ПРОСТРАНСТВЕННОЕ И ВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

А. П. Чудненко

(Новосибирск)

Исследуется зависимость между временным и пространственным развитием возмущений в гидродинамической устойчивости.

На примере плоского течения Пуазейля показано, что результаты численных расчетов временным и пространственным методами близки. Приведены приближенные переходные формулы.

Исследование устойчивости течения жидкости может быть проведено двумя способами.

Временной метод. В начальный момент времени на поток налагаются периодические по пространственной координате возмущения, амплитуда которых значительно меньше средней скорости течения. Скорость изменения амплитуды возмущений по времени и будет характеризовать степень устойчивости потока. С математической точки зрения этот способ сводится [1, 2] к решению задачи на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha''\varphi = i\alpha R\,[(C-u)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) + u''\varphi] \quad (1)$$

$$\Psi = \varphi(y)\, e^{i\alpha(x - Ct)}, \qquad C = X + iY \quad (2)$$

Здесь $\varphi = \varphi(y)$ — комплексная амплитуда функции тока Ψ для возмущений; x — координата вдоль потока; y — координата, направленная перпендикулярно потоку; α — вещественный параметр—волновое число возмущения; C — искомое собственное значение. Задача рассматривается при однородных граничных условиях для функции φ.

Пространственный метод. В начальном сечении канала на поток налагаются периодические по времени возмущения малой амплитуды и изучается их распространение вдоль по потоку. В этом случае степень устойчивости потока характеризуется скоростью затухания амплитуды возмущений по пространственной координате. Этот способ более «физичен», поскольку более соответствует условиям эксперимента. Он сводится [3] к задаче на собственные значения для уравнения

$$\varphi^{IV} - 2K^2\varphi'' + K^4\varphi = iR\,[(\omega - Ku)(\varphi'' - K^2\varphi) + Ku''\varphi] \quad (3)$$

$$\Psi = \varphi(y)\, e^{i(\omega t - Kx)}, \qquad K = K_r + iK_i \quad (4)$$

Здесь $\varphi = \varphi(y)$ — комплексная амплитуда функции тока ψ для возмущений, ω — вещественный параметр — частота колебаний в заданном сечении, K — искомое собственное значение.

Представляет интерес провести хотя бы качественную аналогию между результатами этих методов, поскольку выводы, использующие меру устойчивости только одного из них, не могут претендовать на общность. С этой целью рассмотрим оба типа возмущений, имеющих одинаковую длину волны по пространственной координате

$$\alpha = K_r \quad (5)$$

Изменение амплитуды по времени в точке, движущейся с фазовой скоростью, во временном случае будет происходить по закону

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\, e^{\alpha Y t}$$

В пространственном случае для этой точки $x = (\omega / K_r)t$ и из (4) получим

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)\, e^{(K_i\omega/K_r)\,t}$$

Проследим теперь за изменением амплитуды в этой точке по пространственной координате. В пространственном случае согласно (4)

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)\, e^{K_i x}$$

Во временном случае из формулы (2), с учетом того что в данной точке $x = Xt$, получим

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)\, e^{(\alpha Y/X)\,x}$$

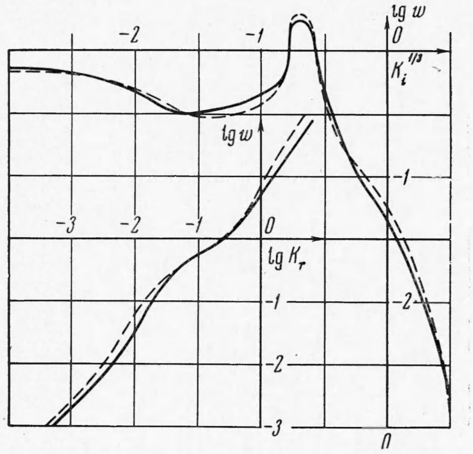
Если предположить, что при равенстве пространственных длин волн (5) приблизительно совпадают как пространственные, так и временные коэффициенты затухания для обоих случаев, то будем иметь

$$\alpha Y \approx K_i\omega \mid K_r, \quad K_i \approx \alpha Y \mid X, \quad \text{или} \quad X \approx \omega K_r \tag{6}$$

Из этих формул вытекает

$$K_r \approx \alpha, \quad \omega \approx \alpha X \tag{7}$$

В работе [4] показано, что при малых значениях αY, вблизи нейтральной кривой эти равенства верны с точностью до $O((\alpha Y)^2)$. Естественно, на нейтральной кривой, где $K_i = Y = 0$, имеет место совпадение, в других точках этого совпадения может не быть: в первом случае по потоку распространяются с затуханием или возрастанием волны одинаковой амплитуды, во втором — разной.



Для сравнения обоих методов было проведено численное решение уравнений (1) и (3) для плоского течения Пуазейля методом, изложенным в работе [2] при числе Рейнольдса, рассчитанном по максимальной скорости, $R = 10^4$. На фигуре сплошной линией обозначены результаты расчета пространственным методом, пунктирной линией — временным с учетом формул (6), (7). Точки, соответствующие нейтральным частотам, как и следовало ожидать, совпадают. В остальных точках расхождение невелико.

Асимптотика для K_i при малых ω может быть получена из уравнения (3), если положить $\omega = K_r = 0$ (в силу конечности фазовой скорости при малых частотах) и $u = 1$ (так как декремент затухания волн большой длины слабо зависит от профиля скорости). Это приводит для симметричных функций $\varphi(y)$ к следующему уравнению:

$$\sqrt{K_i^2 - RK_i}\, \mathrm{tg} \sqrt{K_i^2 - RK_i} = K_i\, \mathrm{tg}\, K_i$$

решение которого при малых K_i близко к значению $K_i = -\pi^2 / R$. Для временного затухания согласно работе [5] можно получить следующую асимптотическую зависимость при малых α:

$$\frac{\alpha Y}{X} = -\frac{\pi^2}{RX}, \qquad X \approx 0.62$$

Полученное ориентировочное совпадение может быть использовано при решении технических задач, а также при выборе отправных точек при численном расчете.

Автор благодарит М. А. Гольдштика за проявленный интерес к работе и советы.

Поступила 17 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
3. Watson J. On spatially — growing finite disturbances in plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, No. 2.
4. Gaster M. A note on the relation between temporally-increasing and spatially — increasing disturbances in hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14 No. 2.
5. Сапожников В. А., Штерн В. Н. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля. ПМТФ, 1969, № 4.