотропного тела с учетом изменяющейся температуры [11]

$$(4) \quad \sigma_{ik} = -k'\beta'(T - T_0)\delta_{ik} + 2M'u'_{ik} + L'u'_{il}\delta_{ik} + \lambda'v'_{il}\delta_{ik} + 2\eta'_s v'_{ik},$$

где  $L'$  и  $M'$  — коэффициенты Ламэ;  $T_0$  — начальная температура;  $k' = L' + 2M'/3$  — модуль всестороннего сжатия;  $\beta'$  — температурный коэффициент объемного расширения стекла;  $\lambda'$  и  $\eta'_s$  — коэффициенты, характеризующие объемную и сдвиговую вязкость (внутреннее трение) вещества как твердого тела [11, с. 781].

Тензор напряжений вязкой сжимаемой жидкости [11]

$$(5) \quad \sigma_{ik} = -p_\alpha \delta_{ik} + \lambda'' v''_{il} \delta_{ik} + 2\eta''_s v''_{ik}$$

( $p_\alpha$  — давление,  $\lambda''$  и  $\eta''_s$  — коэффициенты, характеризующие объемную и сдвиговую вязкость жидкости). Для получения уравнения, связывающего тензор напряжений и тензор скорости деформации вязкоупругого материала, проведем объединение уравнений (4) и (5) в соответствии с формулой (1). Для этого из (5) найдем

$$(6) \quad v''_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{2\eta''_s} - \frac{\lambda''}{2\eta''_s} \left( \frac{\sigma_{il} + 3p_\alpha}{3\lambda'' + 2\eta''_s} \right) \delta_{ik} + \frac{p_\alpha}{2\eta''_s} \delta_{ik}.$$

Далее продифференцируем (4) по времени. В нем последние два слагаемых, которые учитывают, что процесс происходит с конечной скоростью, для большинства реальных процессов играют несущественную роль. Поэтому в дальнейшем ими пренебрежем. Отметим, что их учет приведет только к несколько более сложным формулам. Коэффициенты  $L'$ ,  $M'$ ,  $\beta'$  относительно слабо изменяются в зависимости от температуры и давления. Поэтому их будем считать не зависящими от времени. В результате

$$(7) \quad \frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -k'\beta' \frac{dT}{dt} \delta_{ik} + L'v'_{il} \delta_{ik} + 2M'v'_{ik}.$$

Заменяя в (7)  $v'_{ik}$  на  $v_{ik} - v''_{ik}$  и подставляя вместо  $v''_{ik}$  его значение из (6), получаем систему дифференциальных уравнений, связывающих тензоры  $\sigma_{ik}$  и  $v_{ik}$ :

$$(8) \quad \frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -k'\beta' \frac{dT}{dt} \delta_{ik} + L' \left( v_{il} - \frac{\sigma_{il} + 3p_\alpha}{3\lambda'' + 2\eta''_s} \right) \delta_{ik} + \\ + 2M' \left[ v_{ik} - \frac{\sigma_{ik}}{2\eta''_s} - \frac{p_\alpha}{2\eta''_s} \delta_{ik} + \frac{\lambda''}{2\eta''_s} \left( \frac{\sigma_{il} + 3p_\alpha}{3\lambda'' + 2\eta''_s} \right) \delta_{ik} \right].$$

Система (2), (3), (8) представляет собой десять независимых уравнений (поскольку  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ ,  $v_{ik} = v_{ki}$ ) в общем случае с двенадцатью неизвестными: шесть компонент тензора  $\sigma_{ik}$ , три компоненты вектора  $\mathbf{v}$ , давление  $p_\alpha$ , плотность  $\rho$  и температура  $T$ . Если необходимо определить деформацию, то система дополняется уравнением  $\mathbf{v} = d\mathbf{u}/dt$ . Она может быть решена в том случае, если для конкретного условия задачи окажется замкнутой. В противном случае, так же как и в гидродинамике, необходимо решать расширенную систему, дополненную уравнением энергии  $\rho d\vartheta/dt = \sigma_{ik}v_{ik} - \partial q/\partial x_i$  ( $\mathbf{q}$  и  $\vartheta$  — вектор теплового потока и удельная внутренняя энергия среды), состояния жидкости и др.

Для несжимаемой жидкости ( $v'_{il} = v''_{il} = v_{il} = 0$ ) и постоянной температуры, используя систему (1), (2), (8), получаем

$$(9) \quad \frac{1}{\eta''_s} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i} + \left( \frac{1}{M'} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta''_s} \right) \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - f_i \right) = \nabla^2 v_i$$

( $\nabla^2$  — оператор Лапласа). Уравнение (9) отличается от соответствующего в [10, с. 234] тем, что здесь отсутствует слагаемое  $(1/M') [d(\partial p_\alpha / \partial x_i) / dt]$ . Это связано с тем, что в настоящей работе обобщение уравнений гидродинамики и теории упругости проводилось согласно уравнению (1), а в [10] — заменой множителя  $1/\eta_s''$  в уравнении Навье — Стокса максвелловским оператором  $1/\eta_s'' + (1/M')(d/dt)$ . Решение системы уравнений (2), (3), (8) в общем случае представляет собой значительные трудности, однако в некоторых случаях они могут быть легко решены.

Рассмотрим распределение напряжения и деформации в полубесконечном вязкоупругом материале, на поверхности которого действует сдвиговое синусоидальное напряжение  $\sigma_{yx} = \sigma_{yx}^0 \exp(i\omega t)$  (ось  $y$  направлена вдоль поверхности,  $x$  — внутрь материала, причем на поверхности  $x = 0$ ). Считаем, что  $\rho$ ,  $\eta_s''$  и  $T$  постоянны. Решение ищем в виде  $\sigma_{yx} = \sigma_{yx}^0 \exp[i(\omega t - \nu x) - \mu x]$ ,  $v_y = v_y^0 \exp[i(\omega t - \nu x) - \mu x]$  ( $\sigma_{yx}^0$ ,  $v_y^0$ ,  $\nu$ ,  $\mu$  — константы). В системе (2), (3), (8) в данном случае отличными от нуля являются два уравнения. Их решение имеет вид

$$\mu, \nu = \sqrt{\frac{V \alpha^2 + \gamma^2 \mp \alpha}{2}}, \quad v_y^0 = \sigma_{yx}^0 (\nu - i\mu) / \rho \omega$$

$$(\alpha = \rho \omega^2 / M', \quad \gamma = -\rho \omega / \eta_s'').$$

При  $\eta_s''$ , стремящемся к бесконечности,  $\mu = 0$ , а  $\nu = \sqrt{\rho \omega^2 / M'}$ , т. е. вещество ведет себя как идеально упругое тело. При  $\eta_s''$ , стремящемся к нулю,  $\mu = \nu = \sqrt{\rho \omega / 2 \eta_s''} \rightarrow \infty$ , и, таким образом, как и в подвижной жидкости, волна быстро затухает вблизи поверхности. С понижением температуры вязкость жидкости быстро увеличивается от малых до очень больших значений (вблизи температуры стеклования  $T_g$ ), а коэффициенты Ламэ относительно медленно изменяются в зависимости от температуры. Поэтому, как можно видеть из (1), (6), система (2), (3), (8) выше температуры стеклования описывает вязкую жидкость, а ниже — упругое твердое тело (стекло) и, таким образом, должна отражать процесс стеклования жидкости.

Рассмотрим изменение объема под действием температуры в области стеклования жидкости. Для однородного изменения объема недиагональные компоненты тензоров  $\sigma_{ik}$  и  $v_{ik}$  обращаются в нуль и уравнение (8) принимает вид

$$(10) \quad \frac{d\sigma_{11}}{dt} = -3k'\beta' \frac{dT}{dt} + (3L' + 2M') \left( v_{11} - \frac{3p_\alpha + \sigma_{11}}{3\lambda'' + 2\eta_s''} \right).$$

Будем считать, что объемное течение происходит достаточно медленно. Тогда в уравнении (2) положим  $\rho d\mathbf{v}/dt = 0$ , а следовательно (в дальнейшем будем считать  $\mathbf{f} \equiv 0$ ), и  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k = 0$ . Таким образом, диагональные компоненты тензора  $\sigma_{ik}$  не зависят от координаты. Поскольку на границе они должны быть равны внешнему давлению  $-p$ , получаем, что по всему объему  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$ . Можно показать, что для однородного изменения объема  $v_{11} = \text{div } \mathbf{v} = (1/w)(dw/dt)$  ( $w$  — объем жидкости). Делая замену в уравнении (10)  $\sigma_{11} = -3p$ ,  $v_{11} = (1/w)(dw/dt)$ ,  $k' = L' + 2M'/3$ , имеем

$$(11) \quad -\frac{1}{w} \frac{dw}{dt} = \beta' \frac{dT}{dt} - \chi' \frac{dp}{dt}; \quad \frac{p_\alpha - p}{\eta_v''} = \beta' \frac{dT}{dt} - \chi' \frac{dp}{dt} - \frac{w - w_p}{w\tau}.$$

Здесь  $\chi' = 1/k'$  — мгновенный коэффициент сжимаемости (коэффициент сжимаемости стекла);  $\eta_v'' = \lambda'' + 2\eta_s''/3$  — объемная вязкость жидкости. В последнем равенстве заменена разность  $p_\alpha - p$  на  $w - w_p$  введением коэффициента структурной (обусловленной вязким течением) сжимаемости жидкости  $\Delta\chi = \chi - \chi' = -(w - w_p)/w(p_\alpha - p)$ , где  $\chi$  — статический коэффициент сжимаемости жидкости,  $w$  — объем жидкости

после осуществления в ней упругой деформации,  $w_p$  — равновесное значение объема, и обозначения  $\tau = \Delta\chi\eta''_v$ . Введение коэффициента структурной сжимаемости объясняется тем, что слагаемое  $(p_\alpha - p)/\eta''_v$  в (11) описывает только вязкое течение жидкости.

Пусть жидкость охлаждается с постоянной скоростью  $\dot{T} = dT/dt$  в условиях постоянного внешнего давления  $p = \text{const}$ . Если перейти в уравнении (11) к переменной  $T$ , то

$$(12) \quad \frac{1}{w} \frac{dw}{dT} = \beta' - \frac{w - w_p}{w\tau\dot{T}}.$$

С понижением температуры  $\eta''_s$ , а следовательно, и  $\tau$  ( $\Delta\chi$  относительно слабо изменяется с температурой) возрастают от малого значения до очень большого. Поэтому, согласно (12), при высоких температурах объем жидкости практически равен равновесному. При низкой же температуре объем изменяется (аналогично стеклу) согласно

$$(13) \quad \frac{1}{w} \frac{dw}{dT} = \beta'.$$

Таким образом, (12) описывает переход из переохлажденного жидкого состояния в стеклообразное. Уравнения (11), (12) позволяют отразить основные особенности процесса стеклования жидкости. По сравнению с существующими теориями стеклования здесь пропорциональность времени релаксации и вязкости жидкости является не постулатом, а следствием. Объемная и сдвиговая вязкости имеют одинаковую или близкие температурные зависимости и поэтому могут быть связаны друг с другом посредством коэффициента пропорциональности [12].

Однако данные уравнения приводят к простому экспоненциальному закону изменения объема жидкости при изотермической релаксации в случае малого изменения ее температуры, что не отражает в полной мере реального процесса релаксации жидкости [4, 6]. Кроме того, в стеклах наблюдается эффект «памяти», который проявляется в некотором большем возрастании объема стекла с увеличением температуры при приближении к температуре стеклования, несмотря на то что равновесное значение объема лежит обычно ниже объема стекла, что также не может быть описано данными уравнениями. Однако эффект «памяти» мал. Поэтому в первом приближении уравнения (11), (12) позволяют правильно отразить процесс стеклования жидкости. Они могут быть использованы для исследования кинетики стеклования быстроокаленных аморфных металлов и более последовательно и полно описывают процесс стеклования расплава, чем применяемые в этом случае теории [13, 14], поскольку учитывают кроме структурной также упругую деформацию и время релаксации в данных уравнениях имеет определенное значение.

При выводе (8) учитывали только упругую и вязкую деформации. Однако в жидкости вблизи температуры стеклования  $T_g$  при сдвиге проявляется еще замедленно-упругая, или эластическая, деформация [3, 6, 15]. Попробуем обобщить уравнения вязкоупругого движения жидкости с ее учетом.

Данная деформация при приложении к аморфному веществу сдвигового напряжения  $\sigma_{12}$  возрастает в соответствии с формулой  $u''_{12} = (\sigma_{12}/2M''')\Phi(t)$  [3, 6, 15] ( $\Phi(t)$  — функция, изменяющаяся от нуля до единицы,  $M'''$  — модуль сдвига эластической деформации). При снятии напряжения эта деформация полностью исчезает. На опыте она наблюдается практически только вблизи  $T_g$ , поскольку ее время релаксации выше  $T_g$  становится очень малым, а ниже — очень большим [3], и в простейшем случае имеет вид [9, 3]

$$(14) \quad \sigma_{12} = 2M'''' u''_{12} + 2\eta''_s v''_{12}$$

( $\eta''_s$  — сдвиговая вязкость эластической деформации). Эта формула поз-

воляет удовлетворительно описывать экспериментальные данные по стеклованию [16]. Предположим, что аналогично деформации на сдвиг для объемного течения помимо упругой и вязкой деформации существует также эластическая деформация. Поскольку в этом случае вязкая деформация ведет себя тоже замедленно-упруго, то здесь накладываются две замедленно-упругие деформации, и прямо экспериментально наблюдать их порознь трудно, но можно проверить косвенным путем. Данное предположение, как будет показано ниже, позволяет объяснить неэкспоненциальный закон релаксации объема жидкости и наличие эффекта «памяти» в аморфном материале.

Формула (14) аналогична (4) для недиагональных компонент тензора напряжений. Можно предположить, что тензор эластической деформации имеет вид, аналогичный (4):

$$(15) \quad \sigma_{ik} = -k''' \beta''' (T - T_0) \delta_{ik} + L''' u_{il}'' \delta_{ik} + \\ + 2M''' u_{ik}'' + \lambda''' v_{il}'' \delta_{ik} + 2\eta_s'' v_{ik}''.$$

Здесь коэффициенты эластической деформации аналогичны коэффициентам формулы (4);  $\beta'''$  — температурный коэффициент объемного расширения эластической деформации;  $k''' = L''' + 2M'''/3$ . Согласно [3, 15], упругая, вязкая и эластическая деформации проявляют себя независимо. Поэтому общая деформация равна их сумме:  $v_{ik} = v'_{ik} + v''_{ik} + v'''_{ik}$ .

Продифференцируем (15) по времени, считая аналогично получению (7), что  $L'''$ ,  $M'''$  и  $\beta'''$  не зависят от времени. В то же время  $\eta_s'''$  сильно изменяется с температурой [3]. Поэтому от  $\eta_s'''$  и  $\lambda'''$  будем брать производные по времени. Затем в найденном уравнении заменим  $v'''_{ik}$  на  $v_{ik} - v'_{ik} - v''_{ik}$  и подставим вместо  $v'_{ik}$  и  $v''_{ik}$  их значения из (6), (7). В результате имеем уравнение, связывающее тензор напряжений и тензор скорости деформации для среды, обладающей вязкими, упругими и эластическими свойствами:

$$(16) \quad \frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -k''' \beta''' \frac{dT}{dt} \delta_{ik} + \left( L''' + \frac{d\lambda'''}{dt} \right) \left[ v_{il} - \frac{d\sigma_{il}/dt + 3k'\beta'dT/dt}{3L' + 2M'} - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_{il} + 3p_\alpha}{3\lambda'' + 2\eta_s''} \right] \delta_{ik} + 2 \left( M''' + \frac{d\eta_s'''}{dt} \right) \left\{ v_{ik} - \frac{1}{2M'} \left[ \frac{d\sigma_{ik}}{dt} + k'\beta' \frac{dT}{dt} \delta_{ik} - \right. \right. \\ \left. \left. - L' \frac{d\sigma_{il}/dt + 3k'\beta'dT/dt}{3L' + 2M'} \delta_{ik} \right] - \frac{1}{2\eta_s''} \left[ \sigma_{ik} + p_\alpha \delta_{ik} - \lambda'' \left( \frac{\sigma_{il} + 3p_\alpha}{3\lambda'' + 2\eta_s''} \right) \delta_{ik} \right] \right\} + \\ + \lambda''' \frac{d}{dt} \left[ v_{il} - \frac{d\sigma_{il}/dt + 3k'\beta'dT/dt}{3L' + 2M'} - \frac{\sigma_{il} + 3p_\alpha}{3\lambda'' + 2\eta_s''} \right] \delta_{ik} + \\ + 2\eta_s''' \frac{d}{dt} \left\{ v_{ik} - \frac{1}{2M'} \left[ \frac{d\sigma_{ik}}{dt} + k'\beta' \frac{dT}{dt} \delta_{ik} - L' \frac{d\sigma_{il}/dt + 3k'\beta'dT/dt}{3L' + 2M'} \delta_{ik} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\eta_s''} \left[ \sigma_{ik} + p_\alpha \delta_{ik} - \lambda'' \left( \frac{\sigma_{il} + 3p_\alpha}{3\lambda'' + 2\eta_s''} \right) \delta_{ik} \right] \right\}.$$

Рассматривая аналогично однородное объемное течение для постоянного внешнего давления, получаем из (16)

$$(17) \quad k''' \beta''' \frac{dT}{dt} = k''' g + \frac{d}{dt} (\eta_v''' g) \\ (\eta_v''' = \lambda''' + 2\eta_s'''/3, \quad g = (1/w) (dw/dt) - \beta'dT/dt - (p_\alpha - p)/\eta_v'').$$

Если положить в (17)  $\eta_v''' = 0$  и перейти к переменной  $T$ , то

$$(18) \quad \frac{1}{w} \frac{dw}{dT} = \beta' + \beta''' - \frac{w - w_F}{w\tau T}.$$

Здесь  $\tau = \Delta\chi\eta_v''$ ;  $\Delta\chi$  — коэффициент структурной (обусловленной только вязким течением) сжимаемости жидкости.

С понижением температуры  $\tau$  возрастает и последнее слагаемое в (18) становится пренебрежимо малым. Как отмечается в [3, 6, 10], время релаксации эластической деформации  $\tau_e = \eta_v''/M'''$ , являясь малым при высокой температуре, резко возрастает с понижением температуры, что обусловлено увеличением  $\eta_v''$ . Так как  $\eta_v'' = \lambda''' + 2\eta_s''/3$ , то объемная вязкость эластической деформации существует, даже если  $\lambda''' = 0$ , и изменяется аналогично сдвиговой вязкости  $\eta_s''$ . Поэтому, в связи с тем что с понижением температуры  $\eta_v''$  и  $\eta_s''$  значительно возрастают, при низких температурах, согласно (17), объем изменяется в соответствии с уравнением (13).

Таким образом, с понижением температуры должно наблюдаться замораживание двух структурных деформаций: вязкой, исчезающей с возрастанием  $\eta_s''$ , и эластической, исчезающей с увеличением  $\eta_v''$ . Поскольку эластическая деформация наблюдается при более низких температурах, чем вязкая [3, 6, 15], то, по-видимому, при нагревании происходит вначале размораживание эластической деформации, а затем вязкой, чем и можно объяснить наличие эффекта «памяти» в стекле. Явление отклонения от экспоненциального закона возвращения объема жидкости к равновесному значению даже при очень малых отклонениях от равновесия [4, 6] можно объяснить также наличием совместно с вязкой эластической деформации.

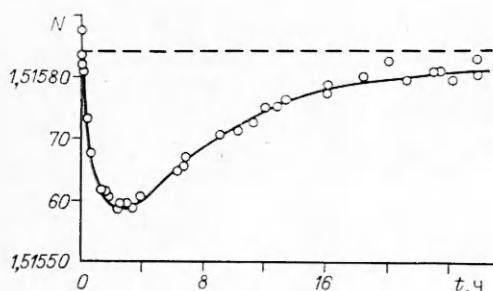
Рассмотрим процесс релаксации жидкости. Пусть вначале температура расплава «мгновенно» ( $\dot{T} \rightarrow \infty$ ) изменяется от  $T_1$  до  $T_2$  и затем выдерживается при  $T = T_2$ . Будем считать, что скачок температуры достаточно мал, чтобы изменением вязкости в данном процессе можно было пренебречь ( $\eta_v'' = \text{const}$ ,  $\eta_s'' = \text{const}$ ). В этом случае  $\eta_v'' \neq 0$ , и поэтому в уравнении (17) полагаем  $(p - p_\alpha)/\eta_v'' = (w - w_p - \Delta w_s)/\tau$ , где  $\tau = \Delta \chi \eta_v''$ ,  $\Delta w_s = \Delta w_s^0 \exp(-t/\tau_s)$  — часть изменения объема, обусловленная действием только эластической деформации. Здесь  $\tau_s = \eta_v''/k'''$ ,  $\Delta w_s^0 \approx w_p \beta'''(T_1 - T_2)$ . Значение  $\Delta w_s$  получается из решения уравнения (15). Решение уравнения (17) для данного двухстадийного процесса имеет вид

$$w(t) = \Delta w_v^0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \Delta w_s^0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right) + w_p$$

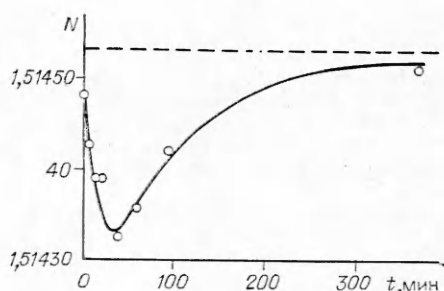
( $\Delta w_v^0$  — начальное отклонение объема, связанное только с вязким течением). Таким образом, релаксация объема выражается в виде суммы двух экспонент, что в принципе может объяснить отклонение закона релаксации жидкости от экспоненциального (описываемого одной экспонентой), наблюдаемого на опыте.

Наличие термической предыстории стекла, определяющее его структурное состояние, проявляется в следующем эксперименте [6, с. 123; 17]. При температуре  $T_\alpha$  релаксация жидкости осуществляется до тех пор, пока удельный объем или показатель преломления стекла  $N$  не достигнут значения, которое имеется в равновесном материале при  $T_\beta$ . Затем температура резко изменяется от  $T_\alpha$  до  $T_\beta$ . В результате наблюдается типичная картина остаточной релаксации, представленная на рис. 1, 2, где приведена зависимость показателя преломления от времени для боросиликатного стекла в эксперименте с резким изменением температуры [17] (точки — эксперимент). Сплошная линия соответствует формуле (19) с  $N_\infty = 1,51584$ ,  $N_1 = 0,00094$ ,  $N_2 = -0,00086$ ,  $\tau_p = 75$  мин,  $\tau_g = 540$  мин для рис. 1, штриховая —  $N = N_\infty$  ( $N_\infty$  — равновесное значение свойства  $N(t)$ ), а для рис. 2  $N_\infty = 1,51453$ ,  $N_1 = 0,00064$ ,  $N_2 = -0,00064$ ,  $\tau_p = 12$  мин,  $\tau_g = 96$  мин.

Кривые типа показанных на рис. 1, 2 анализировались в предположении существования медленных и быстрых релаксационных процессов в материале [17]. Релаксационное уравнение, описывающее данный



Р и с. 1



Р и с. 2

процесс для малых отклонений от равновесия, выражалось в виде суммы двух экспонент:

$$(19) \quad N(t) = N_{\infty} + [N_1 \exp(-t/\tau_p) + N_2 \exp(-t/\tau_g)]/2$$

( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\tau_p$ ,  $\tau_g$  — константы, причем  $\tau_p$  и  $\tau_g$  имеют смысл времен релаксации).

Рассмотрим данный процесс, имеющий четыре стадии. Сначала стекло находится в равновесном состоянии при  $T_1$ . В первой стадии происходит резкий переход к  $T_2$  и изотермическая выдержка при данной температуре. При достижении значения объема стекла, равного равновесному значению объема при  $T_3$  (лежащей между  $T_1$  и  $T_2$ ), стекло резко переводится к  $T_3$  и опять происходит изотермическая выдержка. Будем считать, что происходящие изменения температуры достаточно малы. Тогда, как и раньше,  $\eta_v'' \approx \text{const}$ ,  $\eta_v''' \approx \text{const}$ ,  $d\eta_v''/dt \approx 0$ . Решение уравнения (17) в этом случае имеет вид

$$(20) \quad w(t) = w_{3,\infty} + A [\exp(-t/\tau) - \exp(-t/\tau_s)] + a \exp(-t/\tau),$$

где  $A \approx w_{3,\infty} \beta''' \tau [(T_2 - T_1) \exp(-t_1/\tau_s) + (T_3 - T_2)] / (\tau_s - \tau)$ ;  $a = w_{3,\infty} \beta' (T_3 - T_2)$ ;  $w_{n,\infty}$  — равновесный объем при  $T = T_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ). Значение времени  $t_1$  может быть вычислено из уравнения  $w_{3,\infty} = w_{2,\infty} + \Delta w_v^0 \times \exp(-t_1/\tau) + \Delta w_s^0 \exp(-t_1/\tau_s)$  ( $\Delta w_v^0$  и  $\Delta w_s^0$  — изменения объема при переходе от температуры  $T_1$  к  $T_2$  за бесконечно большой промежуток времени, обусловленный вязкой и эластической деформацией соответственно). Отсюда следует, что релаксация объема для данной предыстории процесса выражается в виде суммы двух экспонент аналогично уравнению (19). Экспериментальные значения, показанные на рис. 1, 2, описываются уравнением (19), в котором  $N_1$  и  $N_2$  имеют значения, близкие по абсолютной величине, но противоположные по знаку [17], что отвечает уравнению (20).

Таким образом, суммируя полученные в настоящей работе результаты, можно сказать, что подход Максвелла, позволяющий описать одновременно вязкое и упругое поведение жидкостей для однородной сдвиговой деформации, распространенный в [3, 7—9] на произвольные, но малые деформации аморфных твердых тел, обобщен для произвольного движения вязкоупругой сжимаемой среды с учетом изменяющейся температуры путем объединения тензоров скоростей вязкой и упругой деформации без разделения движения на чисто сдвиговое и объемное. Полученные уравнения позволяют описать одновременно вязкое и упругое поведение обычных жидкостей и аморфных твердых тел и кинетику превращения жидкости в стеклообразное состояние под действием изменяющейся температуры.

Введенное предположение о существовании, подобно сдвиговой деформации, для объемного течения помимо упругой и вязкой также эластической деформации позволяет объяснить неэкспоненциальный закон релаксации объема жидкости и наличие эффекта «памяти» в аморфном материале.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей.— М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1951.
2. Кобеко П. П. Аморфные вещества.— М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. Френкель Я. П. Кинетическая теория жидкостей.— Л.: Наука, 1975.
4. Мазурин О. В. Стеклование и стабилизация неорганических стекол.— Л.: Наука, 1978.
5. Быстрозакаленные металлы/Под ред. Б. Кантора: Пер. с англ.— М.: Metallurgia, 1983.
6. Металлические стекла/Под ред. Дж. Дж. Гилмана и Х. Дж. Лимп: Пер. с англ.— М.: Metallurgia, 1984.
7. Дорофеева Е. А., Прокошин А. Ф. Магнитная анизотропия аморфных металлических сплавов на основе железа // ФММ.— 1984.— Т. 57, № 3.
8. Дорофеева Е. А. О микроструктуре металлического стекла // ФММ.— 1987.— Т. 63, № 2.
9. Френкель Я. П., Образцов Ю. Н. Феноменологическая теория механических свойств аморфных тел и распространение колебаний в них // ЖЭТФ.— 1939.— Т. 9, № 9.
10. Френкель Я. П. Кинетическая теория жидкостей.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1954.
12. Литовиц Т., Дэвис К. Структурная и сдвиговая релаксация в жидкости // Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ.— М.: Мир, 1968.— Т. 2, ч. А.
13. Рамачандрарао П. Интервал стеклования в металлических стеклах // Быстрозакаленные металлы/Под ред. Б. Кантора: Пер. с англ.— М.: Metallurgia, 1983.
14. Anderson P. M., Lord A. E. The correlation between viscous flow and differential scanning calorimetry // Mater. Sci. Engng.— 1980.— V. 43, N 2.
15. Кобеко П. П., Кувшинский Е. В., Гуревич Г. И. Исследование аморфного состояния // Изв. ОМЭН.— 1937.— Т. 3, № 2.
16. Листошин Б. В. О методике определения термомеханической температуры стеклования неорганических стекол // Физика и химия стекла.— 1984.— Т. 10, № 6.
17. Macedo P. B., Napolitano A. Effects of a distribution of volume relaxation times in the annealing of BSC glass // J. Res. NBS.— 1967.— V. 71A, N 2.

г. Донецк

Поступила 13/Х 1987 г.,  
в окончательном варианте —  
11/III 1988 г.

УДК 539.3

*Л. Г. Доборджгинидзе*

### ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛА ГАРМОНИЧЕСКОГО ТИПА

В условиях простого нагружения исследована плоская контактная упругопластическая задача [1] нелинейной теории упругости для полуплоскости из материала гармонического типа [2]. Силы трения на контактной области отсутствуют. Приводится решение упругопластической задачи о растяжении бесконечной плоскости из указанного материала, ослабленной двумя полубесконечными разрезами, расположенными вдоль действительной оси [3]. Получено точное решение рассматриваемых задач.

1. Пусть нелинейно-упругая полуплоскость  $S$  занимает нижнюю часть плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  и вдоль линии  $L' = [-b; b]$  границы  $S$ , обозначаемой далее через  $L$ , приложен жесткий штамп симметрично относительно начала координат. На штамп действует сосредоточенная сила  $(0, N_0)$ , направленная вертикально вниз вдоль оси  $Oy$ , где  $N_0$  — заданная постоянная. Остальная часть границы ( $L'' = ]-\infty; -b[ \cup ]b; \infty[$ ) свободна от внешних воздействий. Напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют.

При определенном значении внешней нагрузки на контактной области под штампом вблизи наибольшей концентрации контактных напря-