

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ИНДУКТИВНОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ

**В.П. Губатенко, О.С. Пескова**

*Саратовский государственный технический университет,  
410016, Саратов, ул. Политехническая, 77, Россия*

Проведена количественная оценка погрешностей, вносимых измерительным проводом при регистрации плоского и осесимметрического электрического поля. Предложены два подхода к изучению этой проблемы: исследование аналитических решений и метод интегральных уравнений. Показано, что отличия истинного электрического поля от измеренного возрастают с увеличением частоты колебаний электромагнитного поля, толщины измерительного провода и его электропроводности. Эти отличия меньше при измерении осесимметричного электрического поля замкнутым проводом, чем при регистрации плоского электрического поля прямолинейным проводом. Увеличение радиуса замкнутого провода при измерении осесимметричного электрического поля приводит на тех же частотах к возрастанию погрешностей в показаниях измерительных приборов.

*Индуктивная электроразведка, математическое моделирование, измерение электрического поля, измерительный провод, интегральные уравнения, асимптотика.*

### MATHEMATICAL MODELING OF ELECTRICAL FIELD IN INDUCTION LOGGING

**V.P. Gubatenko and O.S. Peskova**

We estimated the instrumental error introduced by logging tools into the measured plane and axisymmetrical electrical fields. The problem can be solved either through investigation of analytical solutions or using integral equations. The difference between the true and the measured field increases with frequency of electromagnetic waves and tool thickness and conductivity. The difference is lower in the case of the axisymmetrical electrical field measured by a close tool than in the case of logging with a straight tool for the plane field. The greater the radius of the closed tool for the axisymmetrical field logging, the larger instrumental errors, the frequency being the same.

*Induction logging, mathematical modeling, logging, logging tool, integral equations, asymptotics*

### ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования М. Фарадея и Дж. Генри по измерению электродвижущей силы индукции в замкнутых проводящих контурах заложили основу современной электродинамики, а сформулированные затем Дж. К. Максвеллом уравнения электромагнитного поля в вакууме являются фундаментальными уравнениями физики. Заметим, что эти исследования проводились на достаточно тонких металлических контурах и на низких частотах электромагнитного поля, т. е. на длинах электромагнитных волн, для которых толщина скин-слоя значительно больше диаметра поперечного сечения провода. Очевидно также, что внесенный в среду для измерения электродвижущей силы индукции провод изменяет распределение электропроводности среды и, следовательно, возмущает исходное электромагнитное поле. В данной работе оценена степень этого искажения в зависимости от размеров провода, его электропроводности, электропроводности окружающей провод среды и частоты электромагнитного поля при измерении плоского и осесимметричного электрического поля. Решение этого вопроса позволит уточнить результаты измерений и интерпретации данных индуктивной электроразведки.

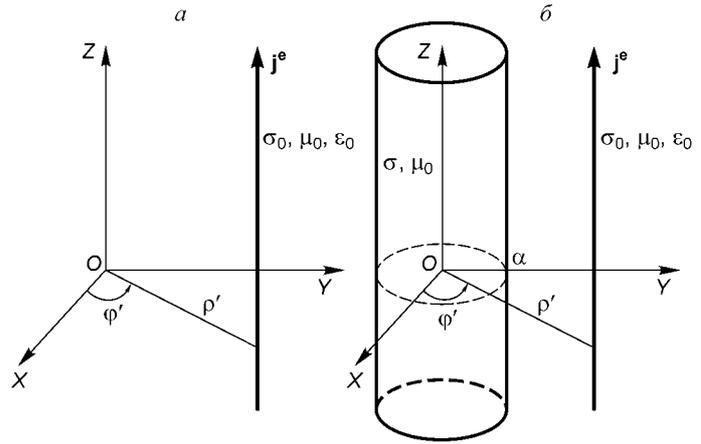
### МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ ПЛОСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В круговой цилиндрической системе координат  $\rho, \varphi, z$ , связанной с декартовыми прямоугольными координатами  $x, y, z$  соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

где  $0 \leq \rho < \infty, 0 < \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty$ , рассмотрим однородную среду с электропроводностью  $\sigma_0$ , магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$ . Пусть электромагнитное поле в такой среде возбуждается расположенным под углом  $\varphi = \varphi'$  и удаленным от оси  $OZ$  на расстояние  $\rho = \rho'$  прямолинейным сторонним электрическим током (рис. 1,а), изменяющимся с течением времени  $t$  по гармонич-

**Рис. 1. Прямолинейный сторонний электрический ток в однородной среде (а) и в однородной среде с внесенным измерительным проводом (б).**



ческому закону  $e^{-i\omega t}$  с круговой частотой  $\omega$ . Выражение для объемной плотности  $\mathbf{j}^e$  стороннего тока запишем в виде

$$\mathbf{j}^e = \mathbf{e}_z J \frac{\delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi')}{\rho'}, \quad (1)$$

где  $\delta(\xi)$  — одномерная  $\delta$ -функция Дирака;  $\mathbf{e}_z$  — орт круговой цилиндрической системы координат, определяющий направление оси  $OZ$  и входящий в тройку  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  ортонормированных базисных векторов этой системы;  $J$  — сила стороннего электрического тока.

Хорошо известно, что этот ток создает в среде плоское электромагнитное поле с независимыми от координаты  $z$  компонентами  $E_z^s, H_\rho^s, H_\varphi^s$ , причем компонента  $E_z^s$  напряженности электрического поля определяется выражением

$$E_z^s(\rho, \varphi) = \frac{i\omega\mu_0 J}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi - \varphi') \begin{cases} K_n(k_0\rho') I_n(k_0\rho), & \rho < \rho', \\ I_n(k_0\rho') K_n(k_0\rho), & \rho > \rho', \end{cases} \quad (2)$$

где  $0 < \varphi' \leq 2\pi$ ;  $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}$ ;  $I_\nu(\xi), K_\nu(\xi)$  — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода порядка  $\nu$ ;  $k_0 = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_0}$  — волновое число однородной среды,  $\text{Re } k_0 > 0$ ;  $\sigma_0 = \sigma_0 - i\omega\varepsilon_0$  — комплексное сопротивление среды, а компоненты  $H_\rho^s, H_\varphi^s$  напряженности магнитного поля определяются с помощью  $E_z^s$  соотношениями

$$H_\rho^s = \frac{1}{i\omega\mu_0\rho} \frac{\partial E_z^s}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi^s = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho}.$$

Поместим теперь в область  $\rho \leq a$  ( $a < \rho'$ ) однородного пространства провод в форме кругового цилиндра с электропроводностью  $\sigma$  и магнитной проницаемостью  $\mu_0$  (см. рис. 1,б). Тогда в этой новой среде в области провода сторонний ток (1) возбуждает компоненту  $E_z$  напряженности электрического поля, равную

$$E_z(\rho, \varphi) = \frac{i\omega\mu_0 J}{2\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi - \varphi') \frac{K_n(k_0\rho') I_n(k\rho)}{k I_n'(ka) K_n(k_0 a) - k_0 I_n(ka) K_n'(k_0 a)}, \quad (3)$$

где штрих над  $I_n(\xi)$  и  $K_n(\xi)$  обозначает производную от этих функций по  $\xi$ ;  $k = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma}$  — волновое число провода,  $\text{Re } k > 0$ .

Внесенный в однородную среду провод вместе с параллельно подключенным к нему вольтметром (микроамперметр) играет роль измерительного контура. Подключение вольтметра, благодаря его большому внутреннему сопротивлению, почти не изменяет протекающий в проводе ток (напряженность электрического поля). Сила этого тока равна  $\sigma \tilde{E}_z$ , где  $\tilde{E}_z$  — среднее значение напряженности  $E_z$  электрического поля по поперечному сечению провода плоскостью  $z = \text{const}$ . Поэтому для оценки степени искажений, обусловленных перераспределением электропроводности среды, вычислим среднее значение напряженности электрического поля по поперечному сечению провода. В отсутствие провода (в исходной, однородной среде) среднее значение напряженности  $E_z^s$  электрического поля определяется выражением

\* Множитель  $e^{-i\omega t}$  всюду опускаем, а комплексные амплитуды компонент поля будем называть компонентами поля.

$$\tilde{E}_z^s = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} E_z^s(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{i\omega\mu_0 J}{\pi a k_0} K_0(k_0 \rho') I_1(k_0 a). \quad (4)$$

Среднее же значение напряженности электрического поля в новой среде имеет вид

$$\tilde{E}_z = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} E_z(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{i\omega\mu_0 J}{\pi a^2 k} \frac{K_0(k_0 \rho') I_1(ka)}{k K_0(k_0 a) I_1(ka) + k_0 I_0(ka) K_1(k_0 a)}. \quad (5)$$

Величину  $\tilde{E}_z^s$  будем называть „истинной“ напряженностью электрического поля, создаваемой сторонним током (1) в однородной среде, а  $\tilde{E}_z$  — „измеренной“.

Заметим, что при  $\omega \neq 0$  линейный проводящий контур нельзя рассматривать в качестве математической модели приемного и генераторного контуров. Действительно, устремляя  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ , но при этом оставляя конечной и отличной от нуля линейную электропроводность  $s = \sigma \pi a^2 < \infty$  провода, и учитывая асимптотические формулы для модифицированных функций Бесселя при  $\xi \rightarrow 0$  [1]:

$$K_0(\xi) \sim - \left[ \ln \left( \frac{\xi}{2} \right) + C \right] = - \ln \left( \frac{e^C \xi}{2} \right), \quad I_0(\xi) \sim 1, \quad K_1(\xi) \sim \frac{1}{\xi}, \quad I_1(\xi) \sim \frac{\xi}{2}, \quad (6)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера, нетрудно показать, что  $\tilde{E}_z \rightarrow 0$ , т. е. линейный контур ведет себя подобно идеальному проводнику.

Из (4) и (5) получаем

$$\gamma = \frac{\tilde{E}_z^s}{\tilde{E}_z} = a \frac{k}{k_0} \frac{I_1(k_0 a)}{I_1(ka)} [k K_0(k_0 a) I_1(ka) + k_0 I_0(ka) K_1(k_0 a)], \quad (7)$$

и, таким образом, отношение истинной напряженности электрического поля к измеренной не зависит от расположения возбуждающего поле тока (1). Нетрудно также показать, что эта зависимость верна для произвольного распределения сторонних токов в однородном пространстве.

При малой толщине провода и на достаточно низких частотах  $|ka| \ll 1$ ,  $|k_0 a| \ll 1$ , и тогда, как следует из (6), (7), можно записать

$$\frac{\tilde{E}_z^s}{\tilde{E}_z} \sim 1 - \frac{k^2 a^2}{2} \ln \left( \frac{e^C k_0 a}{2} \right) = \gamma_1^a. \quad (8)$$

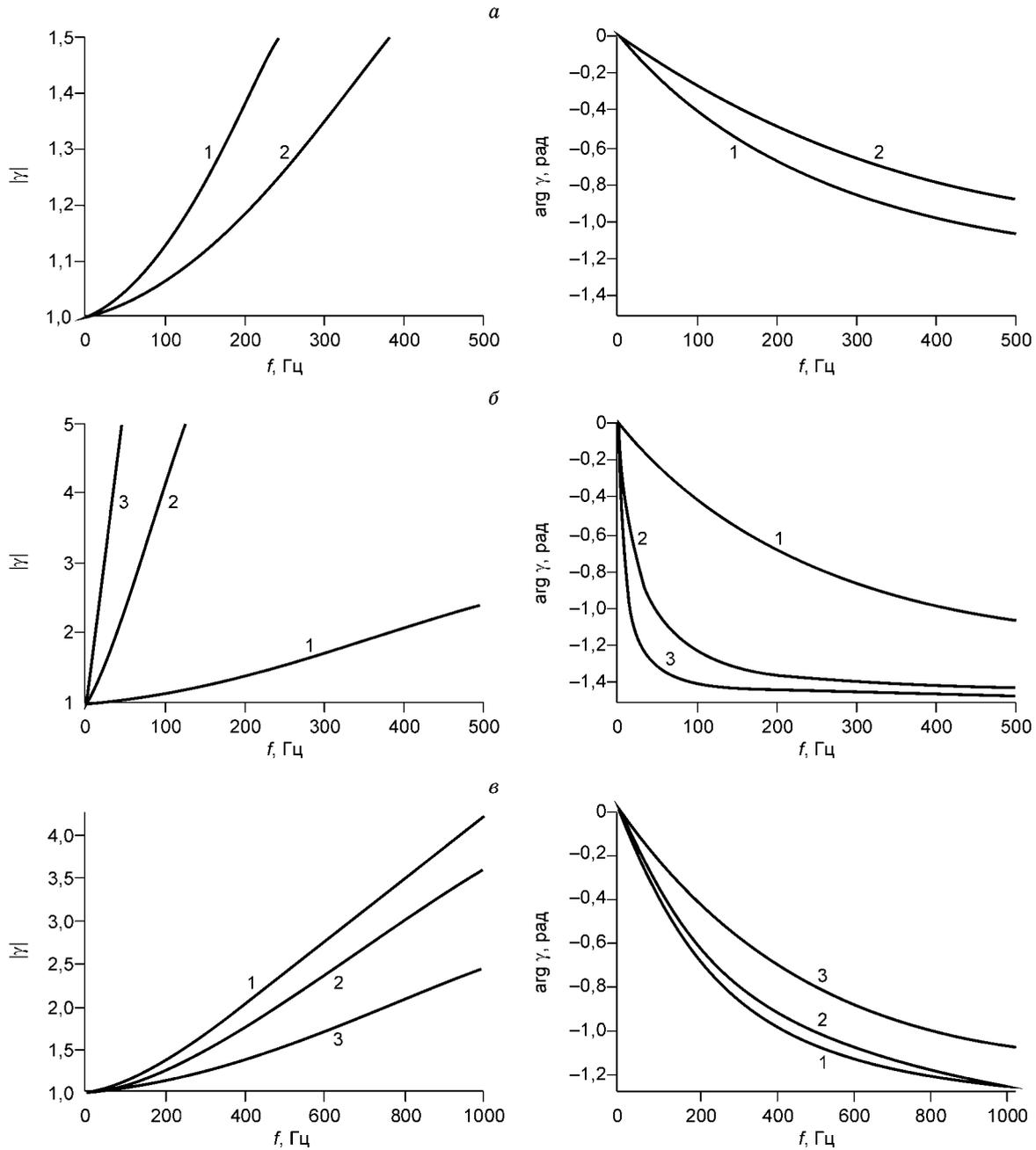
Рассмотрим случай достаточно высоких частот, на которых  $|ka| \gg 1$ , но все же  $|k_0 a| \ll 1$ , что соответствует малой толщине провода и  $\sigma/\sigma_0 \gg 1$ . Поскольку [1] при  $|\xi| \rightarrow \infty$

$$I_n(\xi) \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}}, \quad K_n(\xi) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} e^{-\xi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

то

$$\frac{\tilde{E}_z^s}{\tilde{E}_z} \sim \frac{ak}{2} - \frac{a^2 k^2}{2} \ln \left( \frac{e^C k_0 a}{2} \right) = \gamma_2^a. \quad (9)$$

Полагая всюду  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$  Ф/м,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м, по формуле (7) для случая  $\sigma_0 = 10^{-10}$  См/м проведены расчеты  $|\gamma|$  и  $\arg \gamma$ . Столь малое значение электропроводности однородной среды соответствует измерениям в воздухе, что характерно для методов наземной электроразведки. На рис. 2,а изображена зависимость от частоты  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  отношения амплитуд и разности фаз истинной напряженности электрического поля и измеренной в случае медного ( $\sigma = 5,61 \cdot 10^7$  См/м) и алюминиевого ( $\sigma = 3,6 \cdot 10^7$  См/м) провода одинаковой толщины ( $a = 0,001$  м), а на рис. 2,б те же зависимости, но для медного провода различного поперечного сечения:  $a = 0,001, 0,003, 0,005$  м. Видим, что результаты измерений тем точнее, чем меньше электропроводность измерительного провода и радиус его поперечного сечения. Повышение электропроводности измерительного провода и его толщины для увеличения силы тока неизбежно приведет на относительно высоких частотах к занижению показаний амплитуды истинного сигнала и увеличению его фазы. Однако уменьшение контраста электропроводности провода и вмещающей его среды (отношения  $\sigma/\sigma_0$ ) уменьшает (см. рис. 2,в) при тех же значениях  $\epsilon_0, \mu_0$  различие истинной и измеренной напряженности электрического поля.



**Рис. 2. Зависимость  $|\gamma|$  и  $\arg \gamma$  от частоты.**

*a* — провод радиуса  $a = 0,001$  м (1 — медь, 2 — алюминий); *б* — медный провод (1 —  $a = 0,001$  м, 2 —  $a = 0,003$  м, 3 —  $a = 0,005$  м); *в* — медный провод радиуса  $a = 0,001$  м (1 —  $\sigma_0 = 10^{-10}$  См/м, 2 —  $\sigma_0 = 10^{-5}$  См/м, 3 —  $\sigma_0 = 1$  См/м).

Проведено сравнение точного решения  $\gamma$  и асимптотического  $\gamma_1^a$  для медного провода различного радиуса ( $a = 0,001, 0,003, 0,005$  м) при  $\sigma_0 = 10^{-10}$  См/м. Показано, что в этом случае на интервале частот  $0 < f < 1$  ГГц относительная погрешность вычисления по формуле (8) отношения  $\left| \frac{\tilde{E}_z^S}{\tilde{E}_z} \right|$  не превышает 0,031, а абсолютная погрешность  $\arg \frac{\tilde{E}_z^S}{\tilde{E}_z}$  — менее 0,023 рад, и, таким образом, асимптотическая формула (8) обеспечивает достаточно высокую для практики точность в широком интервале частот.

Рассмотрим другой способ оценки искажений результатов измерений. Пусть в однородном пространстве с параметрами  $\sigma_0, \varepsilon_0, \mu_0$  электромагнитное поле возбуждается произвольным распределением сторонних токов  $\mathbf{j}^e = \mathbf{e}_z j^e(\rho, \varphi)$ , изменяющихся по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ . Потребуем лишь равенство нулю этих токов в области  $\rho \leq a$ . Обозначим единственную, отличную от нуля, компоненту напряженности электрического поля, создаваемую этими токами, через  $E_z^0$ . Если внести в область  $\rho \leq a$  круговой цилиндр (провод) с параметрами  $\sigma, \mu_0$ , то в этой новой среде компонента  $E_z$  напряженности электрического поля удовлетворяет интегральному уравнению

$$E_z(\rho, \varphi) = E_z^0(\rho, \varphi) + (\sigma - \sigma_0 + i\omega\varepsilon_0) \int_0^{a/2\pi} \int_0^a G_z(\rho, \varphi|\rho', \varphi') E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' d\varphi', \quad (10)$$

где  $G_z(\rho, \varphi|\rho', \varphi')$  — скалярная функция Грина, совпадающая с выражением (2) при  $J = 1$ , т. е.

$$G_z(\rho, \varphi|\rho', \varphi') = \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\varphi - \varphi') \begin{cases} K_n(k_0\rho') I_n(k_0\rho), & \rho < \rho', \\ I_n(k_0\rho') K_n(k_0\rho), & \rho \geq \rho'. \end{cases} \quad (11)$$

Проинтегрируем обе части равенства (10) по поперечному сечению провода плоскостью  $z = \text{const}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z &= \tilde{E}_z^0 + \frac{(k_0^2 - k^2)}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \times \\ &\times \left[ \int_0^\rho I_0(k_0\rho') K_0(k_0\rho) E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' + \int_\rho^a K_0(k_0\rho') I_0(k_0\rho) E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' \right] \rho d\rho, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\tilde{E}_z^0$  и  $\tilde{E}_z$  — средние значения компонент  $E_z^0$  и  $E_z$  в поперечном сечении. Будем считать, что  $|k_0 a| \ll 1$ ,  $|k_0/k| \ll 1$ . При этих предположениях равенство (12) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z &\sim \tilde{E}_z^0 + \frac{k^2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \left[ \int_0^\rho \ln\left(\frac{e^C k_0 \rho'}{2}\right) E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' + \int_\rho^a \ln\left(\frac{e^C k_0 \rho'}{2}\right) E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' \right] \times \\ &\times \rho d\rho = E_z^0 + \frac{k^2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \times \\ &\times \left[ \int_0^a E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' \int_\rho^a \rho \ln\left(\frac{e^C k_0 \rho'}{2}\right) d\rho + \int_0^a \ln\left(\frac{e^C k_0 \rho'}{2}\right) E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' \int_0^{\rho'} \rho d\rho \right] = \\ &= \tilde{E}_z^0 + \frac{k^2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left\{ \int_0^a \left[ \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{e^C k_0 a}{2}\right) - \frac{\rho'^2}{2} \ln\left(\frac{e^C k_0 \rho'}{2}\right) + \frac{\rho'^2 - a^2}{4} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' + \int_0^a \frac{\rho'^2}{2} \ln\left(\frac{e^C k_0 \rho'}{2}\right) E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' \right\} = \\ &= \tilde{E}_z^0 + \frac{k^2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \left[ \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{e^C k_0 a}{2}\right) + \frac{\rho'^2 - a^2}{4} \right] E_z(\rho', \varphi') \rho' d\rho' \sim \\ &\sim \tilde{E}_z^0 + \frac{k^2 a^2}{2} \ln\left(\frac{e^C k_0 a}{2}\right) \tilde{E}_z. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{E}_z \sim \tilde{E}_z^0 + \frac{k^2 a^2}{2} \ln\left(\frac{e^C k_0 a}{2}\right) \tilde{E}_z \quad (13)$$

или

$$\frac{\tilde{E}_z^0}{\tilde{E}_z} \sim 1 - \frac{k^2 a^2}{2} \ln \left( \frac{e^C k_0 a}{2} \right) = \gamma_1^a, \quad (14)$$

и отношение истинной напряженности электрического поля к измеренной неслучайно совпадает с асимптотической формулой (8), которую можно применять для корректировки результатов измерения плоского поля.

### МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Наряду с круговой цилиндрической системой координат  $\rho, \varphi, z$ , будем рассматривать осесимметрическое электрическое поле в криволинейной ортогональной системе координат  $r, \psi, \varphi$  (рис. 3). Построим ее следующим образом. Пусть  $\varphi$  — совпадает с координатой  $\varphi$  круговой цилиндрической системы координат. Зададим на координатной плоскости  $XOY$  окружность  $L$  радиуса  $R > 0$ . Через каждую точку  $M(x, y, z)$  евклидова пространства  $R^3$  проведем определяемую этой точкой координатную поверхность  $\varphi = \text{const}$  (полуплоскость, проходящую через точку  $M$  и ось  $OZ$ ). Поверхность  $\varphi = \text{const}$  пересечет окружность  $L$  в точке  $O'$ . Обозначим через  $r$  и  $\psi$  соответственно длину радиус-вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{O'M}$  и угол между  $\mathbf{r}$  и вектором  $\mathbf{O'O}$ , где  $\mathbf{O}$  — начало декартовой прямоугольной системы координат  $x, y, z$ . Тогда

$$x = (R - r \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (R - r \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi, \quad (15)$$

где  $0 \leq r < \infty, 0 < \psi \leq 2\pi, 0 < \varphi \leq 2\pi$ , а коэффициенты Ламе  $h_r, h_\psi, h_\varphi$  имеют вид

$$h_r = 1, \quad h_\psi = r, \quad h_\varphi = R - r \cos \psi. \quad (16)$$

Взаимная однозначность между координатами  $x, y, z$  и  $r, \psi, \varphi$  нарушается на полуплоскости  $\varphi = \{0; 2\pi\}$  и в круге  $\psi = \{0; \pi\}$ , лежащем в плоскости  $XOY$  и ограниченном окружностью  $L$ . На различных сторонах этих поверхностей координаты  $\varphi$  и  $\psi$  принимают разные, хотя и постоянные, значения. Координатная поверхность  $r = \text{const}$  определяет поверхность тора, образованного вращением вокруг оси  $OZ$  лежащего в одной плоскости с этой осью круга радиуса  $r = \text{const}$  (или усеченного круга при  $r > R$ ) с центром на окружности  $L$ . Координатная поверхность  $\psi = \text{const}$  — усеченный круговой конус, направляющей которого является окружность  $L$ , а вершина лежит на оси  $OZ$ . Плоскостью  $XOY$  при  $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}$  отсекается часть конуса, содержащая вершину, а если  $\psi \in (0; \pi/2) \cup (3\pi/2; 2\pi)$ , то, наоборот, оставляется эта часть конуса, но удаляется другая.

Пусть в однородном пространстве с параметрами  $\sigma_0, \epsilon_0, \mu_0$  сторонними монохроматическими электрическими токами, изменяющимися с круговой частотой  $\omega$  и распределенными в пространстве по некоторому закону  $\mathbf{j}^e = \mathbf{e}_\varphi J^e(\rho, z)$ , возбуждается осесимметрическое электромагнитное поле. В то же время предположим отсутствие этих токов в торе  $r \leq a$ , где  $a < R$ . Сторонние токи возбуждают в такой среде независимое от координаты  $\varphi$  электромагнитное поле с компонентой  $E_\varphi^0$  напряженности электрического поля и компонентами  $H_\rho^0, H_z^0$  напряженности магнитного поля. Внесем в исходную среду тороидальный провод с параметрами  $\sigma, \mu_0$ , заполняющий область  $r \leq a$  (рис. 4). Компонента  $E_\varphi$  напряженности электрического поля в новой среде удовлетворяет интегральному уравнению

$$E_\varphi(\rho, z) = E_\varphi^0(\rho, z) + (\sigma - \sigma_0 + i\omega\epsilon_0) \iint_S G_\varphi(\rho, z|\rho', z') E_\varphi(\rho', z') ds', \quad (17)$$

где  $G_\varphi(\rho, z|\rho', z')$  — функция Грина. Эта функция является решением уравнения

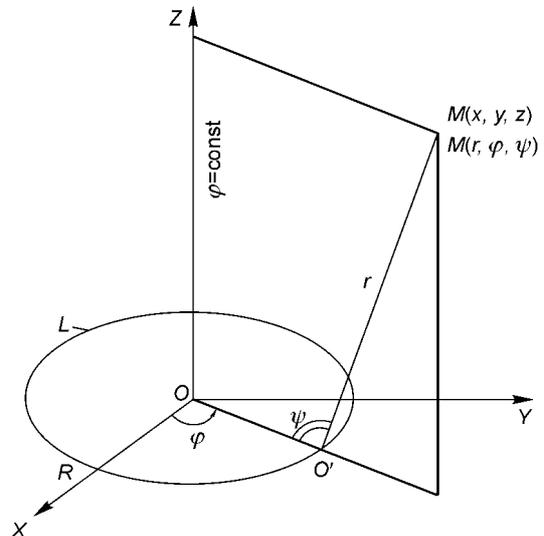
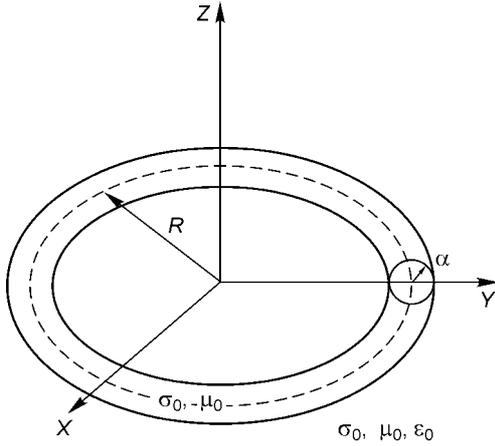


Рис. 3. Криволинейная ортогональная система координат  $r, \psi, \varphi$ .



**Рис. 4. Торoidalный измерительный провод в однородной среде.**

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho G_\varphi) \right] + \frac{\partial^2 G_\varphi}{\partial z^2} - k_0^2 G_\varphi = -i\omega\mu_0 \delta(\rho - \rho') \delta(z - z')$$

и подчиняется условию убывания поля на бесконечности. Интегрирование в правой части уравнения (17) проводится по поперечному сечению  $S$  тора плоскостью  $\varphi = \text{const}$ . Переходя к координатам  $r, \psi, \phi$  в уравнении (17), получим

$$E_\varphi(r, \psi) = E_\varphi^0(r, \psi) + (\sigma - \sigma_0 + i\omega\epsilon_0) \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^a G_\varphi(r, \psi|r', \psi') E_\varphi(r', \psi') r' dr', \quad (18)$$

где  $G_\varphi(r, \psi|r', \psi') = G_\varphi(R - r \cos \psi, r \sin \psi | R - r' \cos \psi', r' \sin \psi')$ .

Покажем, что для функции Грина справедливо следующее представление:

$$G_\varphi = \frac{i\omega\mu_0\rho'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\exp(-k_0 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z-z')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi})}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z-z')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi}} \cos \phi d\phi. \quad (19)$$

В этом можно убедиться, например, применяя в обозначениях работы [1] интеграл Сонина—Гегенбауэра

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty J_\mu(bt) K_\nu(a\sqrt{t^2+z^2}) (t^2+z^2)^{-\nu/2} t^{\mu+1} dt = \\ & = b^\mu a^{-\nu} z^{\mu-\nu+1} (a^2+b^2)^{(\nu-\mu-1)/2} K_{\nu-\mu-1}(z\sqrt{a^2+b^2}), \quad \text{Re } \mu > -1, \quad \text{Re } z > 0 \end{aligned} \quad (20)$$

и теорему сложения

$$J_0(w) = J_0(\tilde{z}) J_0(\tilde{Z}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\tilde{z}) J_n(\tilde{Z}) \cos(n\phi), \quad (21)$$

где  $w = \sqrt{\tilde{z}^2 + \tilde{Z}^2 - 2\tilde{z}\tilde{Z} \cos \phi}$ ,  $J_\beta(\xi)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $\beta$ . Полагая в формуле (20)  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1/2$ ,  $a = |z - z'|$ ,  $b = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi}$ ,  $z = k_0$ ,  $t = \lambda$  и учитывая [1], что  $K_{-\nu}(\xi) = K_\nu(\xi)$ ,  $K_{1/2}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} e^{-\xi}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\exp\left(-k_0 \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z-z')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi}\right)}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z-z')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi}} = \\ & = \int_0^\infty \lambda \frac{\exp\left(-|z-z'| \sqrt{\lambda^2 + k_0^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}} J_0\left(\lambda \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi}\right) d\lambda. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (21) в (22) при  $\tilde{z} = \lambda\rho$ ,  $\tilde{Z} = \lambda\rho'$ , а затем полученное в (19), получим хорошо известное в теории геоэлектрики выражение для функции Грина:

$$G_\varphi = \frac{i\omega\mu_0\rho'}{2} \int_0^\infty \lambda \frac{\exp\left(-|z-z'| \sqrt{\lambda^2 + k_0^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}} J_1(\lambda\rho) J_1(\lambda\rho') d\lambda, \quad (23)$$

что доказывает эквивалентность представлений (19), (23) и, следовательно, правильность нашего утверждения.

Пусть  $\frac{a}{R} \ll 1$ , т. е. будем считать, что толщина провода (радиус поперечного сечения тора) значительно меньше радиуса измерительной петли. Положим также  $|k_0 a| \ll 1$ ,  $|k_0/k| \ll 1$  и рассмотрим  $E_\varphi^0$ ,  $E_\varphi$  в области  $r \leq a$ . При этих условиях найдем асимптотику функции  $G_\varphi$ .

Выражение (19) запишем в виде

$$G_\varphi = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} \int_0^\pi \frac{\exp\left[-2k_0 \sqrt{\rho\rho'} \sqrt{\delta + \sin^2 \frac{\phi}{2}}\right]}{\sqrt{\delta + \sin^2 \frac{\phi}{2}}} \cos \phi d\phi, \quad (24)$$

где в силу наших допущений  $\delta = \frac{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}{4\rho\rho'}$  — малый параметр. Отсюда видно, что интеграл (24) и, следовательно, (19) расходится при  $\delta = 0$  и сходится в случае  $\delta > 0$ . Поэтому интеграл в формуле (19) имеет слабую особенность [2], и росток подынтегральной функции в точке  $\phi = 0$  полностью определяет поведение  $G_\varphi$  при малом параметре  $\delta$ . Для нахождения асимптотики функции  $G_\varphi$  рассмотрим эталонный интеграл

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi}}.$$

Вычисление этого интеграла хорошо известно [3], и для него можно записать

$$I = \frac{2}{\zeta \sqrt{\rho\rho'}} \left[ \left(1 - \frac{\zeta^2}{2}\right) K(\zeta) - E(\zeta) \right],$$

где  $\zeta = 2 \sqrt{\frac{\rho\rho'}{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}}$ ;  $K(\zeta)$  и  $E(\zeta)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Вводя параметр  $\zeta' = \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}}$ , видим, что  $\zeta \rightarrow 1$ ,  $\zeta' \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , и тогда [4]  $K(\zeta) = -\ln\left(\frac{\zeta'}{4}\right) + O(\zeta'^2 \ln \zeta')$ ,  $E(\zeta) = 1 + O(\zeta'^2 \ln \zeta')$ . Следовательно,

$$I = -\frac{2}{\zeta \sqrt{\rho\rho'}} \left[ \left(1 - \frac{\zeta^2}{2}\right) \ln \frac{\zeta'}{4} + 1 + O(\zeta'^2 \ln \zeta') \right].$$

Из  $\frac{a}{R} \rightarrow 0$  следует, что  $\delta \sim \frac{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}{4R^2} \rightarrow 0$ ,  $\zeta \sim 1$ ,  $\zeta' \sim \sqrt{\frac{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}{4R^2}} \sim \sqrt{\delta}$ ,  $\rho\rho' \sim R^2$ . Таким образом,

$$I \sim -\frac{1}{2R} \left( 4 + \ln \frac{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}{64R^2} \right) = -\frac{1}{2R} \ln \frac{e^4((\rho - \rho')^2 + (z - z')^2)}{64R^2}, \quad \frac{a}{R} \rightarrow 0$$

и асимптотическая формула для  $G_\varphi$  при  $\frac{a}{R} \rightarrow 0$  примет вид

$$G_\varphi \sim -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \ln \frac{e^4((\rho - \rho')^2 + (z - z')^2)}{64R^2} \exp\left(-k_0 \sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}\right),$$

а из условия  $|k_0 a| \ll 1$  следует, что

$$G_\varphi \sim -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \ln \frac{e^4((\rho - \rho')^2 + (z - z')^2)}{64R^2}. \quad (25)$$

Запишем эту формулу в координатах  $r$ ,  $\psi$ ,  $\phi$  и подставим полученное в (18), учитывая, что  $|k_0/k| \ll 1$ . В результате

$$E_\varphi(r, \psi) \sim E_\varphi^0(r, \psi) + \frac{k^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^a \ln \frac{e^4(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\psi - \psi'))}{64R^2} E_\varphi(r', \psi') r' dr'. \quad (26)$$

Проинтегрируем обе части (26) по области  $S$  и поделим полученное на  $\pi a^2$ . Тогда для средних значений  $\tilde{E}_\varphi$  и  $\tilde{E}_\varphi^0$  компонент  $E_\varphi$  и  $E_\varphi^0$  в области  $S$  получаем соотношение

$$\tilde{E}_\varphi \sim \tilde{E}_\varphi^0 + \frac{k^2}{4\pi^2 a^2} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^a \left\{ \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \ln \frac{e^4(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\psi - \psi'))}{64R^2} d\psi \right\} \times E_\varphi(r', \psi') r' dr'. \quad (27)$$

Интеграл по переменной интегрирования  $\psi$  табличный [5] и равен

$$\int_0^{2\pi} \ln \frac{e^4(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\psi - \psi'))}{64R^2} d\psi = \begin{cases} 4\pi \ln \frac{e^2 r}{8R}, & r \geq r', \\ 4\pi \ln \frac{e^2 r'}{8R}, & r < r'. \end{cases}$$

Отсюда

$$\tilde{E}_\varphi \sim \tilde{E}_\varphi^0 + \frac{k^2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\psi' \left[ \int_0^r \ln \frac{e^2 r}{8R} E_\varphi(r', \psi') r' dr' + \int_r^a \ln \frac{e^2 r'}{8R} E_\varphi(r', \psi') r' dr' \right] r dr.$$

Изменяя порядок интегрирования по переменным интегрирования  $r$  и  $r'$ , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\varphi &\sim \tilde{E}_\varphi^0 + \frac{k^2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\psi' \left[ \int_0^a E_\varphi(r', \psi') r' dr' \int_{r'}^a r \ln \frac{e^2 r}{8R} dr + \int_0^a \ln \frac{e^2 r'}{8R} E_\varphi(r', \psi') r' dr' \int_0^{r'} r dr \right] = \\ &= \tilde{E}_\varphi^0 + \frac{k^2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\psi' \left[ \int_0^a \left( \frac{a^2}{2} \ln \frac{e^2 a}{8R} - \frac{r'^2}{2} \ln \frac{e^2 r'}{8R} + \frac{r'^2 - a^2}{4} \right) E_\varphi(r', \psi') r' dr' + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a \frac{r'^3}{2} \ln \frac{e^2 r'}{8R} E_\varphi(r', \psi') dr' \right] = \\ &= \tilde{E}_\varphi^0 + \frac{k^2}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^a \left( \frac{a^2}{2} \ln \frac{e^2 a}{8R} + \frac{r'^2 - a^2}{4} \right) E_\varphi(r', \psi') r' dr' \sim \tilde{E}_\varphi^0 + \frac{k^2 a^2}{2} \ln \frac{e^2 a}{8R} \tilde{E}_\varphi. \end{aligned}$$

В результате

$$\tilde{E}_\varphi \sim \tilde{E}_\varphi^0 + \frac{k^2 a^2}{2} \ln \frac{e^2 a}{8R} \tilde{E}_\varphi$$

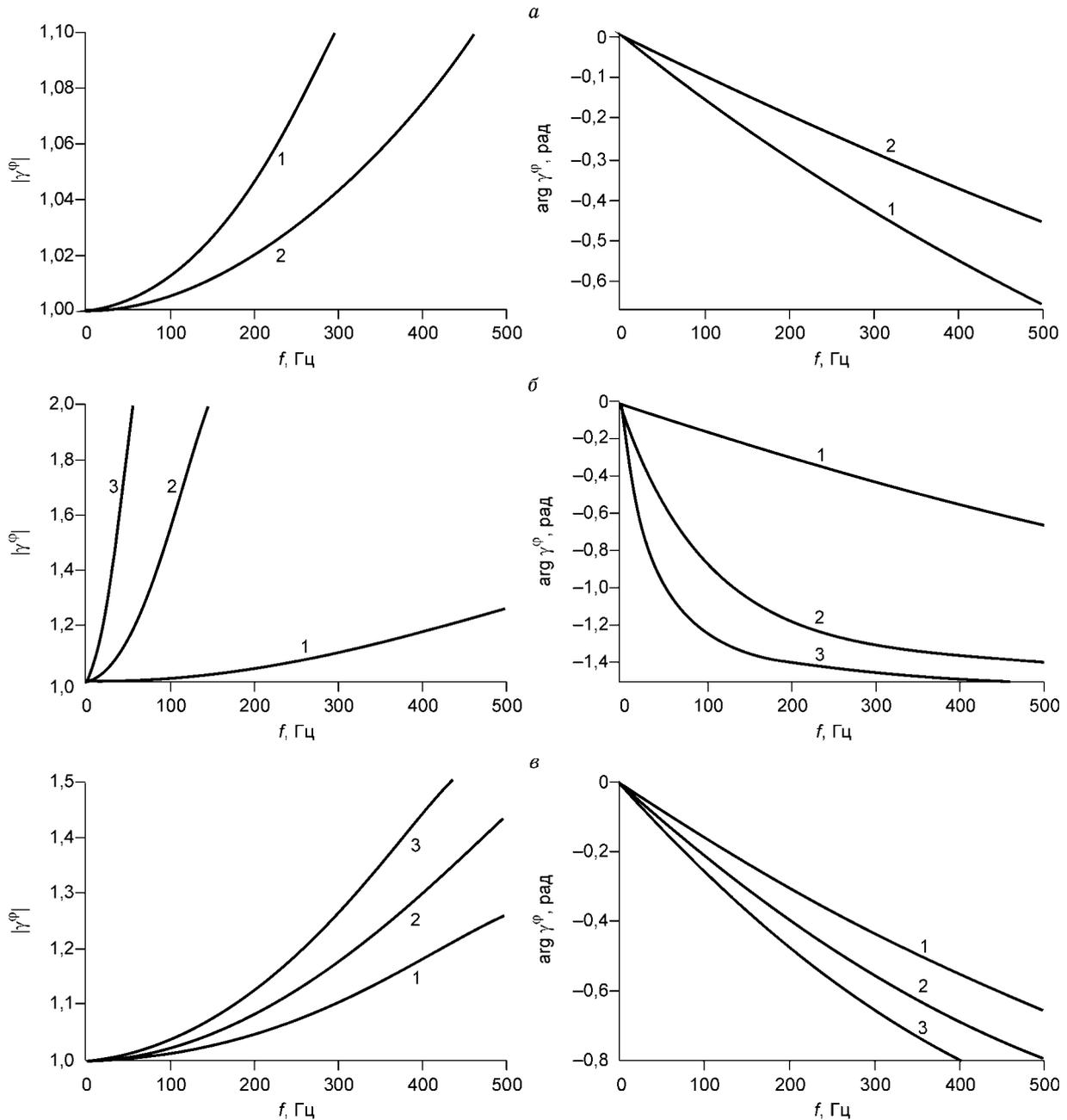
и, следовательно,

$$\frac{\tilde{E}_\varphi^0}{\tilde{E}_\varphi} \sim 1 - \frac{k^2 a^2}{2} \ln \frac{e^2 a}{8R} = \gamma^\varphi. \quad (28)$$

В отличие от измерения плоского электрического поля, в случае осесимметрического электрического поля отношение истинного поля к измеренному (при сделанных нами допущениях) не зависит от волнового числа  $k_0$ , но зависит от  $R$  — радиуса контура.

На рис. 5,а показана зависимость  $|\gamma^\varphi|$  и  $\arg \gamma^\varphi$  от частоты  $f$  для медного и алюминиевого тороидального провода при  $R = 1$  м и  $a = 0,001$  м. Так же, как и в случае плоского электрического поля, в случае осесимметричного электрического поля измеренное электрическое поле с повышением частоты тем больше отличается от истинного, чем выше электропроводность измерительного провода. Однако искажения, вносимые измерительной линией на тех же частотах, ниже, чем для плоского поля. Такая же закономерность наблюдается при увеличении  $a$  (см. рис. 5,б). Увеличение же радиуса  $R$  измерительной петли (см. рис. 5,в) понижает точность измерения.

В случае неоднородной вне измерительного провода среды для оценки отношения истинного электрического поля к измеренному также можно применить метод интегральных уравнений. Если неоднородности среды и сторонние токи таковы, что электромагнитное поле остается плоским или осесимметричным, то в уравнениях (10), (17) будут фигурировать функции Грина исходной неоднородной среды, а если в области пространства, в которой предполагается проводить измерения, исходная среда является однородной с параметрами  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$ , то каждую из соответствующих функций Грина для плоского и



**Рис. 5. Зависимость  $|\gamma^\phi|$  и  $\arg \gamma^\phi$  от частоты.**

*a* —  $R = 1$  м,  $a = 0,001$  м (1 — медь, 2 — алюминий); *б* — медный провод,  $R = 1$  м (1 —  $a = 0,001$  м, 2 —  $a = 0,003$  м, 3 —  $a = 0,005$  м); *в* — медный провод,  $a = 0,001$  м (1 —  $R = 1$  м, 2 —  $R = 10$  м, 3 —  $R = 100$  м).

осесимметричного электрического поля можно представить в виде суммы регулярной и сингулярной частей. Сингулярные части совпадают с функциями  $G_z$  и  $G_\phi$ , определяемыми соотношениями (11) и (19).

Тогда при малой толщине измерительного провода в уравнениях (10), (17) основной вклад вносят сингулярные части, и, следовательно, полученные нами формулы (14) и (28) можно применять также для неоднородной среды, хотя удовлетворительная точность расчета по этим формулам будет достигаться при значительно меньшей толщине провода, чем в случае однородной среды.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в настоящей работе результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Измерительный провод меняет распределение электропроводности исходной среды, искажая тем самым показания истинной напряженности электрического поля.
2. Отличия истинного электрического поля от измеренного возрастают с увеличением частоты колебаний электромагнитного поля, толщины измерительного провода и его электропроводности.
3. Эти искажения меньше для замкнутого провода при измерении осесимметричного электрического поля, чем при регистрации плоского электрического поля прямолинейным проводом.
4. Увеличение радиуса замкнутого провода при измерении осесимметричного электрического поля приводит к возрастанию искажений в показаниях измерительных приборов на тех же частотах.
5. Применяя формулы (14) и (28), можно количественно оценить ошибки измерения электрического поля в индуктивных методах электроразведки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1974, 295 с.
2. **Федорюк М.В.** Асимптотика: интегралы и ряды. М., Физматгиз, 1987, 544 с.
3. **Смайт В.** Электростатика и электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1954, 604 с.
4. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции (формулы, графики, таблицы). М., Физматгиз, 1968, 344 с.
5. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., Физматгиз, 1973, 228 с.

*Рекомендована к печати 2 февраля 2005 г.  
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию  
11 марта 2004 г.*