

УДК 539.3

## РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДАВЛЕНИЕМ “ТЯЖЕЛОЙ” ЖИДКОСТИ

А. М. Колесников

Южный федеральный университет, 344010 Ростов-на-Дону  
E-mail: Alexei.M.Kolesnikov@gmail.com

Исследуется задача о равновесии покоящейся на гладкой абсолютно твердой плоской поверхности сферической нелинейно-упругой оболочки, наполненной “тяжелой” жидкостью. Вес оболочки считается пренебрежимо малым по сравнению с весом заполняющей ее жидкости. Размер области контакта с опорной плоскостью является одной из неизвестных величин в задаче. В точной нелинейной постановке получены уравнения равновесия безмоментной оболочки. Численно исследованы напряжения и деформация оболочки, изготовленной из материала Муни — Ривлина. Проведено сравнение полученных результатов с результатами расчетов для случая раздувания сферической оболочки без учета веса наполняющей ее среды. Дана оценка влияния веса жидкости на деформацию и напряжения в оболочке.

**Ключевые слова:** высокоэластичная оболочка, нелинейная теория оболочек, мембрана, контактная задача, взаимодействие жидкости и твердого тела.

**Введение.** В данной работе рассматривается задача о равновесии сферического резервуара, наполненного жидкостью под давлением. Резервуар покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Сила тяжести направлена вертикально вниз. Резервуар представляет собой тонкостенную оболочку из высокоэластичного материала, который считается невесомым.

В классической задаче о раздувании сферической оболочки [1] одной из форм равновесия является сферическая форма. Шарообразная форма также характерна для капель жидкости в равновесном состоянии вне поля внешних сил. В поле силы тяжести капли принимают сложную форму [2], определяемую поверхностным натяжением, появляющимся на границе раздела сред (капли и внешней среды). Для капиллярной поверхности известны также другие математические аналогии в задачах для оболочек. Так, в случае осесимметричного резервуара, наполненного “тяжелой” жидкостью, форма “равного сопротивления” [3] совпадает с формой поверхности капли, покоящейся на горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Форма деформированного поперечного сечения бесконечной круговой цилиндрической оболочки из высокоэластичного материала, нагруженной давлением “тяжелой” жидкости изнутри, также описывается уравнениями капиллярной поверхности [4–7]. В общем случае величины напряжений вдоль образующей и вдоль поперечного сечения оболочки будут постоянными, но не равными между собой.

Особенностью капиллярной поверхности, находящейся в равновесии, является изотропное напряженное состояние. В общем случае при деформации осесимметричной упругой оболочки такое состояние невозможно. Исследования равновесия осесимметричных оболочек в рамках нелинейной теории практически не проводились. В работе [8]

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00459).

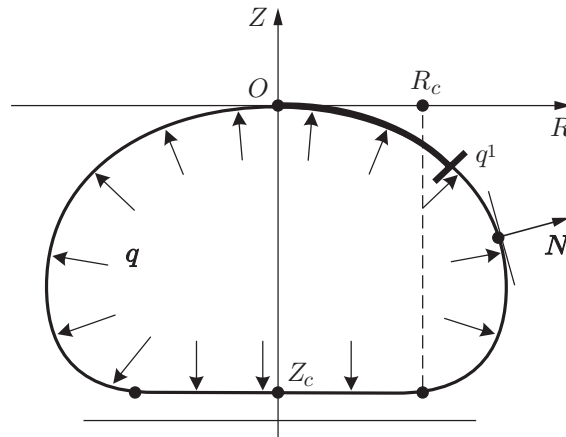


Рис. 1. Сечение деформированной оболочки

рассматривалась круглая плоская мембрана, находящаяся под действием гидростатического давления. В данной работе исследуется влияние веса жидкости на напряженно-деформированное состояние сферической оболочки.

**1. Уравнения равновесия.** Рассмотрим сферическую оболочку радиусом  $r_0$  с постоянной толщиной  $h$ . В сферической системе координат  $(r, \theta, \lambda)$  радиус-вектор  $\mathbf{r}(q^1)$  точки срединной поверхности оболочки  $o$  задается уравнениями

$$\mathbf{r} = r_0 \mathbf{e}_r.$$

Здесь  $q^1 \in [0, \pi]$  — гауссова координата поверхности  $o$ , совпадающая с углом  $\theta$ , отсчитываемым по меридиану. Вторая гауссова координата  $q^2 \in [0, 2\pi]$  совпадает с долготой  $\lambda$ .

Векторы основного базиса определяются соотношениями

$$\mathbf{r}_1 = r_0 \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}_2 = r_0 \sin q^1 \mathbf{e}_\lambda.$$

Компоненты метрического тензора поверхности  $o$  имеют вид

$$g_{11} = r_0^2, \quad g_{22} = r_0^2 \sin^2 q^1, \quad g_{12} = 0.$$

Пусть оболочка покоится на гладкой горизонтальной плоскости и нагружена изнутри давлением “тяжелой” жидкости. Сила тяжести направлена вертикально вниз. Вес оболочки пренебрежимо мал по сравнению с весом наполняющей ее жидкости. Считается, что после деформации оболочка остается осесимметричной и имеет выпуклую форму (рис. 1).

Поверхность деформированной оболочки  $O$  разделим на две области: область контакта с опорной плоскостью  $O_c$  и область  $O_l$ . Граница раздела областей заранее неизвестна и определяется в ходе решения задачи. Будем считать, что в области контакта оболочка полностью прилегает к опорной плоскости, не образуя складок. Такая ситуация возможна, например, когда размер области контакта значительно меньше радиуса сферической оболочки или когда оболочка в достаточной степени растянута внутренним давлением.

В области контакта равномерно распределенное давление внутри оболочки уравновешивается реакцией опорной поверхности. В случае безмоментной оболочки в силу отсутствия в ее сечении перерезывающей силы и изгибающего момента реакцией опоры является равномерно распределенная нагрузка, равная по величине внутреннему давлению. Следовательно, срединную поверхность оболочки  $O_c$  можно рассматривать как свободную от внешних поверхностных нагрузок.

В цилиндрической системе координат  $(R, \Phi, Z)$  радиус-вектор  $\mathbf{R}(q^1)$  точки деформированной поверхности  $O$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{R} = R(q^1) \mathbf{e}_r + Z(q^1) \mathbf{e}_z.$$

Нагрузка на поверхность оболочки задается уравнениями

$$\mathbf{q} = \begin{cases} \xi(q^1) = (p - \gamma Z(q^1))\mathbf{N}, & q^1 \in [0, q_c^1], \\ 0, & q^1 \in (q_c^1, \pi]. \end{cases}$$

Здесь  $q_c^1$  — неизвестная граница областей  $O_l$  и  $O_c$ ;  $p$  — давление без учета силы тяжести жидкости (сверхдавление [3]);  $\gamma = g\rho$  — удельный вес жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения. Вектор единичной нормали  $\mathbf{N}$  к поверхности оболочки определяется уравнениями

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|} = \frac{R'e_z - Z'e_r}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}},$$

а векторы основного базиса деформированной поверхности — соотношениями

$$\mathbf{R}_1 = R'(q^1)\mathbf{e}_r + Z'(q^1)\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{R}_2 = R(q^1)\mathbf{e}_\varphi.$$

Компоненты первого и второго метрических тензоров деформированной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} G_{11} &= R'^2 + Z'^2, & G_{22} &= R^2, & G_{12} &= 0, \\ B_{11} &= \frac{R'Z'' - Z'R''}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}}, & B_{22} &= \frac{RZ'}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}}, & B_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия для безмоментной оболочки можно представить в виде [9]

$$\nabla \cdot L + \mathbf{q} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $L$  — тензор усилий типа тензора Коши;  $\nabla$  — двумерный набла-оператор на поверхности  $O$ , определяемый соотношениями [9]

$$\nabla L = \mathbf{R}^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}.$$

Свойства материала будем задавать с помощью удельной (на единицу площади недеформированной поверхности оболочки) потенциальной энергии  $W^*$ , которая в случае несжимаемых материалов может быть выражена через функцию трехмерной потенциальной энергии  $W$  соотношением [9]

$$W^* = hW(\lambda_1, \lambda_2, 1/(\lambda_1\lambda_2)), \quad \lambda_1 = \sqrt{G_{11}/g_{11}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{G_{22}/g_{22}},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — главные кратности удлинений.

В рассматриваемой задаче компоненты метрических тензоров  $g_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$ , внешняя нагрузка  $\mathbf{q}$  и геометрические параметры оболочки не зависят от гауссовой координаты  $q^2$ . Такую деформацию будем называть одномерной. В этом случае уравнения равновесия оболочки сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [10, 11]. Систему (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dL^{11}}{dq^1} + L^{11}(2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) + L^{22}\Gamma_{22}^1 &= 0, \\ L^{11}B_{11} + L^{22}B_{22} + \xi &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В случае если главные оси совпадают с координатными линиями, компоненты тензора усилий типа тензора Коши  $L$  определяются соотношениями [11]

$$L^{\alpha\alpha} = \frac{h}{g_{\alpha\alpha}\lambda_\alpha\lambda_1\lambda_2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_\alpha}.$$

Символы Кристоффеля задаются через главные кратности удлинений уравнениями [11]

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial q^1} + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{g_{22}\lambda_2}{g_{11}\lambda_1^2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} - \frac{\lambda_2^2}{2g_{11}\lambda_1^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial q^1} + \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0.\end{aligned}$$

Введем угол наклона касательной  $\psi$  к сечению деформированной поверхности оболочки. Тогда

$$\operatorname{tg} \psi = Z'(q^1)/R'(q^1).$$

Построим разрешающую систему уравнений относительно функций  $R(q^1)$ ,  $Z(q^1)$ ,  $\lambda_1(q^1)$ ,  $\lambda_2(q^1)$ ,  $\psi(q^1)$ . Можно показать, что справедливы соотношения

$$R'(q^1) = \sqrt{g_{11}} \lambda_1 \cos \psi, \quad Z'(q^1) = \sqrt{g_{11}} \lambda_1 \sin \psi, \quad \lambda_2'(q^1) = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \lambda_1 \cos \psi - \lambda_2 \frac{g_{22}'}{2g_{22}}. \quad (3)$$

Уравнения равновесия (2) можно записать относительно введенных неизвестных функций следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_1'(q^1) &= -\frac{\lambda_1 W_{,12} - W_{,2}}{W_{,11}} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \cos \psi + \frac{\lambda_2 W_{,12} - W_{,1}}{W_{,11}} \frac{g_{22}'}{2g_{22}}, \\ \psi'(q^1) &= -\frac{W_{,2}}{W_{,1}} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \sin \psi - \frac{\xi}{h} \frac{g_{11} \lambda_1 \lambda_2}{W_{,1}}.\end{aligned} \quad (4)$$

Здесь нижние индексы у величины  $W$  обозначают соответствующие производные по главным кратностям удлинений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Для области  $O_c$  радиус-вектор  $\mathbf{R}(q^1)$  имеет вид

$$\mathbf{R} = R(q^1)\mathbf{e}_r + Z_c\mathbf{e}_z.$$

Здесь  $Z_c = \text{const}$  — ордината области контакта, определяемая из решения задачи;  $q^1 \in [q_c^1; \pi]$  — лагранжева координата, соответствующая области  $O_c$ . Векторы основного базиса и компоненты первого метрического тензора поверхности  $O_c$  принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= R'(q^1)\mathbf{e}_r, & \mathbf{R}_2 &= R(q^1)\mathbf{e}_\varphi, \\ G_{11} &= R'^2, & G_{22} &= R^2, & G_{12} &= 0.\end{aligned}$$

Все компоненты второго метрического тензора поверхности  $O_c$  равны нулю.

Таким образом, в отсутствие внешней нагрузки при фиксированном угле  $\psi$  уравнения равновесия (4) в области контакта  $O_c$  ( $q^1 \in [q_c^1; \pi]$ ) можно представить в форме

$$\begin{aligned}\lambda_1'(q^1) &= -\frac{\lambda_1 W_{,12} - W_{,2}}{W_{,11}} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} + \frac{\lambda_2 W_{,12} - W_{,1}}{W_{,11}} \frac{g_{22}'}{2g_{22}}, & R'(q^1) &= \sqrt{g_{11}} \lambda_1, \\ Z(q^1) &\equiv Z_c, & \lambda_2(q^1) &\equiv R(q^1)/(\sqrt{g_{11}} \sin q^1), & \psi(q^1) &\equiv -\pi.\end{aligned} \quad (5)$$

Для области  $O_l$  в точке  $q^1 = 0$  граничные условия задаются уравнениями

$$R(0) = 0, \quad Z(0) = Z_0, \quad \lambda_1(0) = \lambda_2(0) = A, \quad \psi(0) = 0. \quad (6)$$

Для области контакта  $O_c$  в точке  $q^1 = \pi$  граничные условия имеют вид

$$R(\pi) = 0, \quad \lambda_1(\pi) = B. \quad (7)$$

В (6), (7)  $A$ ,  $B$  — неизвестные параметры.

В точке сопряжения областей  $q_c^1$  должны выполняться условия непрерывности и гладкости общего решения, т. е. оба решения должны удовлетворять одним и тем же граничным условиям

$$R(q_c^1) = R_c, \quad Z(q_c^1) = Z_c, \quad \lambda_1(q_c^1) = \lambda_{1c}, \quad \lambda_2(q_c^1) = \lambda_{2c}, \quad \psi(q_c^1) = -\pi. \quad (8)$$

Системы дифференциальных уравнений (3)–(5) с граничными условиями (6)–(8) представляют собой краевую задачу с тремя параметрами: параметрами  $A$ ,  $B$  и неизвестной границей  $q_c^1$ , для определения которых используются условия

$$R(q_c^1) = R_c, \quad \lambda_1(q_c^1) = \lambda_{1c}, \quad \psi(q_c^1) = -\pi.$$

Полученная нелинейная краевая задача решается численно методом пристрелки [11] с использованием метода Рунге — Кутты.

**2. Результаты численных расчетов.** Проведены расчеты для оболочки из материала Муни — Ривлина, для которого функцию потенциальной энергии можно записать в виде

$$W = c_1[(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3)].$$

Здесь  $c_1, c_2$  — постоянные материала;  $I_1, I_2$  — инварианты меры деформации Коши [9], определяемые через главные кратности удлинений соотношениями

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1/(\lambda_1^2 \lambda_2^2), \quad I_2 = 1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2.$$

Расчеты проведены при следующих значениях геометрических и материальных параметров:  $r_0 = 1, h = 0,001, c_1 = 1, c_2 = 0,2$ .

На рис. 2 представлены сечения деформированной оболочки с учетом и без учета веса наполняющей ее жидкости. Значения внутреннего давления  $p$  и удельного веса наполняющей оболочку жидкости  $\gamma$  приведены в табл. 1, 2. В силу симметрии на рис. 2 показаны

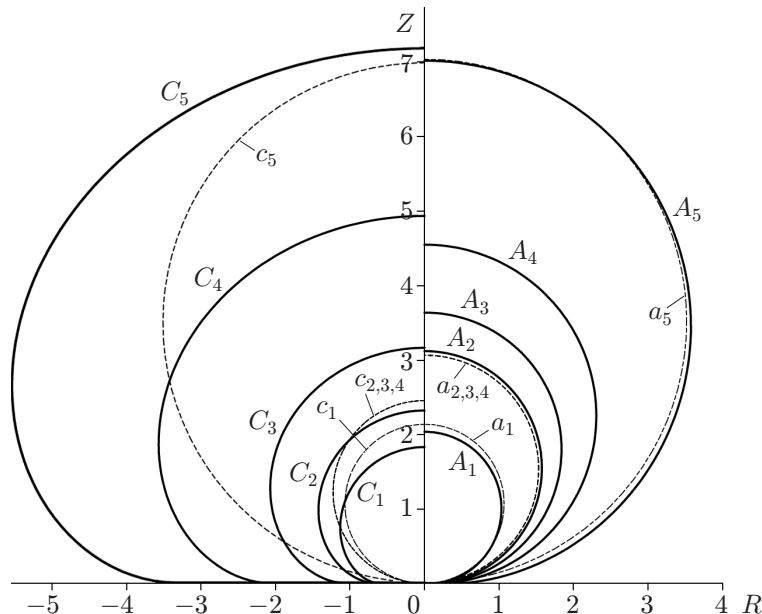


Рис. 2. Сечения деформированной оболочки с учетом (сплошные линии) и без учета (штриховые) веса наполняющей ее жидкости: *слева* — в случае “тяжелой” жидкости ( $\gamma = 0,0005$ ), *справа* — в случае “легкой” жидкости ( $\gamma = 0,00001$ )

Таблица 1

Значения внутреннего давления и удельного веса, при которых проводился расчет в случае “легких” жидкостей		
$A_j, a_j$	$p$	$\gamma$
$A_1$	0,001 50	0,000 01
$A_{2,3,4}$	0,003 54	
$A_5$	0,003 95	
$a_1$	0,001 50	0
$a_{2,3,4}$	0,003 54	
$a_5$	0,003 95	

Таблица 2

Значения внутреннего давления и удельного веса, при которых проводился расчет в случае “тяжелых” жидкостей		
$C_j, c_j$	$p$	$\gamma$
$C_1$	0,001 50	0,0005
$C_{2,3,4}$	0,003 00	
$C_5$	0,003 60	
$c_1$	0,001 50	0
$c_{2,3,4}$	0,003 00	
$c_5$	0,003 60	

только половины сечений. Для графиков слева от оси  $Z$  удельный вес жидкости равен  $\gamma = 0,0005$ , для графиков справа от оси  $Z$   $\gamma = 0,000 01$ .

На рис. 3 приведена зависимость радиуса зоны контакта  $R_c$  от давления  $p$  для различных жидкостей. Значения  $p$  в точках  $A_j$  и  $C_i$  соответствуют данным табл. 1, 2.

Зависимость максимальной высоты деформированной оболочки  $Z_{\max}$  от давления представлена на рис. 4.

Из полученных результатов следует, что вес жидкости может оказывать существенное влияние на деформированное состояние оболочки. В случае “тяжелых” жидкостей (кривые  $B$  и  $C$  на рис. 3, 4) форма деформированной оболочки значительно отличается от сферической, на диаграмме высота оболочки — давление точка локального максимума сдвигается, при этом ниспадающий участок диаграммы более четко выражен, а размер области контакта сопоставим с высотой деформированной оболочки.

В случае “легких” жидкостей (кривая  $A$  на рис. 3, 4) форма деформированной поверхности незначительно отличается от сферической: разность между высотой оболочки, наполненной жидкостью, и диаметром оболочки, раздуваемой несжимаемым газом, составляет менее 5 %, при этом положение локального максимума на диаграмме высота оболочки — давление изменяется. Однако учет веса “легкой” жидкости оказывает существенное влияние на размер области контакта с поверхностью, диаметр которой составляет 10–15 % высоты деформированной оболочки.

На рис. 5 показаны распределения напряжений, возникающих в оболочке в случае “тяжелой” жидкости (по оси абсцисс отложена координата  $q^1$ , по оси ординат — истинные напряжения, отнесенные к напряжению в вершине оболочки ( $q^1 = 0$ )). Из рис. 5 следует, что распределение напряжений в оболочке неоднородно, а увеличение давления приводит к уменьшению степени неоднородности. Напряжения имеют минимум в точке  $q^1 = \pi$ . Положение точки максимального напряжения изменяется в зависимости от давления.

**Заключение.** Рассмотрена задача о равновесии покоящейся на гладкой горизонтальной поверхности сферической оболочки, наполненной “тяжелой” жидкостью. Для оболочки, изготовленной из материала Муни — Ривлина, показано, что учет веса наполняющей среды может оказывать значительное влияние на деформацию и напряжения. В случае относительно “тяжелых” жидкостей форма деформированной оболочки существенно отличается от сферической при любых значениях давления, а в случае относительно “легкой” жидкости — близка к ней.

Таким образом, учет веса может быть важен при рассмотрении резервуаров с любыми жидкостями или газами. В случае “тяжелых” сред их вес оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние оболочки, следовательно, без его учета расчет

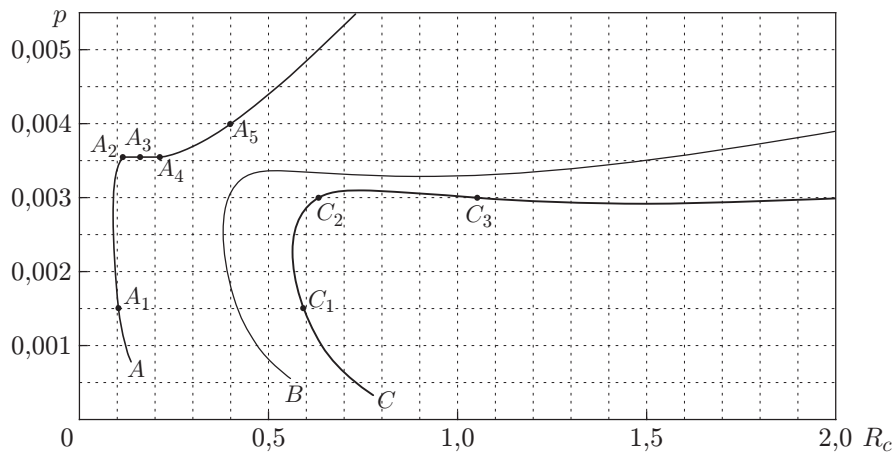


Рис. 3. Зависимость радиуса области контакта от давления при различных значениях  $\gamma$ :  
 A —  $\gamma = 0,000\ 01$ ; B —  $\gamma = 0,000\ 20$ ; C —  $\gamma = 0,000\ 50$

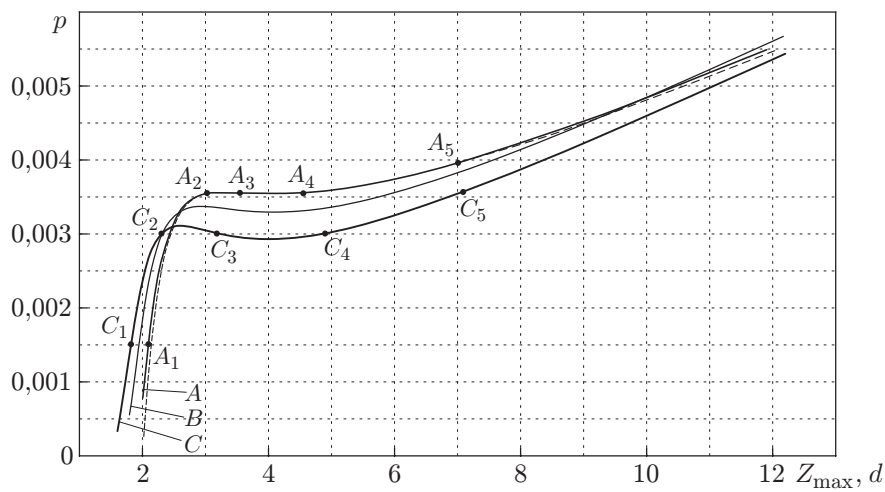


Рис. 4. Зависимость максимальной высоты деформированной оболочки от давления: штриховая кривая — зависимость диаметра  $d$  раздуваемой оболочки от давления без учета веса наполняющей среды; остальные обозначения те же, что на рис. 3

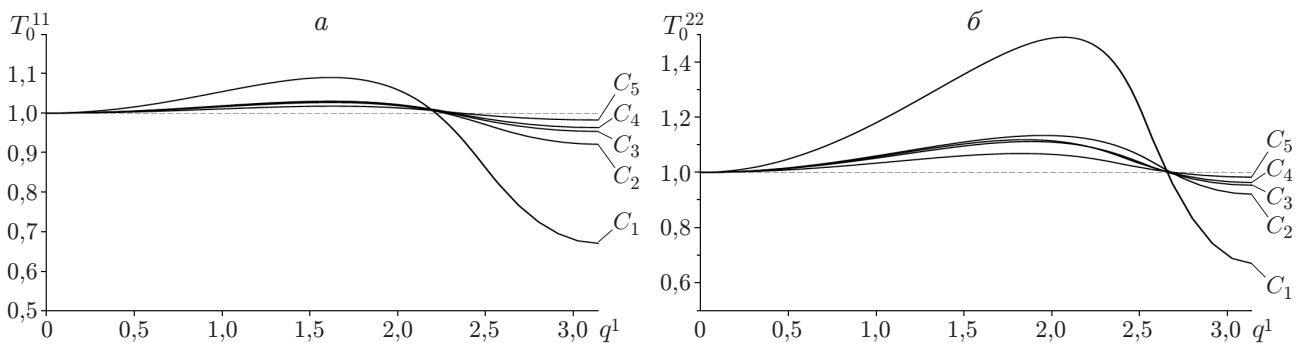


Рис. 5. Распределения напряжений  $T_0^{11}$  (а) и  $T_0^{22}$  (б), возникающих в оболочке в случае “тяжелой” жидкости

конструкции недостоверен. При исследовании систем, содержащих “легкие” среды, размер области контакта можно использовать для определения других параметров системы, например постоянных материала оболочки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
2. **Финн Р.** Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989.
3. **Новожилов В. В.** Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. Л.: Политехника, 1991.
4. **Demiray H., Levinson M.** The long fluid storage bag: A contact problem for a closed membrane // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. P. 431–439.
5. **Wang C. Y., Watson L. T.** The fluid-filled cylindrical membrane container // J. Engng Math. 1981. V. 15, N 2. P. 81–88.
6. **Antman S., Schagerl M.** Slumping instabilities of elastic membranes holding liquids and gases // Intern. J. Non-Linear Mech. 2005. V. 40. P. 1112–1138.
7. **Колесников А. М.** Равновесие горизонтальной эластичной трубы с тяжелой жидкостью // Эколог. вестн. 2008. № 1. С. 45–54.
8. **Haughton D. M.** Axisymmetric elastic membranes subjected to fluid loading // J. Appl. Math. 1996. V. 56. P. 303–320.
9. **Зубов Л. М.** Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982.
10. **Зубов Л. М., Колесников А. М.** Большие деформации упругих безмоментных оболочек вращения // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. № 1. С. 33–36.
11. **Колесников А. М.** Большие деформации высокоэластичных оболочек: Дис. канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 2006.

*Поступила в редакцию 27/II 2009 г.,  
в окончательном варианте — 25/VI 2009 г.*

---