УДК 539.422.22

ЛОКАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ОСТРЫХ V-ОБРАЗНЫХ ВЫРЕЗОВ В ПЛАСТИНАХ

Ю. Н. Овчаренко

Тульский государственный университет, 300600 Тула
E-mail: ovcharenkos@rambler.ru

Предложены условия разрушения теории локальной плотности энергии деформации, первоначально сформулированные Дж. Си для острого V-образного выреза с произвольным углом раскрытия. Берега рассматриваемого V-образного выреза свободны от нагрузок. Показано, что при использовании схем нагружения типа I и типа II известные условия хрупкого разрушения, предложенные Дж. Си, противоречат одному из основных положений в механике разрушения: чем больше интенсивность напряжений или упругой энергии вблизи вершины V-образного выреза, тем больше вероятность возникновения в ней трещины. Предлагаемые новые условия разрушения (в полярной системе координат) получены в результате независимого определения плотностей энергий изменения объема и формы. В этом случае указанные выше противоречия отсутствуют.

Ключевые слова: V-образный вырез, плотность энергии деформации, схемы нагружения типа I и типа II, направление распространения трещины, локальный критерий разрушения.

1. Основные положения теории разрушения Дж. Си в случае V-образного выреза. Для острого V-образного выреза с произвольным углом раскрытия Дж. Си предложил модель разрушения материала, в которой используется локальная плотность потенциальной энергии деформации [1]. Известный критерий разрушения для линейного разреза в виде трещины является частным случаем модели [1]. Плотность энергии деформации вблизи вершины V-образного выреза является функцией линейно-упругих деформаций.

Запишем в общем виде формулу для плотности энергии деформации в цилиндрической системе координат:

$$W = \frac{1}{2}\,(\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z}\gamma_{\theta z} + \tau_{zr}\gamma_{zr}).$$

Далее рассматривается плоская задача:

$$W = \frac{1}{2}\,(\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta}).$$

Это выражение можно записать с использованием напряжений и перемещений:

$$W = \frac{1}{2}\Big[\sigma_r\,\frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta\Big(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big) + \tau_{r\theta}\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\Big)\Big]. \tag{1}$$

Выражения для асимптотических напряжений и перемещений вблизи вершины V-образного выреза представляются в следующем виде [2]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = C_{1\alpha} r^{\lambda_1 - 1} \lambda_1 \begin{bmatrix} (\lambda_1 - 1) f_1(\alpha) \cos(\lambda_1 + 1)\theta - (\lambda_1 - 3)\cos(\lambda_1 - 1)\theta \\ -(\lambda_1 - 1) f_1(\alpha)\cos(\lambda_1 + 1)\theta + (\lambda_1 + 1)\cos(\lambda_1 - 1)\theta \\ (\lambda_1 - 1)[-f_1(\alpha)\sin(\lambda_1 + 1)\theta + \sin(\lambda_1 - 1)\theta] \end{bmatrix} +$$

$$+ C_{2\alpha} r^{\lambda_2 - 1} \lambda_2 \begin{bmatrix} (\lambda_2 + 1) f_2(\alpha)\sin(\lambda_2 + 1)\theta - (\lambda_2 - 3)\sin(\lambda_2 - 1)\theta \\ (\lambda_2 + 1)[-f_2(\alpha)\sin(\lambda_2 - 1)\theta + \sin(\lambda_2 - 1)\theta] \\ (\lambda_2 + 1) f_2(\alpha)\cos(\lambda_2 + 1)\theta - (\lambda_2 - 1)\cos(\lambda_2 - 1)\theta \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 2\mu u_r \\ 2\mu u_\theta \end{bmatrix} = C_{1\alpha} r^{\lambda_1} \begin{bmatrix} (\lambda_1 - 1) f_1(\alpha)\cos(\lambda_1 + 1)\theta + (k - \lambda_1)\cos(\lambda_1 - 1)\theta \\ -(\lambda_1 - 1) f_1(\alpha)\sin(\lambda_1 + 1)\theta + (k + \lambda_1)\sin(\lambda_1 - 1)\theta \end{bmatrix} +$$

$$+ C_{2\alpha} r^{\lambda_2} \begin{bmatrix} (\lambda_2 + 1) f_2(\alpha)\sin(\lambda_2 + 1)\theta + (k - \lambda_2)\sin(\lambda_2 - 1)\theta \\ (\lambda_2 + 1) f_2(\alpha)\cos(\lambda_2 + 1)\theta - (k + \lambda_2)\cos(\lambda_2 - 1)\theta \end{bmatrix}.$$

Здесь λ_1, λ_2 — первые положительные собственные числа характеристических уравнений $\lambda_1 \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\lambda_1(2\pi - \alpha)$ и $\lambda_2 \sin(2\pi - \alpha) = \sin\lambda_2(2\pi - \alpha)$ соответственно; α — угол раскрытия V-образного выреза; $\mu = E/[2(1+\nu)]$ — модуль сдвига; E — модуль упругости первого рода; ν — коэффициент Пуассона; $k = (3-\nu)/(1+\nu)$ в случае плосконапряженного состояния, $k = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации (в данной работе рассматривается задача плоской деформации); $f_1(\alpha) = \sin(\lambda_1 - 1)(\pi - \alpha/2)/[\sin(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha/2)]$; $f_2(\alpha) = \sin(\lambda_2 - 1)(\pi - \alpha/2)/[\sin(\lambda_2 + 1)(\pi - \alpha/2)]$; $C_{1\alpha}$, $C_{2\alpha}$ — коэффициенты интенсивности напряжений вблизи вершины V-образного выреза для схем нагружения типа I и типа II. В частности, для линейной трещины ($\alpha = 0$) $C_1 = K_{\rm I}/\sqrt{2\pi}$, $C_2 = K_{\rm II}/\sqrt{2\pi}$ ($K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$ — коэффициенты интенсивности напряжений для задач о трещинах).

Запишем формулы (2) в виде, более удобном для дальнейших преобразований:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = C_{1\alpha} r^{\lambda_1 - 1} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{bmatrix} + C_{2\alpha} r^{\lambda_2 - 1} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2\mu u_r \\ 2\mu u_\theta \end{bmatrix} = C_{1\alpha} r^{\lambda_1} \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \end{bmatrix} + C_{2\alpha} r^{\lambda_2} \begin{bmatrix} E_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

(A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 определяются соотношениями (2)).

Подставляя (3) в формулу (1), получаем выражение для плотности энергии деформации вблизи вершины V-образного выреза

$$W = \frac{1}{4\mu}\big(a_{11} C_{1\alpha}^2 r^{2(\lambda_1 - 1)} + a_{12} C_{1\alpha} C_{2\alpha} r^{\lambda_1 + \lambda_2 - 2} + a_{22} C_{2\alpha}^2 r^{2(\lambda_2 - 1)}\big), \qquad (4)$$

где параметры a_{11}, a_{12}, a_{22} определяются из матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 E_1 \\ \lambda_2 E_2 \\ 0 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 E_1 \\ \lambda_2 E_2 \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} F_1 + F_1' \\ E_2 + F_2' \\ 0 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 + F_1' \\ E_2 + F_2' \end{bmatrix} +$$

$$+ D_1 \begin{bmatrix} E_1' + (\lambda_1 - 1)F_1 \\ E_2' + (\lambda_2 - 1)F_2 \\ 0 \end{bmatrix} + D_2 \begin{bmatrix} 0 \\ E_1' + (\lambda_1 - 1)F_1 \\ E_2' + (\lambda_2 - 1)F_2 \end{bmatrix},$$

E_1', E_2', F_1', F_2' — соответствующие функции, продифференцированные по θ.

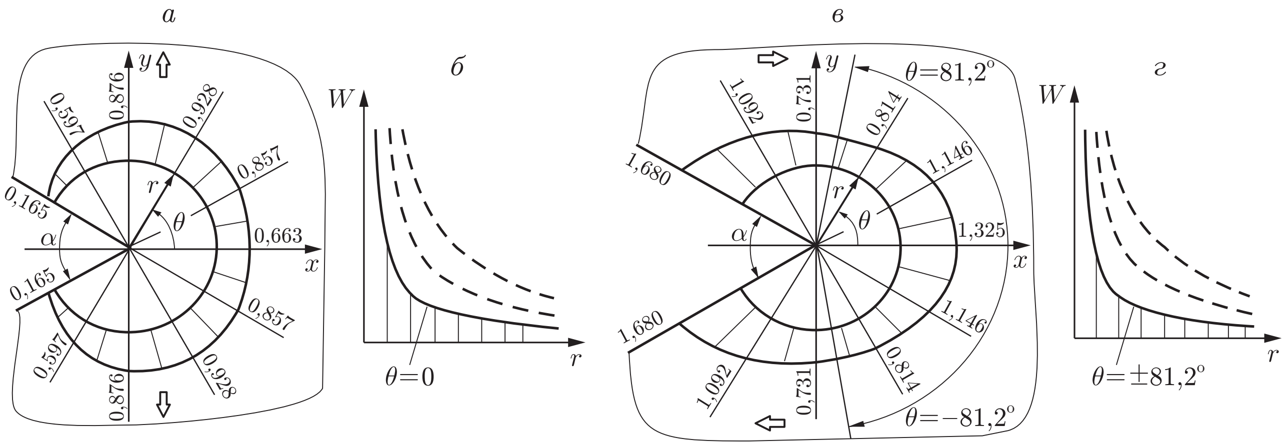

Рис. 1. Эпюры плотности энергии деформации $W = (\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta})/2$, построенные по окружной координате (*а, в*) и радиусу (*б, г*):
а, б — нагружение по схеме типа I, *в, г* — нагружение по схеме типа II

В случае линейной трещины выражение (4) принимает вид [3]

$$W = \frac{1}{r}\,(a_{11}C_1^2 + 2a_{12}C_1C_2 + a_{22}C_2^2), \tag{5}$$

где

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{8\mu}\begin{bmatrix} (1+\cos\theta)(k-\cos\theta) \\ [2\cos\theta-(k-1)]\sin\theta \\ k(1-\cos\theta)+(1+3\cos\theta)\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим более подробно выражение (4). В случае нормального разрыва V-образного выреза (схема нагружения типа I), т. е. при $C_{2\alpha} = 0$, имеем

$$W = \frac{1+\nu}{2E}\,C_{1\alpha}^2 r^{2(\lambda_1-1)}\{A_1E_1\lambda_1 + B_1(E_1+F_1') + D_1[E_1' + (\lambda_1-1)F_1]\}. \tag{6}$$

На рис. 1,*а,б* показана эпюра плотности энергии деформации W (см. (6)), полученная при $\alpha = 60^\circ$, $r = 1$, $E = 1$, $\nu = 0{,}25$, $C_{1\alpha} = 1$. Заметим, что при $\theta_{cr} = 0$ функция плотности энергии W имеет минимум.

В случае поперечного сдвига V-образного выреза (схема нагружения типа II), т. е. при $C_{1\alpha} = 0$, имеем

$$W = \frac{1+\nu}{2E}\,C_{2\alpha}^2 r^{2(\lambda_2-1)}\{A_2E_2\lambda_2 + B_2(E_2+F_2') + D_2[E_2' + (\lambda_2-1)F_2]\}. \tag{7}$$

На рис. 1,*в,г* показана эпюра плотности энергии деформации W (см. (7)), полученная при $\alpha = 60^\circ$, $r = 1$, $E = 1$, $\nu = 0{,}25$, $C_{2\alpha} = 1$. При $\theta_{cr} = \pm 81{,}2^\circ$ функция плотности W имеет два одинаковых минимума.

Согласно теории Дж. Си в тот момент, когда энергия деформации W, накопившаяся в элементарном объеме материала, на определенном расстоянии r_{cr} от вершины V-образного выреза в некотором направлении θ_{cr} достигает критического значения W_{cr}, начинается разрушение. Расстояние r_{cr} трактуется как весьма малый радиус цилиндрической центральной зоны вблизи вершины трещины, внутри которой материал вследствие сингулярности напряжений нельзя считать сплошной средой. Например, для высокопрочной стали марки 4140 радиус r_{cr}, зафиксированный в экспериментах, составляет $0{,}0165 \div 0{,}3416$ мм [4].

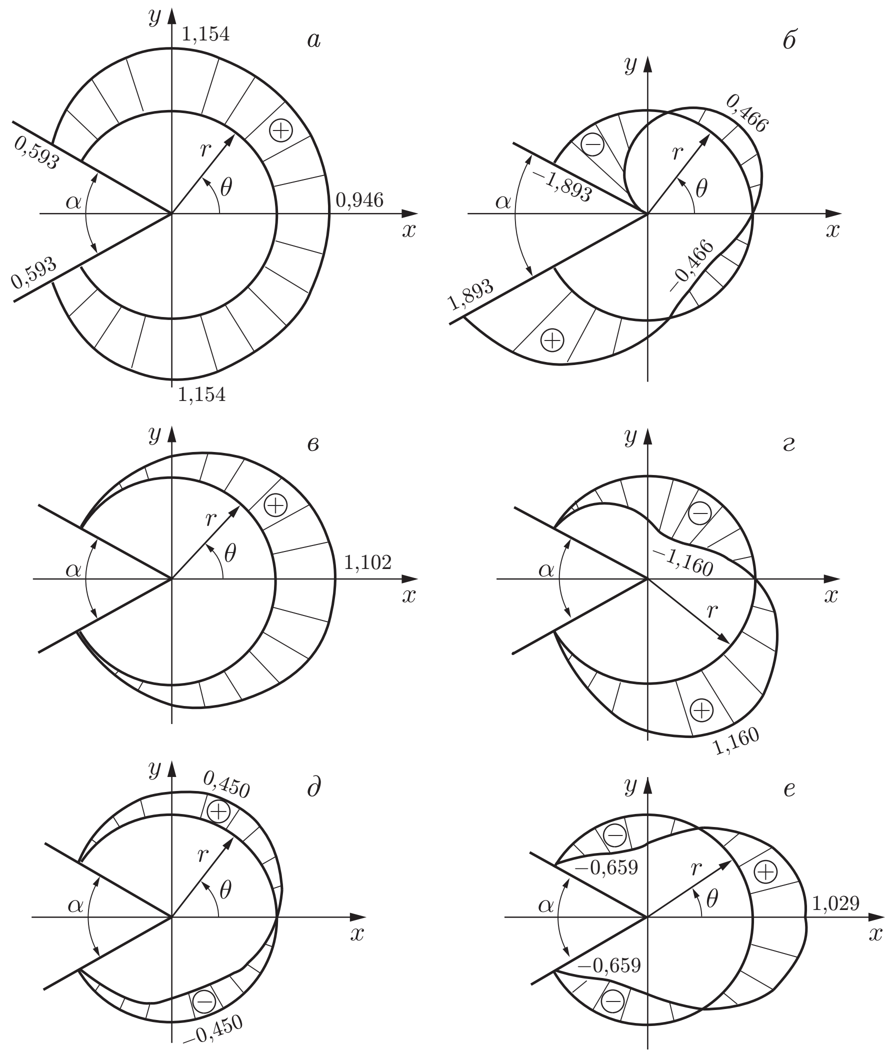

Рис. 2. Напряженное состояние вблизи вершины V-образного выреза:
а, в, д — нагружение по схеме типа I, *б, г, е* — нагружение по схеме типа II; *а, б* — радиальное напряжение σ_r, *в, г* — окружное напряжение σ_θ, *д, е* — касательное напряжение $\tau_{r\theta}$

При использовании теории Дж. Си необходимо провести анализ напряженного состояния, в частности определить знаки напряжений (рис. 2), поскольку энергетическая характеристика W не позволяет установить, в каких случаях нормальные напряжения являются растягивающими или сжимающими и в каких случаях касательные напряжения действуют по часовой стрелке или против нее. Это важно знать, чтобы выполнить оценку возможности разрушения и определить его направление.

Ниже приводятся условия разрушения острого V-образного выреза, предложенные Дж. Си [1].

1. Направление θ_{cr} разрушения за счет сдвига или разрыва определяется максимумом или минимумом плотности энергии деформации W соответственно: $\partial W/\partial\theta = 0$ при $\theta_{cr} = \theta$; $\partial^2 W/\partial\theta^2 < 0$ при сдвиге; $\partial^2 W/\partial\theta^2 > 0$ при разрыве.

2. Разрушение происходит в направлении θ_{cr}, определенном условием 1, когда максимум W при сдвиге или минимум W при разрыве достигает критического значения W_{cr}.

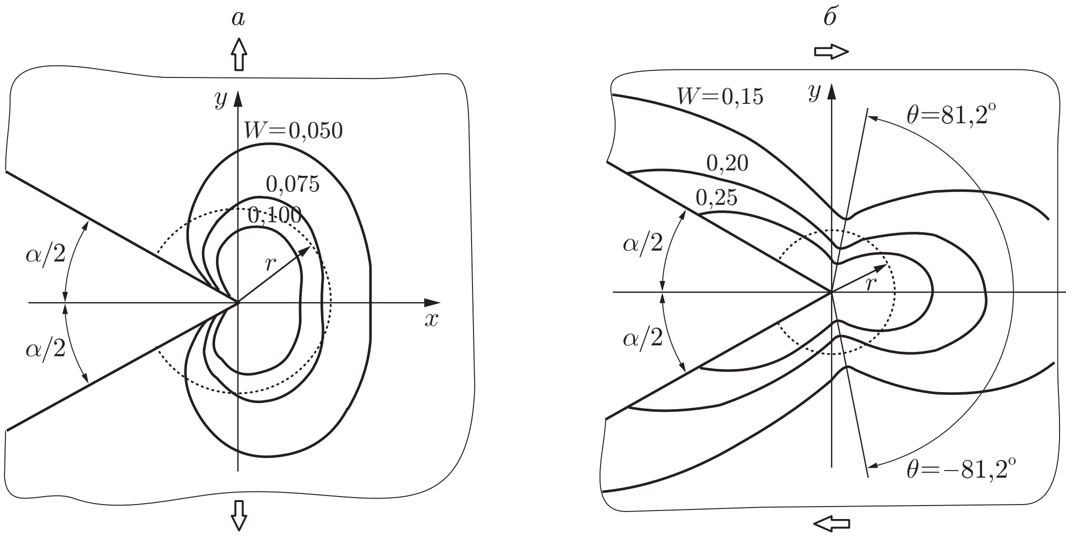

Рис. 3. Изолинии плотности энергии деформации $W = (\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta})/2$: *а* — нагружение по схеме типа I, *б* — нагружение по схеме типа II; пунктирные линии — линии пересечения поверхности $W(x, y)$ с вертикальным относительно плоскости (x, y) цилиндром с произвольным радиусом r

В обоих случаях критическая плотность энергии деформации W_{cr} может быть вычислена с использованием известных критических коэффициентов C_{1cr} и C_{2cr} (см. (4)), определяемых в экспериментах с образцами, имеющими V-образные вырезы.

С целью анализа условий разрушения, предложенных Дж. Си, рассмотрим случай нормального разрыва пластины с V-образным вырезом (схема нагружения типа I). На рис. 3,*а* приведены построенные с использованием формулы (6) изолинии плотности $W = (\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta})/2$ при $E = 1$, $C_{1\alpha} = 1$, $\nu = 0{,}25$ (сплошные линии), а также линия пересечения поверхности $W(x, y)$ с вертикальным относительно плоскости (x, y) цилиндром с произвольным радиусом r (пунктирная линия). Каждой точке линий пересечения соответствует некоторое значение плотности энергии деформации W. В трехмерном пространстве (x, y, W) линия пересечения представляет собой линию с минимумом W в направлении $\theta = 0$, которое, как известно, является наиболее вероятным направлением распространения трещины при нагружении по схеме типа I. Таким образом, минимум W может быть использован при определении направления распространения трещины в случае нагружения по схеме типа I. Это свойство лежит в основе условия 1.

Выполним теоретическое обоснование условия 1. На рис. 1,*б* приведена эпюра асимптотической плотности W в случае нагружения по схеме типа I при $\theta_{cr} = 0$, построенная с использованием формулы (6). Штриховыми линиями показаны эпюры плотности энергии деформации W, расположенные выше эпюры W, полученной при $\theta_{cr} = 0$. При $\theta_{cr} \neq 0$ наиболее высока вероятность возникновения трещины. Этот вывод, соответствующий одному из основных положений в механике разрушения, используемых при анализе асимптотического напряженного состояния вблизи вершины острого V-образного выреза (в частности, трещины): чем больше интенсивность напряжений или плотности упругой энергии, тем больше вероятность разрушения, — противоречит теории Дж. Си. При нормальном разрыве критическим направлением является $\theta_{cr} = 0$.

Аналогично рассматривается случай поперечного сдвига V-образного выреза (схема нагружения типа II). На рис. 3,*б* приведены построенные с использованием формулы (7) изолинии плотности W при $E = 1$, $C_{2\alpha} = 1$, $\nu = 0{,}25$ (сплошные линии), а также линия пересечения поверхности $W(x,y)$ с вертикальным цилиндром, имеющим произвольный радиус r (пунктирная линия). Каждой точке этой линии соответствует некоторое значение плотности энергии деформации W. В трехмерном пространстве (x,y,W) линия пересечения представляет собой линию с двумя одинаковыми минимумами W при $\theta_{cr} = \pm 81{,}2^\circ$. По аналогии с рассмотренным выше случаем нагружения по схеме типа I Дж. Си, по-видимому, использовал условие 1 для оценки направления распространения трещины в задачах со схемой нагружения типа II. С учетом знака напряжений σ_θ предсказанное с помощью теории Дж. Си направление распространения трещины определяется значением $\theta_{cr} = -81{,}2^\circ$.

Выполним теоретическое обоснование условия 1 в случае нагружения по схеме типа II. На рис. 1,*г* приведена эпюра асимптотической плотности энергии деформации W в случае нагружения по схеме типа II при $\theta_{cr} = \pm 81{,}2^\circ$, построенная с использованием формулы (7). Из рис. 1,*г* следует, что эпюры плотности W, полученные при $\theta_{cr} = \pm 81{,}2^\circ$ (сплошная линия), расположены ниже соответствующих эпюр, полученных при других значениях θ (штриховые линии). Следовательно, значения $\theta_{cr} = \pm 81{,}2^\circ$ не могут определять наиболее вероятные направления распространения трещины.

2. Модификация теории Дж. Си. При разработке теории разрушения пластин с острыми V-образными вырезами (в частности, с линейными трещинами) Дж. Си использовал сумму энергий изменения объема и формы (в полярной системе координат):

$$W = W_\sigma + W_\tau$$

($W_\sigma = (\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta)/2$ — энергия изменения элементарного объема при действии только нормальных напряжений σ_r и σ_θ; $W_\tau = \tau_{r\theta}\,\gamma_{r\theta}/2$ — энергия изменения формы элементарного объема при действии только касательных напряжений $\tau_{r\theta}$). Вследствие различия характера разрушений (отрыв и сдвиг) в элементарном объеме вблизи вершины острого V-образного выреза энергии W_σ и W_τ должны определяться независимо.

Таким образом, для получения энергетической оценки напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины вместо одного соотношения (4) предлагается использовать два независимых выражения:

$$W_\sigma = \frac{1}{4\mu}\,(C_{1\alpha}^2 r^{2(\lambda_1-1)} a_{11\sigma} + C_{1\alpha}C_{2\alpha} r^{\lambda_1+\lambda_2-2} a_{12\sigma} + C_{2\alpha}^2 r^{2(\lambda_2-1)} a_{22\sigma}), \qquad (8)$$

где

$$\begin{bmatrix} a_{11\sigma} \\ a_{12\sigma} \\ a_{22\sigma} \end{bmatrix} = \lambda_1 E_1 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 F_2 \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + B_1 \begin{bmatrix} F_1 + F_1' \\ E_2 + F_2' \\ 0 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 + F_1' \\ E_2 + F_2' \end{bmatrix},$$

и

$$W_\tau = \frac{1}{4\mu}\,(C_{1\alpha}^2 r^{2(\lambda_1-1)} a_{11\tau} + C_{1\alpha}C_{2\alpha} r^{\lambda_1+\lambda_2-2} a_{12\tau} + C_{2\alpha}^2 r^{2(\lambda_2-1)} a_{22\tau}), \qquad (9)$$

где

$$\begin{bmatrix} a_{11\tau} \\ a_{12\tau} \\ a_{22\tau} \end{bmatrix} = D_1 \begin{bmatrix} E_1' + (\lambda_1 - 1)F_1 \\ E_2' + (\lambda_2 - 1)F_2 \\ 0 \end{bmatrix} + D_1 \begin{bmatrix} 0 \\ E_1' + (\lambda_1 - 1)F_1 \\ E_2' + (\lambda_2 - 1)F_2 \end{bmatrix}.$$

В случае линейной трещины выражения (8), (9) принимают вид

$$W_\sigma = \frac{1}{r}\,[a_{11}C_1^2 + a_{12}C_1C_2 + a_{22}C_2^2],$$

$$W_\tau = \frac{1}{r}\frac{1+\nu}{16E}\Big[C_1\Big(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\Big) + C_2\Big(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2}\Big)\Big]^2,$$

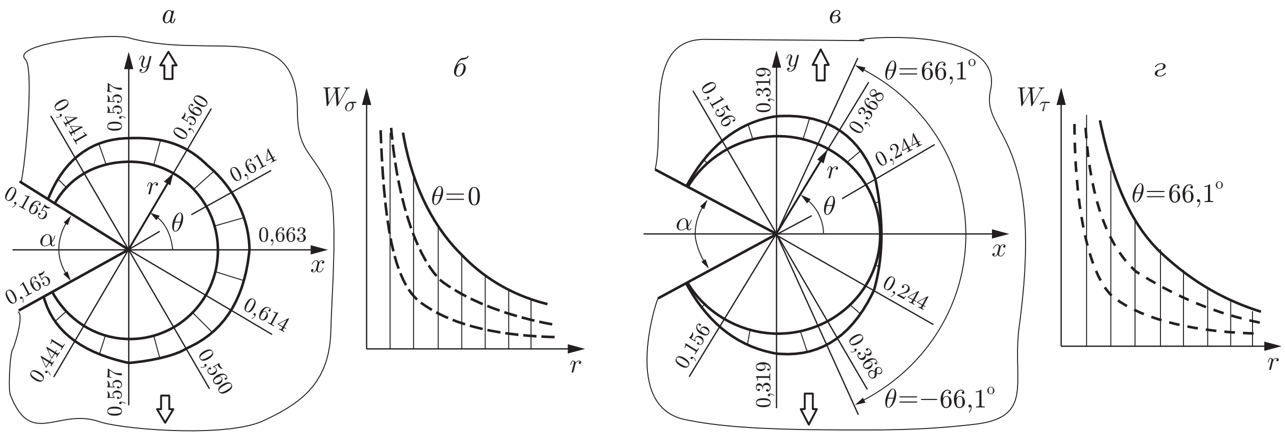

Рис. 4. Эпюры плотности энергии деформации, построенные по окружной координате (*а, в*) и радиусу (*б, г*), в случае нагружения по схеме типа I:
а, б — $W_\sigma = (\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta)/2$; *в, г* — $W_\tau = \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta}/2$

где

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{32\mu}\begin{bmatrix} (8k-7)\cos^2(\theta/2) - 2\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2) + \cos^2(3\theta/2) \\ -(8k-9)\sin\theta + 4\sin 2\theta - 3\sin 3\theta \\ (8k-7)\sin^2(\theta/2) - 6\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) + 9\sin^2(3\theta/2) \end{bmatrix}.$$

Ниже приводятся модифицированные условия разрушения.

1. Распространение трещины из вершины острого V-образного выреза должно происходить в направлении θ_{cr}, для которого плотности энергии деформации W_σ или W_τ максимальны.

2. Распространение трещины происходит в направлении θ_{cr}, определенном условием 1, когда деформация W_σ или W_τ достигает максимального критического значения $W_{\sigma\,cr}$ или $W_{\tau\,cr}$.

Иными словами, возможны два варианта возникновения трещины в вершине V-образного выреза: при разрыве материала в направлении θ_{cr}, когда значение W_σ максимальное, или при сдвиге в направлении θ_{cr}, когда значение W_τ максимальное. Критические значения $W_{\sigma\,cr}$, $W_{\tau\,cr}$ для соответствующих θ_{cr} вычисляются по известным критическим значениям коэффициентов C_{1cr} и C_{2cr} (с использованием формул (8), (9)), которые в свою очередь определяются по величине разрушающей нагрузки образцов с острыми V-образными вырезами.

На рис. 4 приведены эпюры плотности энергии деформации W_σ и W_τ (схема нагружения типа I), полученные с использованием формул (8), (9) при $E = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $\nu = 0{,}25$. Из рис. 4,*а,б* следует, что максимальное значение W_σ достигается при $\theta_{cr} = 0$. Таким образом, разрушение путем отрыва должно произойти именно в этом направлении, поскольку напряжения σ_r и σ_θ являются растягивающими (см. рис. 2,*а,в*). На рис. 4,*б* также видно, что асимптотическая эпюра $W_\sigma(r)$, полученная при $\theta_{cr} = 0$, расположена выше эпюр, полученных при других значениях θ (штриховые линии). Этот результат соответствует основному положению в механике разрушения.

Из рис. 4,*в,г* следует, что максимальное значение W_τ достигается при $\theta_{cr} = \pm 66{,}1°$. Таким образом, разрушение путем сдвига должно произойти в этом направлении. На рис. 4,*г* видно, что асимптотическая эпюра $W_\tau(r)$, полученная при $\theta_{cr} = \pm 66{,}1°$, расположена выше эпюр, полученных при других значениях θ (штриховые линии). Можно предположить,

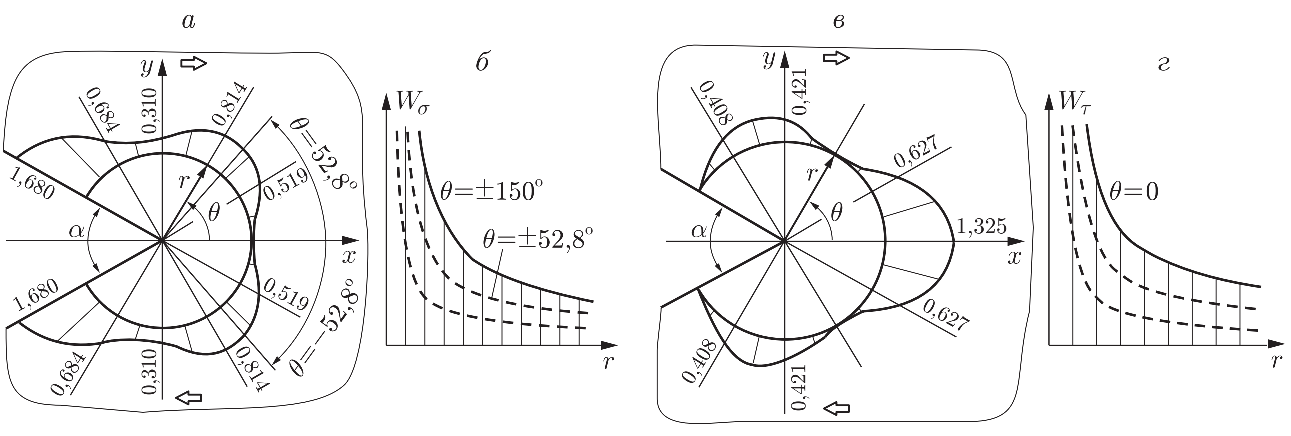

Рис. 5. Эпюры плотности энергии деформации, построенные по окружной координате (*а, в*) и радиусу (*б, г*), в случае нагружения по схеме типа II:
а, б — $W_\sigma = (\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_\theta\varepsilon_\theta)/2$; *в, г* — $W_\tau = \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta}/2$

что на начальном этапе пластическое течение в окрестности вершины трещины будет происходить в направлениях $\theta_{cr} = \pm 66{,}1°$.

Чтобы определить, какая энергия (W_σ или W_τ) в рассмотренной задаче (схема нагружения типа I) играет основную роль при разрушении, необходимо знать физические и механические свойства материала.

На рис. 5 представлены эпюры плотности энергии деформации W_σ и W_τ (схема нагружения типа II), полученные с использованием формул (8), (9) при $E = 1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $\nu = 0{,}25$, $\alpha = 60°$. Из рис. 5,*а,б* следует, что максимальное значение W_σ достигается при $\theta_{cr} = \pm 150°$. В этом случае преобладают напряжения σ_r (см. рис. 2,*б*), поэтому разрушение путем отрыва должно происходить в направлении, перпендикулярном этим направлениям. На рис. 5,*б* видно, что асимптотическая эпюра $W_\sigma(r)$, полученная при $\theta_{cr} = \pm 150°$, расположена выше эпюр, полученных при других значениях θ. Однако растягивающие напряжения σ_r действуют только при $\theta_{cr} = -150°$, следовательно, распространение трещины должно происходить в этом направлении (точнее, перпендикулярно направлению $\theta_{cr} = -150°$).

Замечание. Направление распространения трещины $\theta_{cr} = -81{,}2°$, предсказанное теорией Дж. Си, в модифицированной теории не является наиболее опасным (см. рис. 5,*а,б*).

На рис. 5,*в,г* представлены эпюры плотности энергии деформации W_τ (схема нагружения типа II) при $E = 1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $\nu = 0{,}25$. Из рис. 5,*в,г* следует, что максимальное значение W_τ достигается при $\theta_{cr} = 0$. Таким образом, разрушение путем сдвига должно произойти именно в этом направлении. На рис. 5,*г* видно, что асимптотическая эпюра $W_\tau(r)$, полученная при $\theta_{cr} = 0$, расположена выше эпюр, полученных при других значениях θ (штриховые линии). Это свидетельствует о том, что указанное направление является наиболее вероятным направлением распространения трещины при сдвиге.

Чтобы определить, какая энергия (W_σ или W_τ) в рассматриваемой задаче (схема нагружения типа II) играет основную роль при разрушении, необходимо знать физические и механические свойства материала.

Заключение. В работе проведен анализ сформулированных Дж. Си условий разрушения теории локальной плотности энергии деформации для острого V-образного выреза. Предложены новые условия разрушения, согласно которым возможны два варианта распространения трещины: в направлении, в котором максимальна энергия $W_\sigma(\theta)$, или в направлении, в котором максимальна энергия $W_\tau(\theta)$.

Следует отметить, что новый подход к теории локальной плотности энергии деформации для острого V-образного выреза применим для оценки разрушения тел с V-образными вырезами при совместном использовании схем нагружения типа I и типа II.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sih G. C., Ho J. W.** Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density // Theor. Appl. Fract. Mech. 1991. V. 16. P. 179–214.
2. **Овчаренко Ю. Н.** Плотность энергии деформации в линейной механике разрушения применительно к V-образным вырезам // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Актуальные вопр. механики. 2006. Т. 1, вып. 2. С. 141–149.
3. **Sih G. C.** Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems // Intern. J. Fract. 1974. V. 10, N 3. P. 305–321.
4. **Wong A. K.** On the application of the strain energy density theory in predicting crack initiation and angle of growth // Engng Fract. Mech. 1997. V. 27, N 2. P. 157–170.

Поступила в редакцию 18/I 2013 г.,
в окончательном варианте — 25/IV 2013 г.