

УДК 532.517.4

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДАЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА

О. В. Капцов, И. А. Ефремов, А. В. Шмидт\*

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

\* Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск

E-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

Рассмотрена полуэмпирическая двумерная модель турбулентности второго порядка в приближении дальнего турбулентного следа. Искомыми величинами являются дефект скорости, турбулентная кинетическая энергия, диссипация энергии и напряжение Рейнольдса. Найдена полная группа преобразований, допускаемая этой моделью. Построены автомодельные решения, удовлетворяющие естественным краевым условиям. Полученные решения согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: дальний след, турбулентность, автомодельность, модели второго порядка.

**Введение.** Известные экспериментальные данные [1–3] и численные расчеты [4, 5] указывают на то, что течение в дальнем турбулентном следе можно считать близким к автомодельному. В работе [6] с использованием  $(k-\varepsilon)$ -модели турбулентности [7] найдены автомодельные решения, согласующиеся с экспериментальными данными [3]. Целью настоящей работы является построение автомодельных решений  $(\overline{u'v'}-k-\varepsilon)$ -модели [8–10], используемой для расчета характеристик дальнего турбулентного следа за плоским или осесимметричным телом:

$$\begin{aligned}
 u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{1}{y^s} \frac{\partial (y^s w)}{\partial y}, & u_0 \frac{\partial k}{\partial x} &= \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^s c_\mu \frac{k^2}{e} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + w \frac{\partial u_1}{\partial y} - e, \\
 u_0 \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^s c_\mu \frac{k^2}{e} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \frac{e}{k} \left( c_1 w \frac{\partial u_1}{\partial y} - c_2 e \right), & (1) \\
 u_0 \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^s c_s \frac{k^2}{e} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{e}{k} c_{f1} w + c_{f2} k \frac{\partial u_1}{\partial y} - s c_s \frac{k^2}{e} \frac{w}{y^2}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $u_0$  — скорость набегающего потока;  $u_1$  — дефект скорости;  $k$  — кинетическая энергия турбулентности;  $e$  — скорость диссипации кинетической энергии;  $w = \overline{u'v'}$  — напряжение Рейнольдса;  $c_\mu$ ,  $c_s$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_{f1}$ ,  $c_{f2}$  — эмпирические константы;  $s = 0$  в случае плоского течения и  $s = 1$  в случае осесимметричного течения. Далее скорость набегающего потока будем считать равной единице.

Для системы (1) необходимо определить допускаемые дифференциальные операторы точечных групп преобразований, что позволит перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 07-01-00489-а, 07-01-00363-а).

**1. Автономные решения.** Ниже приведены результаты группового анализа модели, выполненного по стандартной схеме [11, 12].

**Лемма.** Система (1) допускает два оператора растяжения:

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - 2k \frac{\partial}{\partial k} - 3e \frac{\partial}{\partial e} - 2w \frac{\partial}{\partial w}; \quad (2)$$

$$Y_1 = y \frac{\partial}{\partial y} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + 2k \frac{\partial}{\partial k} + 2e \frac{\partial}{\partial e} + 2w \frac{\partial}{\partial w} \quad (3)$$

и три оператора переноса по  $x, y, u_1$  в случае плоского течения. В случае осесимметричного течения перенос по  $y$  не допускается.

Кроме того, система (1) инвариантна относительно преобразования

$$y \rightarrow -y, \quad w \rightarrow -w.$$

Проинтегрировав первое уравнение системы (1) по  $y$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим закон сохранения

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1 y^s dy = \text{const} \quad (4)$$

с учетом того, что  $y^s w \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ . Следует отметить, что вне турбулентного следа  $w = 0$ .

Запишем следующую линейную комбинацию операторов (2), (3):

$$Z = x \partial_x + \alpha y \partial_y + (\alpha - 1)u_1 \partial_{u_1} + (2\alpha - 2)k \partial_k + (2\alpha - 3)e \partial_e + (2\alpha - 2)w \partial_w. \quad (5)$$

Тогда решение системы (1), инвариантное относительно оператора (5), имеет вид

$$u_1 = x^{(\alpha-1)}U(t), \quad k = x^{(2\alpha-2)}K(t), \quad e = x^{(2\alpha-3)}E(t), \quad w = x^{(2\alpha-2)}W(t), \quad (6)$$

где  $t = y/x^\alpha$  — автомодельная переменная.

Подставляя представление (6) в (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} W' &= -\frac{sW}{t} + \alpha t U' - (\alpha - 1)U, \\ K'' &= \frac{2(\alpha - 1)EK - \alpha t EK' - EWU' + E^2}{c_\mu K^2} + K' \left( \frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} - \frac{s}{t} \right), \\ E'' &= \frac{(2\alpha - 3)E^2 K - \alpha t E K E' - c_1 E^2 W U' + c_2 E^3}{c_\mu K^3} + E' \left( \frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} - \frac{s}{t} \right), \\ W'' &= \frac{2(\alpha - 1)EW - \alpha t EW'}{c_s K^2} + \frac{c_{f1} E^2 W - c_{f2} EK^2 U'}{c_s K^3} + W' \left( \frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} - \frac{s}{t} \right) + \frac{sW}{t^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу закона сохранения (4) и представления (6) для функции  $u_1$  получаем  $\alpha = 1/2$  в случае плоского течения и  $\alpha = 1/3$  в случае осесимметричного течения. Значит, автомодельная переменная  $t$  равна  $y/x^{1/2}$  или  $y/x^{1/3}$  в зависимости от вида симметрии задачи. Следует отметить, что такая автомодельность подтверждается экспериментальными данными [3].

Используя первое уравнение системы (7), находим первый интеграл:

— в случае плоского течения

$$W + \alpha t U = b_1, \quad b_1 \in \mathbb{R}; \quad (8)$$

— в случае осесимметричного течения

$$Wt + \alpha t^2 U = b_2, \quad b_2 \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Система (7) должна удовлетворять условиям

$$W(0) = 0, \quad U'(0) = K'(0) = E'(0) = 0; \quad (10)$$

$$U(1) = K(1) = E(1) = W(1) = 0. \quad (11)$$

В условии (10) учитывается симметрия течения относительно оси  $OY$ . Краевые условия (11) означают, что вне турбулентного следа все функции равны нулю.

Отметим, что система (7) допускает оператор растяжения

$$T = t \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial U} + 2K \frac{\partial}{\partial K} + 2E \frac{\partial}{\partial E} + 2W \frac{\partial}{\partial W},$$

поэтому условия (11) можно заменить на аналогичные в любой другой точке, например в точке  $a = 0,4$ .

Используя краевые условия (10), (11), несложно показать, что в интегралах (8), (9) константы  $b_1, b_2$  равны нулю.

Первый интеграл позволяет исключить функцию  $W$  из системы (7) и получить систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$U'' = \frac{(\alpha - 2)EU - \alpha tEU'}{c_s K^2} + \frac{c_{f1}E^2U}{c_s K^3} + \frac{c_{f2}EU'}{c_s \alpha t K} - \frac{(s + 2)U'}{t} + \left( \frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} \right) \left( U' + \frac{U}{t} \right),$$

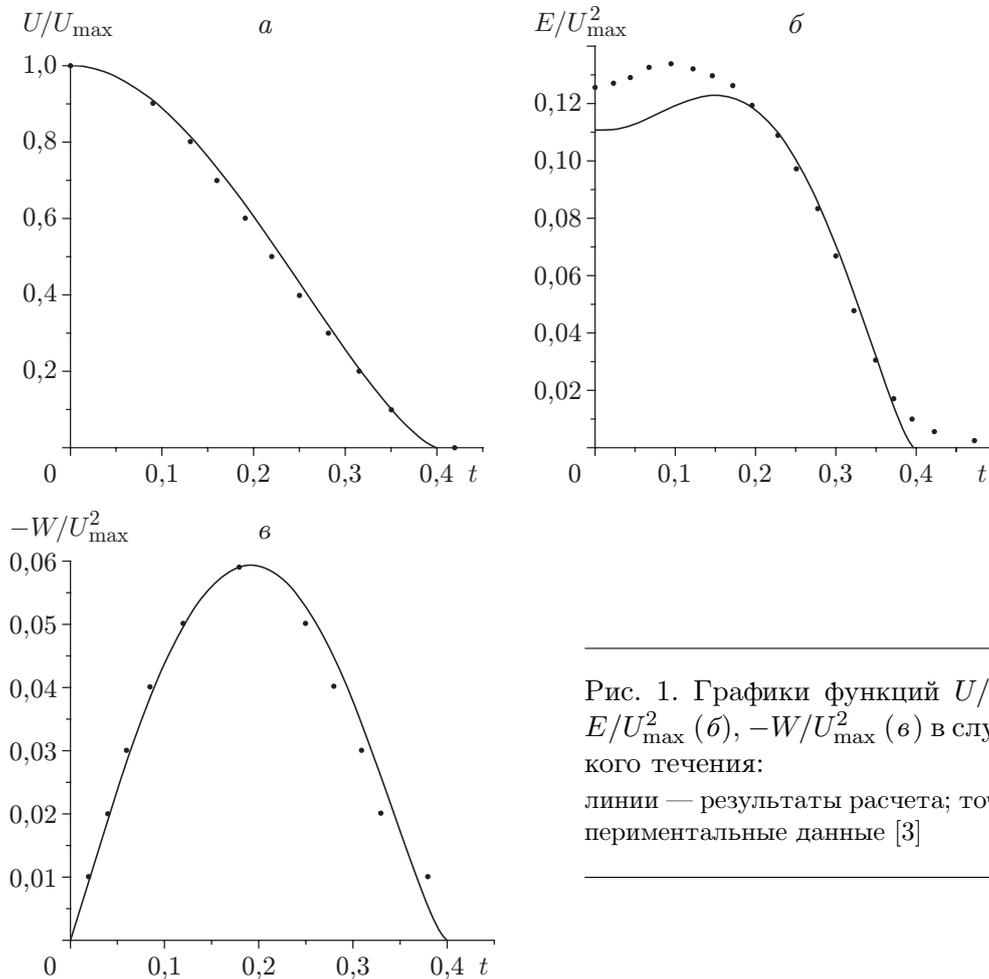


Рис. 1. Графики функций  $U/U_{\max}$  (а),  $E/U_{\max}^2$  (б),  $-W/U_{\max}^2$  (в) в случае плоского течения:

линии — результаты расчета; точки — экспериментальные данные [3]

$$K'' = \frac{2(\alpha - 1)EK + \alpha tE(UU' - K') + E^2}{c_\mu K^2} + K' \left( \frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} - \frac{s}{t} \right), \quad (12)$$

$$E'' = \frac{(2\alpha - 3)E^2K - \alpha tEK E' + c_1 \alpha t E^2 UU' + c_2 E^3}{c_\mu K^3} + E' \left( \frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} - \frac{s}{t} \right).$$

Остальные краевые условия имеют вид

$$U'(0) = K'(0) = E'(0) = U(1) = K(1) = E(1) = 0. \quad (13)$$

**2. Результаты расчетов.** Система (12), удовлетворяющая условиям (13), решалась численно. Использовались следующие эмпирические константы:  $c_\mu = 0,09$ ,  $c_1 = 1,44$ ,  $c_2 = 1,92$ ,  $c_s = 0,09$ ,  $c_{f1} = 2,8$ ,  $c_{f2} = c_\mu c_{f1}$ . Дополнительные трудности обусловлены тем, что при  $t = 0, 1$  коэффициенты системы (12) имеют особенности. Задача решалась с использованием модифицированного метода стрельбы и асимптотического разложения решения в окрестности особой точки [13].

Зависимости  $U/U_{\max}$ ,  $E/U_{\max}^2$ ,  $-W/U_{\max}^2$  от автомодельной переменной в случае плоского течения приведены на рис. 1. На рис. 2 показан профиль турбулентной вязкости  $\nu_t = c_\mu K^2/E$ . Результаты решения задачи в случае осесимметричного течения представлены на рис. 3. В краевых условиях (13) вместо значения  $t = 1$  взято значение  $t = 0,4$ .

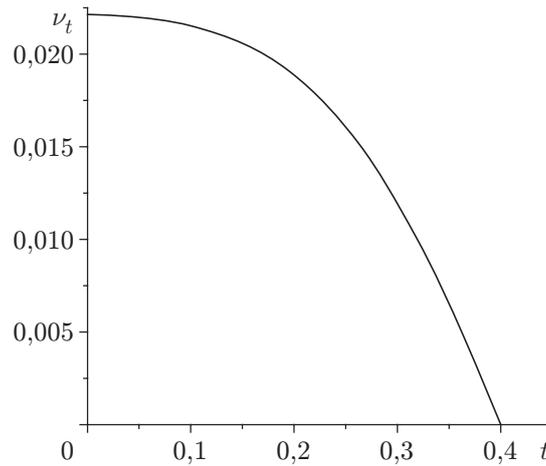


Рис. 2. Профиль турбулентной вязкости в случае плоского течения

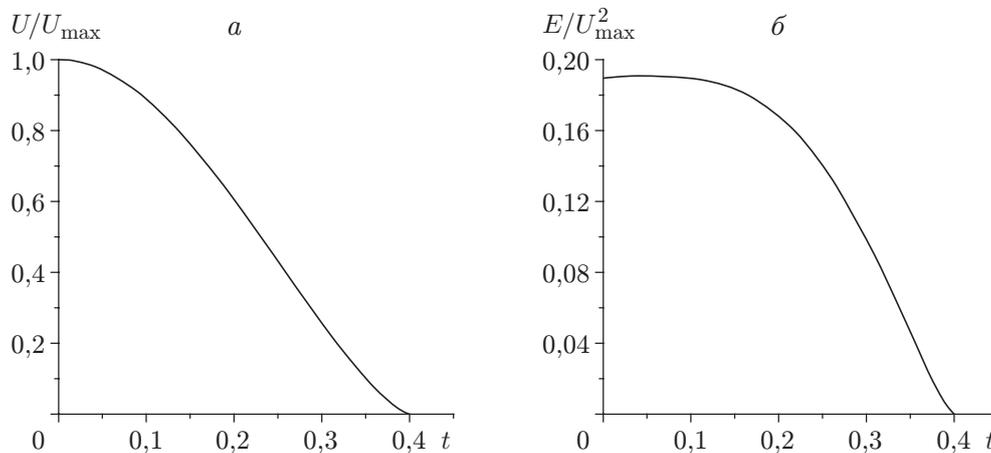


Рис. 3. Графики функций  $U/U_{\max}$  (а) и  $E/U_{\max}^2$  (б) в случае осесимметричного течения

В случае плоского течения распределения скорости и энергии турбулентности по параметру  $t$  удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [3].

Авторы выражают благодарность Г. Г. Черных за постановку задачи, предоставленные материалы и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М. О влиянии формы тела на характеристики автомодельного осесимметричного следа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 4. С. 804–807.
2. Черепанов П. Я., Дмитренко Ю. М. О влиянии формы тела на характеристики плоского автомодельного следа // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54, № 6. С. 912–919.
3. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.
4. Курбацкий А. Ф. Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
5. Черных Г. Г. Введение в численное моделирование свободных турбулентных течений: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1996.
6. Капцов О. В., Ефремов И. А. Инвариантные свойства модели дальнего турбулентного следа // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 6. С. 45–51.
7. Launder B. E., Morse A., Rodi W., Spalding D. B. Prediction of free shear flows. A comparison of the performance of six turbulence models // Proc. of the conf. "Free turbulent shear flows". S. 1., 1973. V. 1. P. 361–422.
8. Hanjalic K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. P. 609–638.
9. Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдера. М.: Мир, 1980.
10. Гребенев В. Н. Применение метода эквипотенциалей в задачах гидродинамики свободных турбулентных течений и фильтрации: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 2004.
11. Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1966.
12. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
13. Капцов О. В., Шанько Ю. В. Семейство автомодельных решений одной модели дальнего турбулентного следа // Тр. Междунар. конф. "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании", Павлодар (Казахстан), 20–22 сент. 2006 г. Павлодар: Б. и., 2006. С. 576–579.

*Поступила в редакцию 3/IV 2007 г.,  
в окончательном варианте — 14/V 2007 г.*