

К ОПИСАНИЮ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ

Г. И. Брызгалин (Новосибирск)

Деформационные свойства стеклопластиков изучались рядом исследователей; результаты экспериментов, представленные в работах [1-5], позволяют считать, что при кратковременном воздействии нагрузок стеклопластик с двумя взаимноперпендикулярными направлениями армирования ведет себя как упруго-ортотропное тело. Однако при длительной работе материала появляются значительные деформации ползучести и схема упругого тела становится непригодной. В работе [6] решена задача о ползучести пластинки из стеклопластика, который рассматривается как упруго-ортотропное тело со сдвиговой ползучестью. Ниже приводятся результаты экспериментов, обосновывающие такую модель, и предлагается способ получения необходимых постоянных и функций.

Обозначения

x, y — взаимно перпендикулярные направления армирования материала или главные оси анизотропии модели,	E_φ — оператор упругости с последним действием [8] в направлении φ ,
φ — угол между некоторым направлением в плоскости и положительным направлением оси x ,	h_1, h_2 — поперечные деформации образцов материала, вырезанных вдоль осей x и y ,
$e_1, e_2, \varepsilon_\varphi$ — продольные деформации образцов материала, вырезанных вдоль осей x, y и под углом φ ,	ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона модели при простом растяжении вдоль осей x и y ,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_\varphi$ — аналогичные величины для модели,	G — оператор сдвига модели для осей x, y, t — время в час.,
E_1, E_2 — модули упругости модели в направлениях x и y ,	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — общепринятые обозначения для деформаций и напряжений модели.

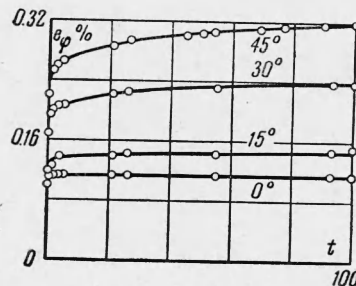
Значком \circ будем обозначать мгновенные (упругие) составляющие деформаций, а значком c — временные (ползучие) составляющие, так, например, $e_1(t) = e_1^\circ + e_1^c(t)$.

1. Испытания проведены на машинах, описанных в статье [7] при постоянной температуре 30°C ($\pm 1.5^\circ\text{C}$). Материал — стеклопластик АГ-4с с одинаковым числом слоев в двух взаимно перпендикулярных направлениях армирования, поставленный в виде плит, квадратных в плане (сторона квадрата 250 мм, толщина плит от 3 до 4.5 мм). Образцы в форме полосок (25×230 мм) вырезались под разными углами к направлениям армирования и испытывались на ползучесть при простом растяжении с постоянными и ступенчато меняющимися нагрузками. Термической обработки материала не производилось, прогрев в установке перед испытанием длился 2—3 часа. Продольные деформации замерялись микронными и двухмикронными индикаторами (иногда соточными) на базе 100 мм. Поперечные деформации измерялись на базе 25 мм пневмодатчиками, протарированными при помощи микронного индикатора; чувствительность пневмодатчиков — 0.1 мк.

Длительность испытаний — не менее 70 час, а нагружение производилось в течение 3—5 сек, это позволяет разделить мгновенные и ползучие деформации. Для испытанного материала в выбранной области напряжений ($1-4$ кг/мм²) характерен значительный разброс результатов, в связи с чем количественное сравнение будет производиться для образцов, вырезанных из одной и той же плиты.

Для выяснения характера анизотропии деформаций ползучести было испытано 15 образцов из четырех плит при постоянной нагрузке ($\sigma = 3$ кг/мм²). Каждая плита разрезалась веером на четыре образца, продольные оси которых составляли $0, 15, 30$ и 45° к оси x . Экспериментальные кривые деформация-время полученные при постоянной нагрузке ($\sigma = 3$ кг/мм²) для образцов, вырезанных из одной плиты под разными углами ($0, 15, 30, 45^\circ$) к одному из направлений армирования, представлены на фиг. 1.

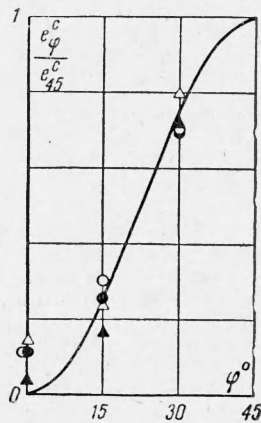
Для временных деформаций анизотропия оказывается еще более резкой, чем для мгновенных. При $\varphi = 45^\circ$ деформации ползучести e_{45}^c значительны и кривая деформирования хорошо аппроксимируется функцией вида $a + bt^n$, где a, b, n — постоян-



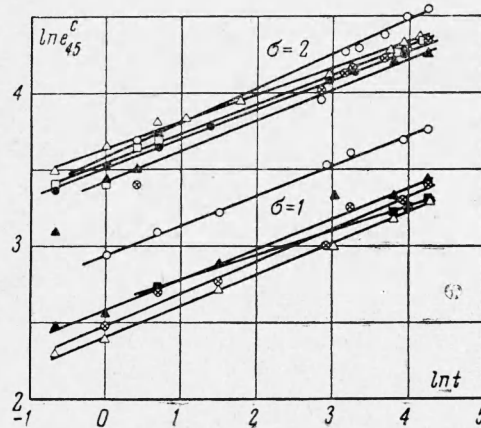
Фиг. 1

ные. При $\varphi = 0^\circ$ ползучесть существенно меньше и по истечении некоторого времени практически прекращается, это объясняется тем, что напряжения в связующем релаксируют и нагрузка целиком передается на стеклонити, которые при нормальных температурах не ползут.

Зависимость деформаций ползучести от ориентации образцов для всех четырех плит представлена на фиг. 2. По оси ординат откладывались отношения e_φ^c/e_{45}^c при $t = t_0 = 100$ для образцов из одной и той же плиты (экспериментальные точки одинаковые),

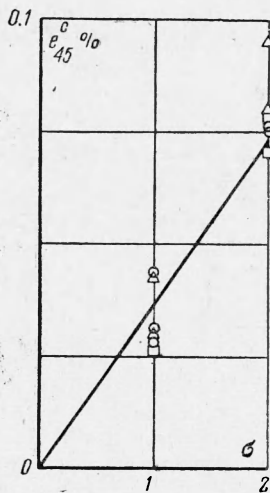


Фиг. 2



Фиг. 3

по оси абсцисс — углы φ (для одной из плит $t_0 = 70$); кривая — график функции $\sin^2 2\varphi$; как будет показано ниже, экспериментальные точки должны ложиться на эту кривую, если материал ортотропен и обладает ползучестью только за счет сдвигов по главным площадкам анизотропии. В данном случае точки систематически отклоняются от кривой при $\varphi = 0^\circ$, но это отклонение невелико.



Фиг. 4

Для нахождения зависимости деформаций ползучести от напряжения и времени ($\varphi = 45^\circ$) проведены испытания при постоянных нагрузках в диапазоне напряжений от 1 до 4 кг/мм² длительностью 70 час. В работе представлены только те эксперименты, в которых при разных напряжениях испытывались соседние образцы, вырезанные из одной плиты. На фиг. 3 построены логарифмы деформаций ползучести в функции от логарифмов времени для двух постоянных нагрузок ($\sigma = 1$ кг/мм² и $\sigma = 2$ кг/мм²); интервал времени от 0.5 до 70 час. Экспериментальные точки в большинстве случаев хорошо ложатся на прямые, наклон которых примерно одинаков, это означает, что деформации ползучести являются степенными функциями времени и кривые деформация-время для разных напряжений подобны. Показатель степени n близок к 0.20.

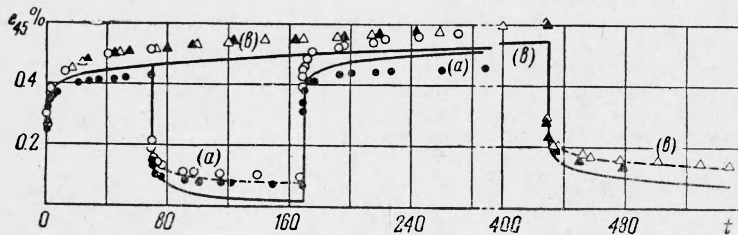
По результатам этих же испытаний для момента времени $t = 70$ на фиг. 4 построена зависимость деформаций ползучести от напряжения при постоянной нагрузке (точки — эксперимент, прямая — аппроксимация). Эта зависимость нелинейна, однако линейная аппроксимация не дает большой погрешности. Если привлечь все проведенные эксперименты, то это утверждение можно считать верным при полученном разбросе для $\sigma \leq 3$ кг/мм². Зависимость деформаций ползучести от времени остается неизменной для всего диапазона испытаний.

При выборе теории ползучести, описывающей поведение материала в случае переменных напряжений, весьма показательными будут эксперименты со ступенчато меняющимися нагрузками. Два образца из разных плит ($\varphi = 45^\circ$) были испытаны по следующей программе:

$$\begin{aligned} \sigma = 4 \text{ кг/мм}^2 & \text{ при } 0 < t < 70, & \sigma = 0 & \text{ при } 70 < t < 170 \\ \sigma = 4 \text{ кг/мм}^2 & \text{ при } 170 < t < 300 \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Зависимость полных деформаций от времени при ступенчато меняющихся нагрузках (программы (а) и (в)) представлены на фиг. 5. На отрезке времени $[0, 70]$ проведена осредняющая кривая, которая описывается выражением (деформация в процентах)

$$e_{45}(t) = 0.275 + 0.081 \cdot t^{0.2} \equiv f(t)$$



Фиг. 5

На следующих двух участках теоретическая кривая (сплошная линия) строилась при помощи последнего равенства и принципа наложения

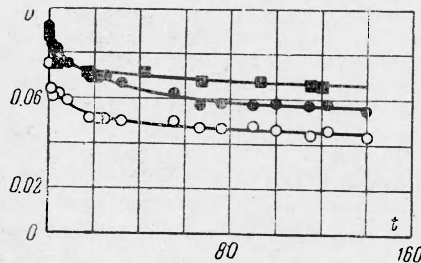
$$e_{45}(t) = f(t) - f(t - 70) \quad \text{для } 70 < t < 170$$

$$e_{45}(t) = f(t) - f(t - 70) + f(t - 170) \quad \text{для } 170 < t < 300$$

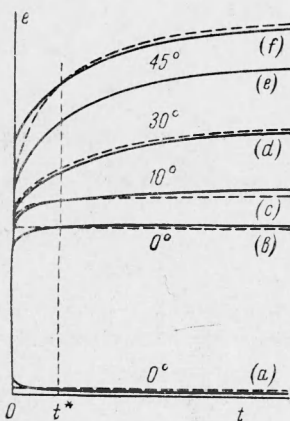
Материал удовлетворительно подчиняется принципу наложения (теории наследственности). Лучшего совпадения расчетных и экспериментальных данных можно достичь способом, изложенным в [9], — штриховая кривая на фиг. 5; на третьем участке данной программы обе кривые практически совпадают.

При расчете предполагалось, что зависимость $e_{45}(t) = f(t)$ остается неизменной (для $\sigma = \text{const}$) на отрезке времени, существенно большем 70 час, поэтому были испытаны еще два образца из тех же плит (треугольнички на фиг. 5) по такой программе

$$\sigma = 4 \text{ кг/мм}^2 \quad \text{при } 0 < t < 430, \quad \sigma = 0 \quad \text{при } 430 < t < 550 \quad (\text{в})$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Выберем момент времени t^* , после которого изменения деформаций при $\sigma = \text{const}$ и $\varphi = 0^\circ$ становятся незначительными, и заменим кривую ползучести $e_1 = e_1(t)$ прямой, проходящей через точку $[t^*, e_1(t^*)]$ параллельно оси времени. Такая операция иллюстрируется на фиг. 7 в, где сплошная линия — схематическая кривая ползучести, а штриховая — ее аппроксимация. Аналогично можно поступить и для $\varphi = 90^\circ$; поведе-

Мгновенные деформации оказались несколько большими, а временные — весьма близкими к функции $0.081 \cdot t^{0.2}$; при возврате картина примерно та же, что и для первых двух образцов.

Чтобы выяснить характер изменения поперечных деформаций при продольной нагрузке, из одной плиты были вырезаны образцы вдоль направления армирования и испытаны при постоянной нагрузке $\sigma = 3 \text{ кг/мм}^2$ с замером продольных и поперечных деформаций; отношения полных поперечных деформаций к полным продольным дали значения функции $\nu(t)$, соответствующей коэффициенту Пуассона в условиях ползучести; экспериментальные кривые для $\nu(t)$ изображены на фиг. 6, они примечательны малыми значениями коэффициента Пуассона и быстрым затуханием скорости изменения функции $\nu(t)$.

2. Используя полученные экспериментальные данные, построим модель стеклопластика так, чтобы уравнения содержали один оператор и в условиях ползучести деформации были близки к деформациям реального материала. Ограничимся случаем плоского напряженного состояния и постоянной температурой.

ние функции $v(t)$ позволяет сделать то же самое и с поперечными деформациями (см. фиг. 7а). Такие замены искажат деформационные свойства и в других направлениях, поэтому далее производится более детальное построение модели и сравнение ее свойств с поведением реального материала.

Полагаем, что модель обладает следующими свойствами:

А) При постоянных напряжениях полные деформации модели вдоль главных направлений анизотропии равны полным деформациям материала в некоторый момент времени t^* , достаточно удаленный от момента нагружения.

В) Мгновенные и ползучие деформации образцов, вырезанных под углом 45° к направлениям армирования, для материала и модели совпадают.

С) В общем случае связь между напряжениями и деформациями модели в главных осях анизотропии определяется равенствами [6]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_y, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y \quad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \mathbf{G}^{-1} \tau_{xy} = (G^\circ)^{-1} \tau_{xy} + (G^\circ)^{-1} \int_0^t G^{-1} (t - \theta) \tau_{xy}(\theta) d\theta$$

Пользуясь условием С), можно доказать, что в новых осях координат x^1, y^1 , повернутых в плоскости xy на некоторый угол φ относительно оси x , формулы связи между напряжениями и деформациями записываются внешне почти так же, как и в случае упруго-ортотропного тела. Отличие от формул анизотропной упругости (см., например, (9,9), (9,10) работы [10]) состоит в том, что постоянную G следует заменить оператором \mathbf{G} . За основные эксперименты выбираем следующие.

1) Ползучесть при постоянном напряжении σ образцов, вырезанных вдоль оси x , с замером продольных $e_1(t)$ и поперечных $h_1(t)$ деформаций.

2) Ползучесть при постоянном напряжении σ образцов, вырезанных вдоль оси y , с замером продольных $e_2(t)$ и поперечных $h_2(t)$ деформаций.

3) Ползучесть при постоянных напряжениях образцов, вырезанных при $\varphi = 45^\circ$, с замером продольных деформаций $e_{45}(t)$.

Пользуясь этими экспериментами и свойствами модели, постулированными в А), В), С), определим постоянные и оператор в равенствах (1).

Из испытания 1) для момента времени t^* получим $e_1(t^*)$, $e_1^c(t^*)$, e_1^0 , а также $h_1(t^*)$, $h_1^c(t^*)$, h_1^0 . При помощи условия А) найдем полные (они же упругие) деформации модели

$$\varepsilon_1 = e_1(t^*), \quad \chi_1 = h_1(t^*) \quad (2)$$

Полагая в равенствах (1)

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \varepsilon_x = e_1(t^*), \quad \varepsilon_y = h_1(t^*)$$

имеем

$$E_1 = \frac{\sigma}{e_1(t^*)}, \quad \nu_1 = -\frac{h_1(t^*)}{e_1(t^*)}$$

Из испытаний 2) и условия А) для e_2, χ_2, E_2, ν_2 получим аналогичные выражения, в которых индекс x заменен на y и 1 на 2.

В соответствии с замечанием относительно условия С), для оператора, определяющего свойства модели в направлении под углом φ , имеем равенство

$$E_\varphi^{-1} = \frac{\cos^4 \varphi}{E_1} + \frac{1}{4} \left(G^{-1} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 2\varphi + \frac{\sin^4 \varphi}{E_2}$$

Умножая обе части этого равенства на постоянное напряжение σ_φ , лежащее в пределах линейной зависимости $\varepsilon_\varphi - \sigma_\varphi$, перейдем к соответствующему равенству в деформациях

$$\varepsilon_\varphi(t) = \varepsilon_1 \cos \varphi + \frac{1}{4} [\gamma(t) + 2\chi_1] \sin^2 2\varphi + \varepsilon_2 \sin^4 \varphi \quad (3)$$

где $\varepsilon_\varphi(t) = E_\varphi \sigma_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + \varepsilon_\varphi^c(t)$, $\gamma(t) \equiv \gamma_{xy}(t) = \mathbf{G}^{-1} \sigma_\varphi = \gamma^0 + \gamma^c(t)$

Из правой части (3) видно, что зависимость временных деформаций от угла φ определяется функцией $\sin^2 2\varphi$. Разделяя мгновенные и временные деформации в (3) и полагая $\varphi = 45^\circ$, имеем

$$\varepsilon_{45}^0 = \frac{1}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\chi_1 + \gamma^0), \quad \varepsilon_{45}^c(t) = \frac{1}{4} \gamma^c(t) \quad (4)$$

Согласно условию В) $\varepsilon_{45}^0 = e_{45}^0$, $\varepsilon_{45}^c(t) = e_{45}^c(t)$, причем величины e_{45}^0 и $e_{45}^c(t)$

находятся при помощи основных экспериментов, так что используя (2) и (4), получим сдвиговые деформации модели при чистом сдвиге в главных осях анизотропии

$$\gamma^{\circ} = 4e_{45}^{\circ} - e_1(t^*) - e_2(t^*) - 2h_1(t^*), \quad \gamma^c(t) = 4e_{45}^c(t)$$

Пользуясь свойствами операторов Вольтерра [8], найдем

$$(G^{\circ})^{-1} = \frac{\gamma^{\circ}}{\sigma_{\varphi}}, \quad G^{-1}(t) = \frac{d}{dt} [\gamma^c(t)]$$

Таким образом, все искомые величины в равенствах (1) определены.

Привлекая экспериментальные данные и некоторые качественные соображения, сравним поведение материала и модели в некоторых простейших случаях деформирования. Расчет проведен для той из четырех плит, данные которой наиболее неблагоприятны для сравнения; приводим экспериментальные значения деформаций в процентах

$$e_1^{\circ} = 0.124, \quad e_1(10) = 0.139, \quad e_1(70) = 0.142 \\ e_{45}^{\circ} = 0.175, \quad e_{45}(70) = 0.290$$

Обозначим через $\Delta(t)$ разность между деформациями модели и материала, отнесенную к деформации материала. Пусть $t^* = 10$.

В случае простого растяжения вдоль направления армирования для продольных деформаций получаем

$$\Delta(0) < 13\%, \quad \Delta(10) = 0, \quad \Delta(70) \approx -2\%$$

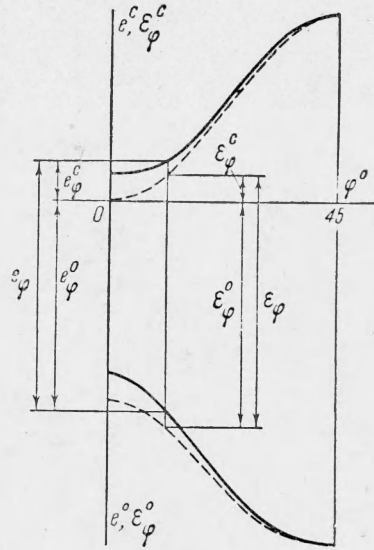
Поперечные деформации дают большие процентные отклонения, однако по абсолютной величине они незначительны в силу малости коэффициента Пуассона.

При чистом сдвиге, если считать свойства материала одинаковыми вдоль осей x и y , $\Delta(0) \approx -5\%$, $\Delta(t^*) \approx 0$ и далее с ростом t меняется незначительно.

На фиг. 8 дается качественное сравнение деформаций материала и модели (сплошные и штриховые линии соответственно) в зависимости от ориентации образцов. По оси абсцисс — угол φ в градусах; по оси ординат вниз — упругие деформации, вверх — деформации ползучести, накопленные к некоторому моменту времени $t \geq t^*$. Нижние кривые соответствуют обычной зависимости для деформаций упруго-ортотропного тела и различие их обусловлено только разными значениями мгновенных деформаций материала и модели вдоль главных направлений. Верхняя штриховая кривая есть график функции $\sin^2 2\varphi$ (см. (3)); верхняя сплошная кривая построена на основе экспериментальных данных (точки на фиг. 3). Расстояния по вертикали между сплошными линиями равны полным деформациям материала, между штриховыми — полным деформациям модели.

Развитие деформаций во времени при постоянном напряжении σ для материала и модели (сплошные и штриховые линии соответственно) качественно иллюстрируется на фиг. 7. Кривые (a) и (b) соответствуют поперечным (взятым по модулю) и продольным деформациям при простом растяжении; ползучесть модели отсутствует; кривые (c) соответствуют деформированию при простом растяжении для образцов с малым углом φ , появляются некоторые деформации ползучести модели; для больших углов φ (кривые (d)) деформации модели и материала близки, а для $\varphi = 45^\circ$ (кривые (e)) — совпадают; кривые (f) — ползучесть при чистом сдвиге интенсивностью напряжений σ в главных осях анизотропии.

Таким образом, при постоянных напряжениях основное различие в поведении материала и модели наблюдается в начальный период после нагружения и обусловлено заменой экспериментальных кривых ползучести прямыми параллельными оси времени в случае $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$. Истинное распределение начальных напряжений и деформаций получим, решая упругую задачу с использованием постоянного материала (а не модели). Решение задачи ползучести для модели будет хорошо аппроксимировать состояние материала при $t \geq t^*$. При переменных напряжениях, если скорость их изменения достаточно мала, следует ожидать удовлетворительного совпадения в поведении материала и модели. Если в некоторый момент времени напряжение изменяется резко, то такое совпадение наступит с определенным запозданием.



Фиг. 8

Поведение модели при сложном нагружении определяется вполне однозначно равенствами (1), так как деформации ползучести по существу одномерны.

Заметим, что использование линейной теории наследственности (оператор G в (1)) не связано непосредственно с построением модели. В технических расчетах при плавно меняющихся нагрузках можно использовать более простые теории ползучести; наоборот, при резко меняющихся нагрузках, при высоких напряжениях можно использовать более точные нелинейные соотношения [11, 12, 9]. Такие упрощения или уточнения можно произвести соответствующей заменой последнего равенства в (1).

Автор благодарен Ю. Н. Работнову и Н. И. Малинину за ценные советы и помощь в работе.

Поступила 5 VIII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашкенази Е. К. Анизотропия механических свойств некоторых стеклопластиков. Л., 1961.
2. Жуков А. М., Вялухина С. Д. Механические свойства стеклопластика при комнатной температуре. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 4.
3. Гуревич Б. Г., Стреляев В. С. Исследование прочностных характеристик некоторых стеклопластиков. Пластич. массы, 1963, № 5.
4. Львов Б. С., Колтунов М. А., Кузнецов В. Н., Шпакowska Е. И. Физико-механические показатели стеклопластиков на основе полиэфирной смолы. Упругие постоянные стеклопластиков. Пластические массы, 1962, № 8.
5. Ломакин В. А., Огибалов П. М. О расчете стеклопластиков при высоком напряженном состоянии. Вестник МГУ, 1960, № 6.
6. Брызгалин Г. И. К расчету на ползучесть пластинок из стеклопластиков. ПМТФ, 1963, № 4.
7. Баев Л. В., Малинин Н. И., Работнов Ю. Н., Шубин И. А. Установка для испытаний пластмасс на ползучесть и релаксацию. Заводская лаборатория, 1962, № 4.
8. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, № 1.
9. Брызгалин Г. И. О ползучести при переменных напряжениях. ПМТФ, 1962, № 3.
10. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехтеоретиздат, 1957.
11. Розовский М. И. О нелинейных интегральных уравнениях ползучести бетонной цилиндрической оболочки, находящейся под внешним давлением. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 9.
12. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, 1948, № 10.

О САМОПРОИЗВОЛЬНОМ РАЗРУШЕНИИ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

П. О. Паишков

(Волгоград)

Деформирование хрупких и пластичных тел заканчивается образованием и развитием трещины, которая в некоторый момент становится неустойчивой, после чего разрушение приобретает самопроизвольный характер.

После работы Гриффитса обычно полагается, что самопроизвольное разрушение возможно, если

$$dW = dA \quad (1)$$

Здесь dW — изменение освобождающейся энергии упругой деформации тела при росте в нем трещины, dA — изменение поверхностной энергии, затрачиваемой на образование новых поверхностей растущей трещины.

Если dW меньше dA , то самопроизвольный рост трещины невозможен. Последующие опыты, однако, показали, что фактическая энергия, затрачиваемая на разрушение хрупких материалов, всегда больше поверхностной энергии. Это заставило предположить о вероятном наличии, даже при хрупком по внешним признакам разрушении, некоторой пластической деформации, сопровождающей движущуюся трещину. Теперь обычно принимается, что величина dA должна включать в себя, кроме поверхностной энергии, и энергию, затрачиваемую на пластическую деформацию.

В теории Гриффитса рассматривается тело в виде пластины бесконечно больших размеров при толщине, равной единице. Это позволило пренебрегать возмущениями в поле напряжений на контуре тела, где приложены внешние силы, и упростить задачу.