

УДК 539.376

ВЫПУЧИВАНИЕ СЖАТЫХ ПО ОСИ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ЦИРКОНИЕВОГО СПЛАВА В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ: ЭКСПЕРИМЕНТ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

С. Н. Коробейников, Н. Г. Торшенов, И. В. Любашевская,
А. Ю. Ларичкин, Е. В. Чунихина

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: korob@hydro.nsc.ru

Проведены экспериментальные исследования деформирования и выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек из циркониевого сплава $Zr_{2,5}Nb$ в условиях ползучести. Компьютерное моделирование с использованием пакета MSC.Marc 2012 проводилось путем пошагового интегрирования уравнений квазистатического деформирования тонких оболочек с помощью закона Нортона установившейся ползучести. В результате эксперимента и компьютерного моделирования установлено, что формы выпучивания являются комбинацией осесимметричных складок, расположенных либо вблизи одного торца, либо вблизи обоих торцов оболочки, и неосесимметричных форм выпучивания с образованием трех или четырех волн в окружном направлении. Проведено сравнение зависимостей осевых деформаций оболочек от времени, полученных в эксперименте и при компьютерном моделировании. Показано, что при больших значениях осевых сжимающих напряжений эти зависимости удовлетворительно согласуются. При меньших значениях этих напряжений различие теоретических и экспериментальных зависимостей более значительное.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, циркониевый сплав, выпучивание, ползучесть.

Введение. Известно, что для металлических изделий, нагружаемых при повышенных температурах, характерно явление ползучести. Это свойство проявляется в том, что при постоянных напряжениях материал изделий испытывает медленные (от нескольких минут до нескольких лет) квазистатические деформации. Основы теории ползучести и формулировки уравнений механики деформируемого твердого тела, учитывающие деформации ползучести, представлены, например, в [1–11].

В случае тонкостенных конструкций, находящихся в условиях преимущественно сжатия, при некоторых пороговых значениях времени деформации ползучести быстро возрастают и процесс деформирования теряет устойчивость, при этом наблюдаются быстрое изменение формы конструкций и потеря их несущей способности. Для того чтобы избежать

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12-08-00707, 13-01-00481, 11-08-00845) и в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект № 25.3).

катастрофических явлений такого рода, необходимо определить как критические времена, так и формы выпучивания сжатых тонкостенных конструкций в условиях ползучести.

Теория устойчивости упругих и упругопластических тел разработана достаточно полно (см., например, [5, 12–17]). В частности, из этой теории следует, что в случае действия “мертвых” нагрузок для исследования устойчивости равновесных состояний и квазистатических движений указанных тел можно ограничиться определением точек бифуркации фундаментального решения. В этих точках можно найти формы выпучивания рассматриваемых тел, определяющие их начальное закритическое деформирование. Однако при учете деформаций ползучести указанная выше теория устойчивости упругих и упругопластических тел не описывает выпучивание деформируемых тел в условиях ползучести. Постановки задач и критерии выпучивания деформируемых тел в условиях ползучести представлены в обзорных работах [9, 18–20]. Из этих работ следует, что при учете деформаций ползучести помимо традиционных механизмов потери устойчивости упругих тел надо рассматривать развитие начальных несовершенств формы этих тел, скорость роста которых при достижении критических значений времени существенно увеличивается. Следует отметить, что в настоящее время в общем случае еще не сформулирован критерий потери устойчивости для определения критических значений времени и форм выпучивания деформируемых тел в условиях ползучести по информации, содержащейся в фундаментальном решении. Однако для стержневых конструкций критерий такого типа получен еще в 1957 г. [21]. Формулировки этого критерия развиты (только для стержневых систем) в работах [13, 14, 22, 23]. В настоящее время для определения критических времен выпучивания тонкостенных сжатых конструкций в условиях ползучести проводится прямое моделирование их деформирования при действии различного типа возмущений с заданными пороговыми величинами деформаций, при достижении которых время деформирования считается критическим.

Круговые цилиндрические оболочки являются типичными силовыми нагруженными элементами конструкций, в частности эксплуатируемыми в ядерных реакторах при повышенной температуре. Известно, что величины критических нагрузок выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек зависят от несовершенств формы, неизбежных при их изготовлении [12, 16, 17]. При выпучивании таких оболочек в пределах упругого деформирования наличие малых начальных несовершенств геометрической формы может приводить к уменьшению критических значений нагрузок в несколько раз, а для оболочек, деформирующихся в условиях ползучести, может иметь место большой разброс критических значений времени при различных амплитудах и формах начальных несовершенств.

Результаты экспериментальных исследований, приведенные в [24–29], позволяют установить некоторые закономерности выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести. Во всех указанных работах отмечается наличие зависимости критического времени выпучивания от амплитуд начальных несовершенств формы оболочки: чем более существенно форма реальной оболочки отличается от формы идеальной круговой цилиндрической оболочки, тем меньше критическое время ее выпучивания. Однако форма выпучивания оболочки не является развитой формой ее начальных несовершенств: в процессе деформирования на стадии ползучести она постепенно изменяется и на некотором сравнительно малом интервале времени принимает окончательный вид [26, 28].

Большая серия экспериментов, описанных в [24], позволила выделить три характерных типа выпучивания оболочек в зависимости от параметра $\sigma_0 \equiv \sigma R / (Eh)$ (σ — осевое напряжение в центральном сечении оболочки; R — радиус срединной поверхности; h — толщина оболочки; E — модуль Юнга материала оболочки). При $\sigma_0 > 0,2$ оболочка выпучивается по обычному сценарию выпучивания упругих оболочек: происходит мгновенный хлопок и на оболочке появляются глубокие вмятины, соответствующие форме ее выпу-

чивания. При $0,11 \leq \sigma_0 \leq 0,20$ реализуется переходная (от формы выпучивания упругой оболочки к форме выпучивания стержня в условиях ползучести) форма выпучивания: прогибы медленно увеличиваются, затем в некоторый момент времени происходит хлопок, характерный для выпучивания упругих оболочек. Наконец, при $\sigma_0 < 0,09$ происходит выпучивание оболочки по стандартному сценарию выпучивания сжатых стержней в условиях ползучести: сначала прогибы оболочки увеличиваются с почти постоянной скоростью, затем с ускорением, приводящим к катастрофическому (но достаточно медленному, без хлопка) выпучиванию оболочки.

В экспериментах, описанных в [24], происходит неосесимметричное выпучивание оболочек с образованием 9–12 волн в окружном направлении, в [25] также отмечено неосесимметричное выпучивание оболочек с образованием 6–9 волн в окружном направлении. Однако в экспериментах, результаты которых приведены в [26, 29] (см. также рис. 181, а в [3]), отмечается возможность осесимметричного выпучивания оболочек. В теоретических работах [30–33], посвященных исследованию осесимметричного выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек из упругого и упругопластического материалов, анализировался тип выпучивания, который не рассматривался в других работах, а именно: при осесимметричном выпучивании возможно нарушение симметрии деформирования оболочки относительно плоскости, проходящей через середину образующей оболочки перпендикулярно этой образующей (далее будем называть эту плоскость ортогональной), при этом в экспериментах фиксируется как образование складки вблизи одного из торцов оболочки, так и возникновение двух складок вблизи обоих торцов. Установлено, что для оболочки из упругого материала такой тип потери симметрии обусловлен бифуркацией фундаментального (симметричного) решения [32], а для оболочек из упругопластического материала несимметрия возникает вследствие достижения при деформировании оболочки точки сингулярности на интегральной кривой, которая одновременно является точкой поворота и точкой бифуркации симметричного решения [30, 31, 33]. В [34] приведены результаты экспериментальных исследований и компьютерного моделирования первоначально осесимметричной потери устойчивости сжатой по оси круговой цилиндрической оболочки из упругопластического материала с дальнейшим несимметричным относительно ортогональной плоскости выпучиванием (в закритическом режиме деформирования складка формировалась только вблизи одного из торцов). В экспериментах по выпучиванию оболочек в условиях ползучести такой тип потери устойчивости также зафиксирован: на рис. 181, а в [3] представлена симметричная относительно ортогональной плоскости форма выпучивания, а на рис. 9 в [26] показана несимметричная относительно ортогональной плоскости форма выпучивания. Одной из целей настоящей работы является выяснение возможности потери симметрии указанного типа при выпучивании сжатой по оси круговой цилиндрической оболочки в условиях ползучести. Если такая возможность реализуется, то следующая цель исследования состоит в определении закономерностей реализации симметричных и несимметричных относительно ортогональной плоскости форм выпучивания.

Компьютерное моделирование выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести проводится начиная с 70-х гг. XX в. Сначала при моделировании использовался метод конечных разностей [35–37], позднее — метод конечных элементов [26, 27, 38, 39]. В частности, в [36] получены все отмеченные в [24] типы выпучивания оболочек в условиях ползучести. Заметим, что в указанных работах стандартным способом решения задач о выпучивании сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести является определение их осесимметричного докритического деформирования, а при моделировании неосесимметричного выпучивания оболочек — представление решения в виде рядов тригонометрических функций окружной координаты. Еще одной целью настоящей работы является выяснение возможности применения

пакета MSC.Marc [40], в котором реализован метод конечных элементов, при моделировании деформирования и выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести с использованием конечных элементов оболочек [41] путем прямого решения уравнений квазистатического деформирования оболочек без каких-либо предположений о симметрии форм их деформирования.

В данной работе приведены результаты экспериментов по выпучиванию сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек из циркониевого сплава Zr2,5Nb в условиях ползучести при температуре, равной 730 °С. Выполнено компьютерное моделирование выпучивания таких оболочек. Проведено сравнение результатов компьютерного моделирования с результатами экспериментов.

1. Геометрически и физически нелинейные уравнения квазистатического деформирования твердых тел. При решении задач о деформировании тонкостенных конструкций в условиях преимущественно изгиба с учетом геометрической нелинейности процесса деформирования среди известных формулировок наиболее подходящей является общая лагранжева формулировка уравнений квазистатического (динамического) движения этих конструкций [5, 42]. Такой тип деформирования характеризуется малыми деформациями, при этом возможны большие перемещения и углы поворота. В общей лагранжевой формулировке уравнений механики деформируемого твердого тела в качестве отсчетной конфигурации выбирается начальная конфигурация тела, а в качестве тензоров напряжений и деформаций — второй тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа S и тензор деформации Грина — Лагранжа E . Приведем полную систему уравнений, описывающую деформирование тела при наличии геометрической нелинейности и деформаций ползучести, учет которых обуславливает физическую нелинейность.

1. Уравнение равновесия в слабой форме (уравнение баланса виртуальных работ) записывается следующим образом:

$$\int_V S : \delta E dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_T} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \hat{R}_c \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор перемещений; \mathbf{f} — вектор массовых сил (сил, действующих на единицу массы тела); V — область, занимаемая телом в отсчетной конфигурации; ρ — массовая плотность материала в отсчетной конфигурации; S — замкнутая поверхность, ограничивающая область V ; S_u, S_T — участки поверхности $S = S_u \cup S_T$ ($S_u \cap S_T = \emptyset$), на которых заданы векторы перемещений \mathbf{u} и напряжений $\mathbf{T} \equiv \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}$ соответственно:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{на } S_u, \quad \mathbf{N} \cdot (S + S \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{T}^* \quad \text{на } S_T;$$

второй тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа S выражается через тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$:

$$S \equiv J F^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot F^{-T}, \quad F \equiv g + \nabla \mathbf{u}^T, \quad J \equiv \det F,$$

g — единичный тензор; \mathbf{N} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_T ; $\nabla \mathbf{u}$ — тензор градиента перемещений; ∇ — набла-вектор, определяемый относительно начальной конфигурации тела [5]; индекс T обозначает операцию транспонирования тензора ($F^{-T} \equiv (F^{-1})^T = (F^T)^{-1}$), индекс “*” — заданную величину, точка между тензорами и (или) векторами — операцию их внутреннего произведения (свертки по одному индексу), знак “:” между тензорами — операцию их двойного внутреннего произведения (свертки по двум индексам), δ обозначает вариацию, поэтому $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ на S_u (граничные условия на поверхности S_u являются главными, а на S_T — естественными); \hat{R}_c — виртуальная

работа сосредоточенных сил R_i^k (индекс i может принимать значения 1, 2, 3, $k = \overline{1, K_c}$):

$$\hat{R}_c = \sum_{k=1}^{K_c} R_i^k \delta u_i^k$$

(по i суммирование не проводится), которая вводится непосредственно в уравнение равновесия (1); K_c — общее число сосредоточенных сил.

2. Кинематические соотношения имеют вид

$$E = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T).$$

3. Для достаточно широкого класса материалов, включающего материалы, обладающие свойствами ползучести, определяющие соотношения физически нелинейной среды, записанные в скоростях, имеют следующий вид:

$$\dot{S} = \mathbb{C} : \dot{E} + \Phi. \quad (2)$$

Здесь \mathbb{C} — тензор четвертого ранга, компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений и деформаций (и, возможно, их скоростей), внутренних параметров и обладают двумя минорными симметриями и главной симметрией:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij},$$

C_{ijkl} — компоненты тензора \mathbb{C} в декартовой системе координат (компоненты тензоров и векторов принимают значения 1, 2, 3); Φ — тензор второго ранга, характеризующий неоднородную составляющую закона (2), компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений S и деформаций E ; точка над величиной обозначает частную производную этой величины по времени t . Заметим, что ряд стандартных определяющих соотношений записывается в виде (2). Например, для упругих и упругопластических материалов тензор Φ надо приравнять к нулевому тензору.

Следует отметить, что пара тензоров напряжений и деформаций S, E является сопряженной по отношению к мощности внутренних сил w , отнесенной к единице объема деформируемого тела в отсчетной конфигурации, т. е. справедливо равенство $w = S : \dot{E}$ [5]. При малых деформациях тела и, возможно, больших перемещениях и углах поворота тензоры S и E имеют простую интерпретацию [5, 42]: компоненты этих тензоров приближенно равны компонентам тензоров $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\varepsilon}$, полученным из тензоров напряжений и деформаций Коши σ и ε преобразованием поворота (этот поворот совершает материальная частица при деформировании тела). Поэтому при малых деформациях тела большие углы поворота в определяющих соотношениях учитываются автоматически в результате замены пары тензоров σ, ε на пару тензоров S, E .

2. Уравнения квазистатического деформирования твердых тел, записанные в приращениях. Далее при использовании пошаговой процедуры интегрирования уравнений механики деформируемого твердого тела по времени из уравнений, представленных в п. 1, требуется получить уравнения квазистатического деформирования твердых тел, записанные в приращениях. Будем считать шаг по времени Δt достаточно малым. Предположим, что в момент времени t все искомые величины определены, т. е. уравнение (1) выполнено тождественно. Далее зависимость исследуемых функций от времени обозначается верхним индексом слева, например, величины ${}^t S$ и ${}^{t+\Delta t} S$ представляют собой второй тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа, определенный в моменты времени t и $t + \Delta t$ соответственно. Знак Δ перед величиной означает ее приращение с момента времени t до момента времени $t + \Delta t$, например: $\Delta S \equiv {}^{t+\Delta t} S - {}^t S$.

Рассматривая уравнение (1) в момент времени $t + \Delta t$ и вычитая из обеих частей этого уравнения член $\int_V {}^t S : \delta E dV$, получаем

$$\int_V \Delta S : \delta E dV = \int_V \rho^{t+\Delta t} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \\ + {}^{t+\Delta t} \hat{R}_c - \int_V {}^t S : \delta E dV \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u). \quad (3)$$

Линеаризуя определяющие соотношения (2) относительно момента времени t , имеем

$$\Delta S = {}^t \mathbb{C} : \Delta E + {}^t \Phi \Delta t. \quad (4)$$

Подставляя выражение для ΔS из (4) в левую часть равенства (3) и пренебрегая членами малого порядка, получаем линеаризованное уравнение в приращениях, следующее из принципа виртуальных работ (подробнее об этом см. [5, 42]):

$$\int_V \delta e : {}^t \mathbb{C} : e dV + \frac{1}{2} \int_V {}^t S : \delta [\nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T] dV = \int_V \rho^{t+\Delta t} \mathbf{f} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} dV + \\ + \int_{S_T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^* \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} dS + {}^{t+\Delta t} \hat{R}_c - \int_V ({}^t S + {}^t \Phi \Delta t) : \delta e dV \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{u}} \quad (\delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ на } S_u).$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{u}} \equiv \Delta \mathbf{u}, \quad e \equiv \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T + \nabla {}^t \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla {}^t \mathbf{u}^T).$$

3. Определяющие соотношения для упругого материала, учитывающие деформацию ползучести. Для первоначально изотропного упругого материала определяющие соотношения, учитывающие деформацию ползучести, можно записать в виде (см., например, [5])

$$\dot{S} = \mathbb{C}^E : (\dot{E} - \dot{E}^c), \quad (5)$$

где E^c — тензор деформаций ползучести, скорость изменения которого \dot{E}^c в общем случае зависит от компонент тензоров напряжений и деформаций, а также от времени t . Для каждого материала эта зависимость определяется на основе экспериментальных данных. Тензор четвертого порядка \mathbb{C} (тензор упругости) не зависит от времени t , но компоненты этого тензора в модели изотропного гиперупругого материала Кирхгофа — Сен-Венана [43] (для этой модели материала тензор упругости \mathbb{C} обозначим через \mathbb{C}^E) могут быть кусочно-постоянными функциями параметров Ламе λ и μ , которые можно выразить через две другие константы материала — модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Выражение для тензора четвертого порядка \mathbb{C}^E имеет вид

$$\mathbb{C}^E \equiv \lambda \mathbb{C}_I + \mu (\mathbb{C}_{II} + \mathbb{C}_{III}), \quad (6)$$

где $\mathbb{C}_I, \mathbb{C}_{II}, \mathbb{C}_{III}$ — базовые изомеры изотропного тензора четвертого порядка [5].

Из (6) получаем

$$\mathbb{C}^E : \dot{E} = \lambda(\text{tr } \dot{E})g + 2\mu\dot{E}, \quad \mathbb{C}^E : \dot{E}^c = 2\mu\dot{E}^c. \quad (7)$$

Член $\lambda(\text{tr } \dot{E}^c)g$ равен нулю вследствие предположения о несжимаемости материала при деформациях ползучести, т. е. о выполнении равенства $\text{tr } \dot{E}^c = 0$. Это предположение, являющееся стандартным при записи определяющих соотношений ползучести металлов, основано на данных экспериментов.

Используя вторую формулу в (7) и выполняя в (2) замену $\mathbb{C} = \mathbb{C}^E$, $\Phi = -2\mu\dot{E}^c$, запишем определяющие соотношения (5) в виде

$$\dot{S} = \mathbb{C}^E : \dot{E} - 2\mu\dot{E}^c.$$

Для определения скорости изменения составляющей тензора деформаций Грина — Лагранжа \dot{E}^c , характеризующей ползучесть материала, используем закон Нортона (см., например, [5])

$$\dot{E}^c = \gamma S', \quad S' \equiv S - \frac{1}{3}(\text{tr } S)g, \quad \gamma(S_e) = \frac{3}{2}BS_e^{n-1}, \quad S_e \equiv \sqrt{\frac{3}{2}\text{tr}((S')^2)},$$

где B , n — параметры, определяемые в эксперименте.

4. Экспериментальные исследования. В экспериментах исследовались оболочки из циркониевого сплава Zr2,5Nb. Образцы вытачивались из круглых труб с внутренним диаметром 80 мм и толщиной стенки 4 мм. Геометрические параметры и схема нагружения цилиндрических оболочек приведены на рис. 1, а. На рис. 1, б, в приведены геометрические параметры оболочек, исследуемых в экспериментах. Оболочки имели следующие размеры: толщина $h \approx 1$ мм, радиус срединной поверхности $R \approx 40,5$ мм, длина рабочей части: для “коротких” оболочек $L \approx 48$ мм (см. рис. 1, б), для “длинных” оболочек $L \approx 69$ мм (см. рис. 1, в).

Для уменьшения различия свойств ползучести материала вдоль образующей и в окружном направлении предварительно оболочки подвергались отжигу в течение 4 ч при постоянной температуре 550 °С без нагрузки. Затем оболочки деформировались в условиях ползучести при температуре 730 °С. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и константы ползучести циркониевого сплава определялись в зависимости от температуры

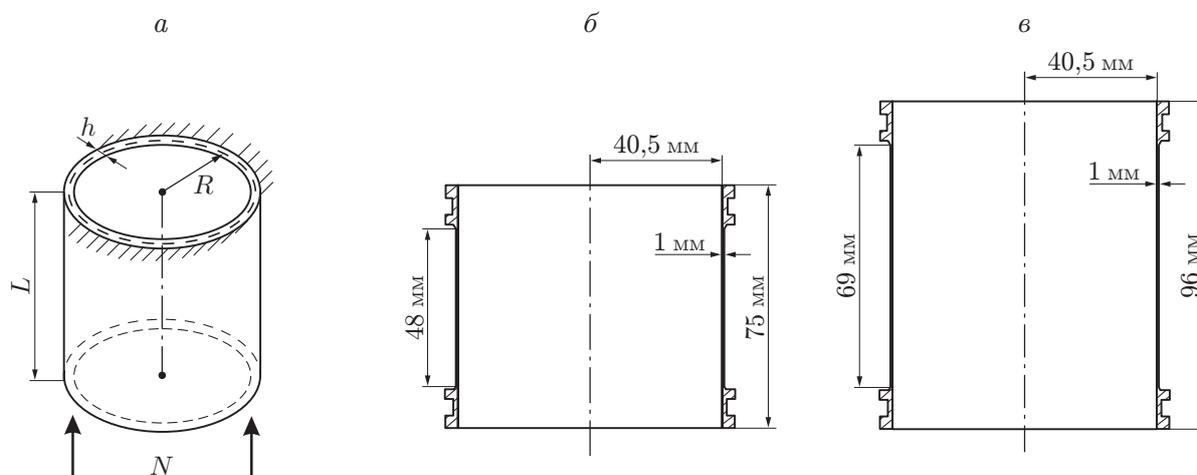


Рис. 1. Схемы круговых цилиндрических оболочек, сжатых по оси:

а — геометрические параметры и схема нагружения; б — “короткая” оболочка; в — “длинная” оболочка

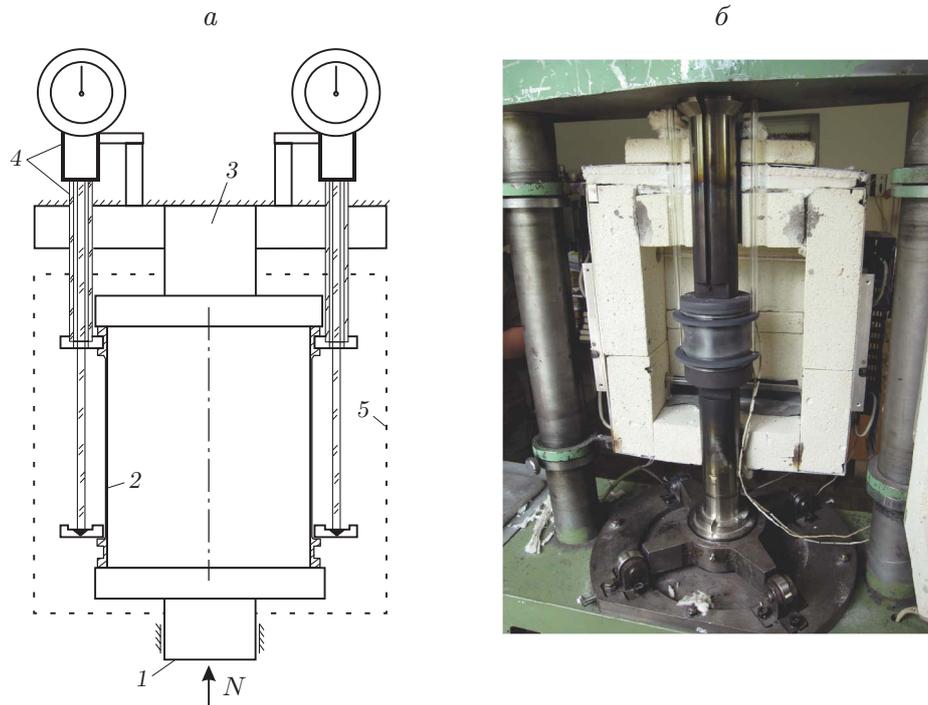


Рис. 2. Экспериментальная установка:

a — схема установки (1 — подвижный захват; 2 — оболочка, 3 — неподвижный захват, 4 — измерительная система, 5 — пространство внутри печи); *б* — установка с испытанным образцом

Таблица 1

Геометрические параметры оболочек и сжимающие напряжения в образцах

Номер образца	R , мм	L , мм	h , мм	L/R	R/h	σ , МПа
4	40,136	48,544	0,964	1,210	41,657	10,0
6	40,639	48,525	0,953	1,194	42,643	7,5
7	40,622	48,869	0,960	1,203	42,315	6,0
12	40,587	69,811	0,916	1,720	44,309	6,0
13	40,651	69,631	1,025	1,713	39,659	10,0
14	40,692	69,247	0,963	1,702	42,255	10,0

в соответствии с методикой, предложенной в [44]. При температуре 730 °С упругие деформации оболочек характеризуются следующими константами материала: модуль Юнга $E = 50$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$. Для материалов, из которых изготовлены “короткие” и “длинные” оболочки, константы ползучести B и n имеют разные значения: для “коротких” оболочек $B = 5,17 \cdot 10^{-8}$ (МПа) $^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$, $n = 2,75$; для “длинных” оболочек $B = 1,54 \cdot 10^{-9}$ (МПа) $^{-n} \cdot \text{с}^{-1}$, $n = 4,10$.

Как для “коротких”, так и для “длинных” оболочек эксперименты по деформированию в условиях ползучести проводились при действии постоянных во времени сил N , которым соответствуют значения сжимающего напряжения $\sigma = 6,0; 7,5; 10,0$ МПа. Эксперименты проводились на установке рычажного типа (рис. 2). Геометрические параметры испытанных образцов и соответствующие им сжимающие напряжения приведены в табл. 1.

На рис. 3 приведены зависимости относительного сжатия оболочки $\varepsilon \equiv U/L$ (U — осевое перемещение нагруженного торца оболочки) от времени t . Для всех оболочек ха-

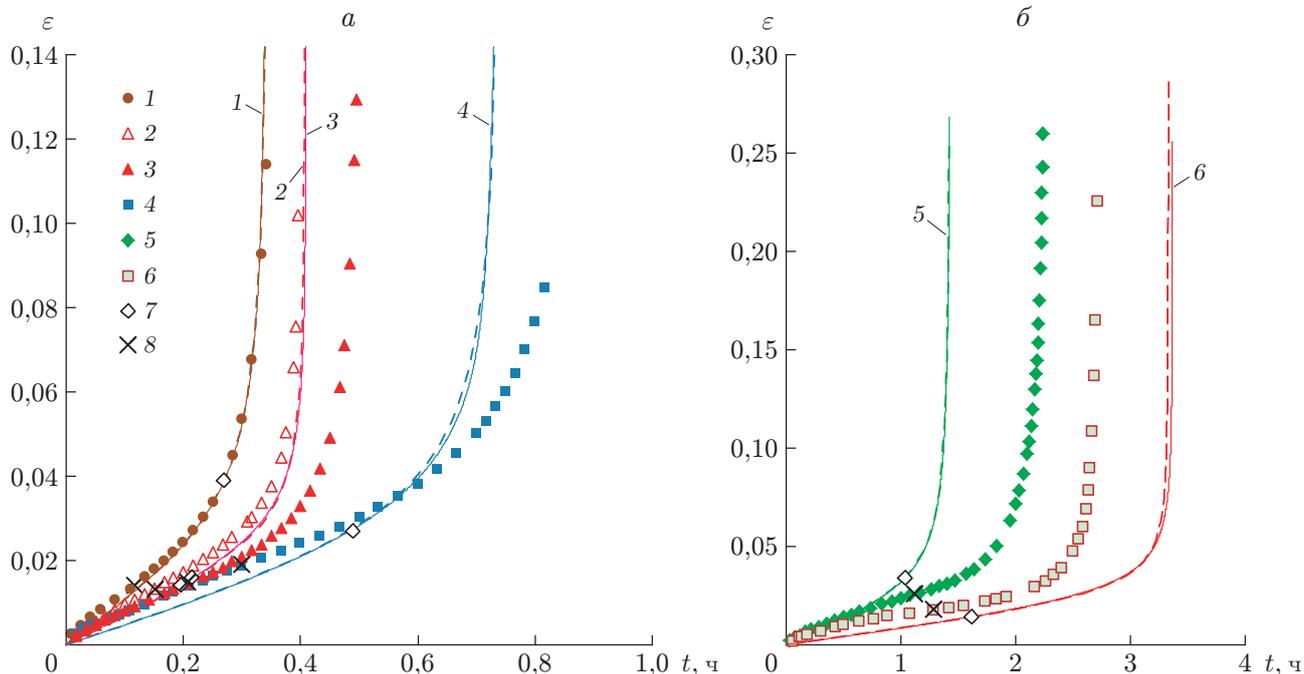


Рис. 3. Зависимость относительного сжатия оболочки ε от времени t :
 а — оболочки, к которым приложено осевое напряжение $\sigma = 10,0$ МПа (1–3) и $\sigma = 7,5$ МПа (4), б — оболочки, к которым приложено осевое напряжение $\sigma = 6,0$ МПа (5, 6); точки 1–6 — экспериментальные данные, линии 1–6 — результаты компьютерного моделирования (штриховые линии — осесимметричное деформирование, сплошные — неосесимметричное деформирование при воздействии возмущающих сил); 1 — образец 4, 2 — образец 14, 3 — образец 13, 4 — образец 6, 5 — образец 7, 6 — образец 12, 7 — точки бифуркации, полученные при компьютерном моделировании, 8 — точки, соответствующие моментам времени, в которые скорость изменения величины $\dot{\varepsilon}$ равна нулю

рактерна следующая картина деформирования: при мгновенном приложении осевой сжимающей силы вблизи торцов возникают две складки, расположенные симметрично относительно ортогональной плоскости, при этом оболочка деформируется упруго. Далее имеет место осесимметричное деформирование оболочки в условиях, близких к условиям установившейся ползучести, при этом обе складки вблизи торцов продолжают увеличиваться. Затем на участке установившейся ползучести происходит переход осесимметричной формы деформирования в неосесимметричную с образованием трех-четырёх волн в окружном направлении. Эксперименты заканчивались, когда скорость изменения величины ε во времени становилась достаточно большой по сравнению со скоростью изменения этой величины на стадии установившейся ползучести. При этом для некоторых оболочек процесс выпучивания сопровождался увеличением складки вблизи только одного из торцов оболочки (так же, как в экспериментах, результаты которых приведены на рис. 9 в [26]), для других оболочек этот процесс сопровождался увеличением складок вблизи обоих торцов.

Характеристики деформирования и выпучивания оболочек приведены в табл. 2 (t_* — моменты времени, в которые скорость изменения величины $\dot{\varepsilon}$ равна нулю (переход от отрицательных значений к положительным); t_{fin} — время окончания эксперимента; n_w — число волн в окружном направлении при неосесимметричном выпучивании оболочек). В последней графе табл. 2 указаны характеристики симметрии форм выпучивания оболочек относительно ортогональной плоскости. Из результатов, приведенных в табл. 2, следует, что при достаточно большой приложенной силе (соответствующей осевым напряжениям

Таблица 2

Характеристики деформирования и выпучивания оболочек, полученные в эксперименте

Номер образца	t_* , ч	t_{fin} , ч	n_w	Наличие симметрии
4	0,117	0,342	4	Да
6	0,300	0,833	4	Да
7	1,117	2,239	3–4	Нет сведений
12	1,283	2,717	3–4	Нет
13	0,208	0,496	4	Да
14	0,150	0,396	4	Нет

$\sigma = 10,0; 7,5$ МПа) выпучивание оболочки происходит с образованием четырех волн, при меньшем значении силы (соответствующем осевому напряжению $\sigma = 6,0$ МПа) имеют место смешанные формы с тремя-четырьмя волнами в окружном направлении оболочки. Эти закономерности образования волн не зависят от длины оболочек, в то же время для “коротких” оболочек характерны формы выпучивания, симметричные относительно ортогональной плоскости, а для “длинных” оболочек установлено, что при одном и том же значении сжимающего напряжения могут реализовываться как симметричные, так и несимметричные относительно ортогональной плоскости формы выпучивания. Деформированные конфигурации, полученные в конечные моменты времени t_{fin} , приведены на рис. 4, 5. По геометрическим и механическим параметрам оболочки 13, 14 подобны, выпучивание обеих оболочек происходило с образованием четырех волн в окружном направлении, однако форма выпучивания оболочки 14 несимметрична относительно ортогональной плоскости, в то время как форма выпучивания оболочки 13 симметрична.

Для оболочек, геометрические параметры которых приведены на рис. 1, при $\sigma = 10,0; 7,5; 6,0$ МПа параметр $\sigma_0 \equiv \sigma R/(Eh)$ принимает значения 0,008 10, 0,006 08, 0,004 86 соответственно. Выпучивание оболочек происходит в соответствии со сценарием, представленным в [24] для оболочек с $\sigma_0 < 0,09$: сначала происходит увеличение прогибов с почти постоянной скоростью, затем, начиная с момента времени t_* , наблюдается медленно развивающееся выпучивание оболочек.

5. Компьютерное моделирование. Компьютерное моделирование деформирования оболочек проводилось с использованием пакета MSC.Marc 2012 [40]. При конечно-элементном моделировании деформирования оболочек использовались изопараметрические конечные элементы оболочек типа элементов Ахмада [45]. Поскольку на движение торцов накладываются ограничения, при осесимметричном сжатии оболочки вследствие влияния краевого эффекта вблизи торцов образуются зоны сильного изгиба срединной поверхности оболочки. Подобные зоны возникают при выпучивании оболочки. При таком типе деформирования тонкостенных конструкций целесообразно использовать квадратичную аппроксимацию компонент вектора перемещений [42, 45]. Поэтому в настоящей работе конечно-элементная модель оболочки строилась с использованием изопараметрических восьмиузловых элементов оболочки, соответствующих биквадратичной интерполяции компонент вектора перемещений (тип элемента 22 в пакете MSC.Marc 2012 [41]).

При математическом моделировании в случае отсутствия заданных возмущений оболочки выпучиваются осесимметрично, при этом вблизи торцов образуются две складки. На торцах оболочки задавались граничные условия жесткой заделки (на нижнем торце оболочки кинематическое условие заданного перемещения по оси z заменено условием действия постоянной силы N , приложенной на жесткой контактной поверхности). При моделировании неосесимметричного выпучивания к оболочке прикладывались малые (0,06 Н) постоянные сосредоточенные силы, действующие в узлах срединной поверхности оболочки

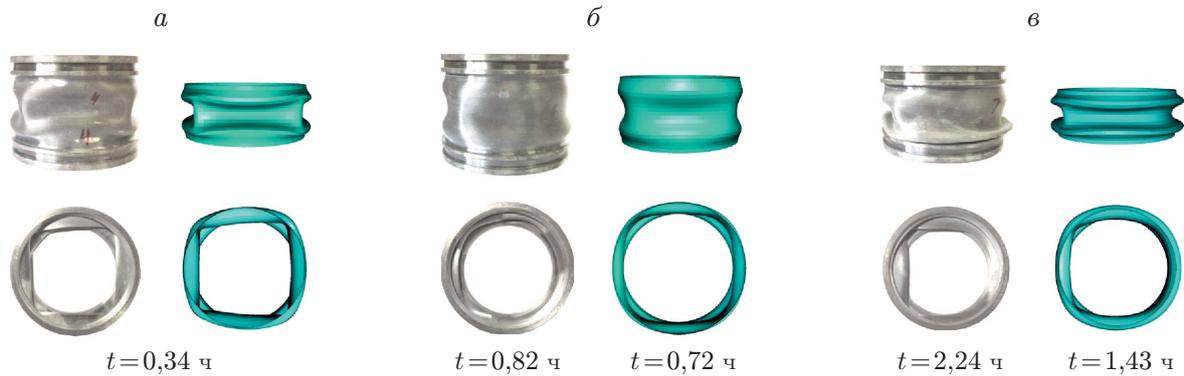


Рис. 4. Формы выпучивания “коротких” оболочек, полученные в эксперименте (слева) и при компьютерном моделировании (справа):

a — образец 4, *б* — образец 6, *в* — образец 7

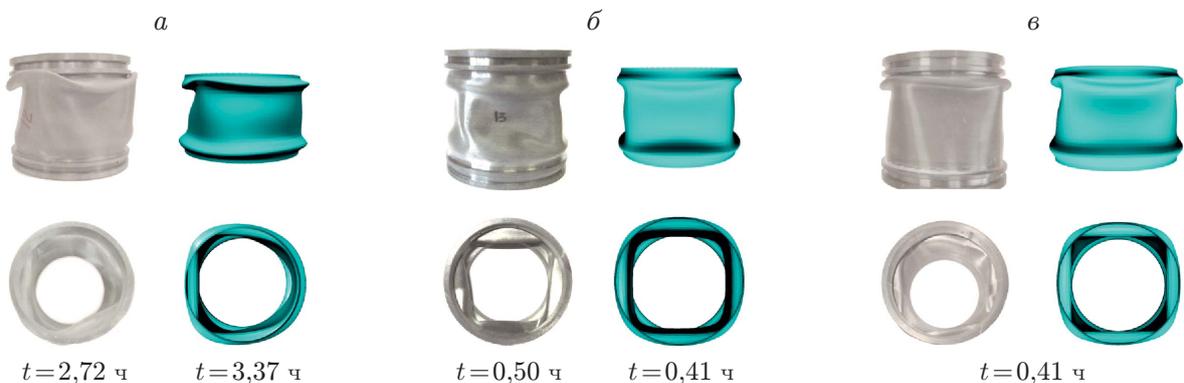


Рис. 5. Формы выпучивания “длинных” оболочек, полученные в эксперименте (слева) и при компьютерном моделировании (справа):

a — образец 12, *б* — образец 13, *в* — образец 14

и направленные по радиусу к ее центру. При наличии таких сил возможно появление форм выпучивания с числом волн в окружном направлении от одной до шести, соответствующим типам возмущающих сил 1, 2, ..., 6 (номер типа равен числу локальных площадок действия возмущающих сил, равномерно распределенных в окружном направлении). Кроме того, проверялась возможность несимметричного выпучивания оболочки относительно ортогональной плоскости. Для этого области приложения возмущающих сил, соответствующих формам выпучивания оболочки с тремя или четырьмя волнами в окружном направлении, смещаются относительно середины образующей оболочки к ее верхнему торцу (типы возмущающих сил 7 и 8). Чтобы специально не инициировать выпучивание оболочки по формам с тремя или четырьмя волнами в окружном направлении, рассматривались также возмущающие силы, соответствующие развитию одной волны в окружном направлении оболочки и смещенные относительно середины образующей оболочки к ее верхнему торцу (тип возмущающих сил 9). Возмущающие силы типов 3 и 7 приведены на рис. 6. Во всех расчетах при наличии возмущающих сил всех типов развивались только формы выпучивания с числом волн в окружном направлении от трех до пяти (подобно тому, что наблюдалось в эксперименте). По-видимому, формы выпучивания с тремя или четырьмя волнами в окружном направлении почти равновероятны. В экспериментах часто реализовывались смешанные формы выпучивания с 3–4 волнами в окружном направлении (см.

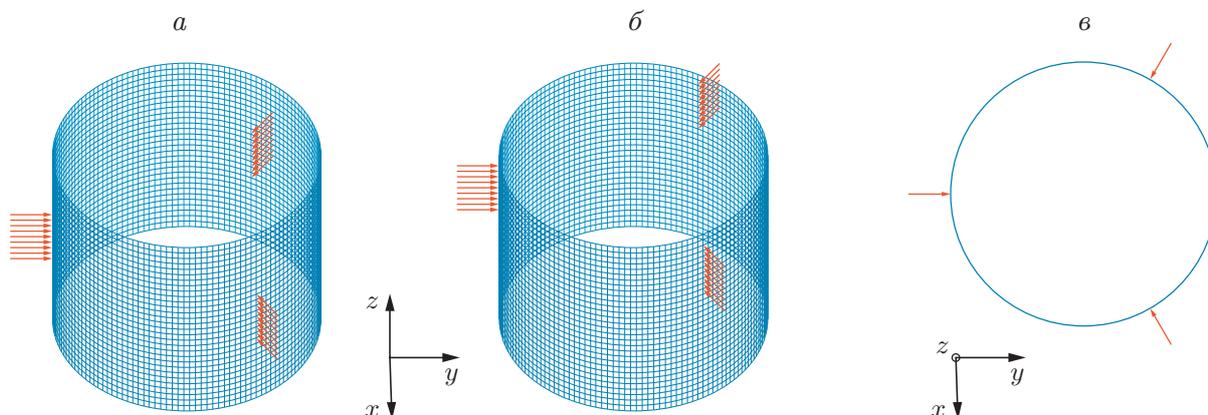


Рис. 6. Возмущающие силы типов 3 и 7, соответствующие формам выпучивания оболочки с тремя волнами в окружном направлении:

a — возмущающие силы типа 3 (вид оболочки сбоку), *б* — возмущающие силы типа 7 (вид оболочки сбоку), *в* — возмущающие силы типов 3 и 7 (вид оболочки сверху)

табл. 2). Такой же тип закритического деформирования имеет место, например, при действии возмущающих сил типа 1, хотя в этом случае возможно возникновение как трех, так и четырех волн. В то же время при действии, например, возмущающих сил типа 3 или 4 развиваются формы выпучивания с тремя или четырьмя волнами в окружном направлении соответственно.

В случае “коротких” оболочек действие возмущающих сил типов 7 и 8 не приводит к появлению несимметричных относительно ортогональной плоскости форм выпучивания. Для таких оболочек четко выраженные несимметричные формы выпучивания не наблюдались также в экспериментах, за исключением эксперимента с образцом 7, для которого имела место слабо выраженная несимметричная форма выпучивания. Однако при компьютерном моделировании деформирования оболочки, соответствующей образцу 7, приложение возмущающих сил типов 7–9 не привело к развитию несимметричных форм выпучивания (см. рис. 4, *в*, на котором показана оболочка, деформированная при действии возмущающих сил типа 9).

Деформированные конфигурации, полученные при компьютерном моделировании и соответствующие неосесимметричному выпучиванию оболочек, приведены на рис. 4, 5. Для этих конфигураций подбирались типы возмущающих сил, так чтобы формы выпучивания, получаемые при компьютерном моделировании, хорошо согласовывались с формами выпучивания, полученными в экспериментах. При проведении сравнения форм выпучивания, полученных в эксперименте и при компьютерном моделировании, рассматривались деформированные конфигурации, которым соответствуют одни и те же значения параметра ε . На рис. 4, 5 приведены значения времени t , соответствующие одному и тому же значению параметра ε в эксперименте и при компьютерном моделировании. В табл. 3 приведены значения параметра ε и типы возмущающих сил, для которых на рис. 4, 5 представлены полученные при компьютерном моделировании деформированные конфигурации.

В настоящей работе точки бифуркации решений на интегральных кривых построены в результате постпроцессорной обработки данных компьютерного моделирования деформирования оболочек при действии возмущающих сил. В момент времени t_{bif} , соответствующий точке бифуркации, наблюдалось отклонение формы оболочки от осесимметричной. Следует отметить, что стандартный бифуркационный мониторинг — определение точек бифуркации на интегральной кривой по точкам сингулярности матрицы касательной

Таблица 3

Значения параметра ε и типы возмущающих сил для конфигураций, представленных на рис. 4, 5

Номер образца	ε	Тип возмущающих сил
4	0,275	1
6	0,093	4
7	0,385	9
12	0,167	9
13	0,268	4
14	0,142	8

жесткости (см., например, [5]) — не позволил обнаружить точки бифуркации. При выполнении пошагового интегрирования уравнений квазистатического движения оболочки пакет MSC.Marc 2012 не обнаружил вырождений матрицы касательной жесткости, т. е. в выявленных в расчетах точках бифуркации не происходило вырождения матрицы касательной жесткости. По-видимому, для определения точек бифуркации следует использовать критерии устойчивости, предложенные для решения задач ползучести твердых тел и конструкций, например критерий Работнова — Шестерикова [21]. Иными словами, критические времена и формы выпучивания надо определять в точках псевдобифуркации [13, 14, 22, 23]. В то же время оказалась удачной попытка определения точек бифуркации путем добавления в уравнение ползучести параметра повреждаемости при проведении стандартного бифуркационного анализа выпучивания сжатой по оси круговой цилиндрической оболочки в условиях ползучести [38]. В [38] показано, что в некоторых расчетах неосесимметричное деформирование, для обнаружения которого используется стандартная техника бифуркационного анализа, не выявляется, т. е. при компьютерном моделировании деформирование оболочек является осесимметричным во все моменты времени (противоречие данным эксперимента). Однако при учете параметра повреждаемости при проведении стандартного бифуркационного анализа получены критические времена и формы выпучивания оболочки, которые коррелируют с соответствующими временами и формами, полученными в эксперименте. Для более надежного определения критических времен и форм выпучивания с использованием конечноэлементных пакетов прикладных программ, моделирующих процессы деформирования и выпучивания оболочек в условиях ползучести, необходимы дополнительные исследования.

Результаты сравнения кривых зависимостей ε от t , полученных в эксперименте и при компьютерном моделировании и представленных на рис. 3, показывают, что они подобны, но моменты времени, в которые происходит быстрое увеличение осевых перемещений торцов, в большинстве случаев существенно различаются (такой же вывод сделан, например, в [38]). В случае “длинных” оболочек и в эксперименте, и при компьютерном моделировании получены как симметричные, так и несимметричные относительно ортогональной плоскости формы выпучивания.

В настоящей работе впервые в решениях задач о выпучивании оболочек в условиях ползучести несимметричная относительно ортогональной плоскости форма деформации трактуется как форма выпучивания сжатой по оси круговой цилиндрической оболочки. При этом как в эксперименте, так и при компьютерном моделировании получены симметричные и несимметричные относительно ортогональной плоскости формы выпучивания. С использованием компьютерного моделирования деформирования оболочки показано, что, вводя возмущающую силу, можно получить несимметричную относительно ортогональной плоскости форму деформирования. В [38] несимметричная относительно ортогональ-

ной плоскости форма выпучивания получена при использовании разных граничных условий для торцов оболочки: на одном торце радиальные перемещения оболочки ограничивались, на другом торце такие ограничения отсутствовали (вблизи этого торца осесимметричная складка не образовывалась). Такое моделирование несимметричного относительно ортогональной плоскости деформирования представляется неестественным по сравнению с моделированием, проводимым в настоящей работе (с использованием несимметричного относительно ортогональной плоскости распределения возмущающих сил).

Заключение. Проведены экспериментальные исследования по деформированию и выпучиванию круговых цилиндрических оболочек из циркониевого сплава $Zr_{2,5}Nb$, сжатых по оси, в условиях ползучести. Рассматривались оболочки с одним и тем же значением отношения радиуса срединной поверхности к толщине оболочки, приближенно равным 40,5, и двумя различными значениями отношения длины оболочки к ее радиусу: для “коротких” оболочек это значение примерно равно 1,2, для “длинных” оболочек — 1,7. Деформирование оболочек происходило при температуре 730 °С.

В экспериментальных исследованиях установлено, что выпучивание оболочек сопровождается образованием либо четырех волн в окружном направлении, либо комбинации трех и четырех волн. Кроме того, для “длинных” оболочек с близкими геометрическими и механическими параметрами установлено, что выпучивание оболочки может происходить с образованием складки либо вблизи одного торца оболочки, либо вблизи обоих торцов. Выпучивание оболочек происходит по следующему сценарию: сначала имеет место осесимметричное деформирование оболочки с образованием складок вблизи обоих торцов с почти постоянной скоростью, затем скорость деформирования начинает возрастать, происходит медленно развивающееся неосесимметричное выпучивание оболочек с постоянно растущей скоростью движения нагруженного торца, при резком увеличении скорости этого движения эксперимент заканчивается.

Компьютерное моделирование проводилось путем пошагового интегрирования уравнений квазистатического деформирования тонких оболочек с помощью закона Нортона установившейся ползучести. Использовалась биквадратичная аппроксимация геометрических величин и компонент вектора перемещений по пространственным координатам. Решения задач получены с помощью пакета MSC.Marc 2012. Впервые задачи о выпучивании сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести решаются путем интегрирования уравнений теории оболочек без использования предположений об осесимметричном виде деформирования и представления решения в виде тригонометрических функций окружной координаты для определения неосесимметричных форм выпучивания.

При решении задач в отсутствие возмущения геометрии и без добавления каких-либо возмущающих сил получены осесимметричные формы выпучивания, которые не согласуются с формами выпучивания, полученными в эксперименте. Для реализации возможности неосесимметричного выпучивания оболочек к ним прикладывались возмущающие силы, соответствующие формам выпучивания с образованием от одной до шести волн в окружном направлении. В результате численных экспериментов установлено, что реализуются формы выпучивания с образованием трех, четырех или пяти волн в окружном направлении. Тем не менее при задании возмущающих сил, соответствующих одной, двум или шести волнам в окружном направлении, форма выпучивания с пятью волнами не возникает, но, так же как в эксперименте, таким возмущениям соответствуют формы выпучивания с образованием четырех волн или комбинации трех и четырех волн в окружном направлении. Таким образом, для рассматриваемых оболочек формы выпучивания с образованием трех или четырех волн в окружном направлении почти равновероятны.

Для реализации возможности несимметричного относительно ортогональной плоскости выпучивания оболочек возмущающие силы смещались от середины образующей обо-

лочки ближе к одному из торцов. Если возмущающие силы расположены симметрично относительно ортогональной плоскости, то осесимметричные складки образуются вблизи обоих торцов с последующим наложением на поверхности оболочки неосесимметричных форм выпучивания с образованием трех или четырех волн в окружном направлении. При действии возмущающих сил, расположенных несимметрично относительно ортогональной плоскости, в случае “длинных” оболочек реализуется форма выпучивания с одной складкой вблизи одного из торцов. В то же время для “коротких” оболочек действие сил, вызывающих несимметричное выпучивание оболочки относительно ортогональной плоскости, не приводит к развитию несимметричных форм выпучивания. Такой тип выпучивания с потерей симметрии деформированных конфигураций относительно ортогональной плоскости характерен для сжатых по оси оболочек из упругопластического материала. Для сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек, деформирующихся в условиях ползучести, несимметричная относительно ортогональной плоскости форма деформирования трактуется как форма выпучивания, по-видимому, впервые.

Проведено сравнение зависимостей осевых деформаций оболочек от времени, полученных в эксперименте и при компьютерном моделировании. Показано, что удовлетворительное соответствие кривых этих зависимостей достигается только в случае приложения значительных сжимающих напряжений. При меньших напряжениях различия теоретических и экспериментальных данных более существенны. Этот результат подтверждается большим разбросом экспериментальных данных и значительным различием кривых известных зависимостей осевой деформации оболочки от времени, полученных в экспериментах и при компьютерном моделировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bažant Z. P.** Stability of structures. 2nd ed. / Z. P. Bažant, L. Cedolin. Mineola; N. Y.: Dover Publ., 2003.
2. **Betten J.** Creep mechanics. 3rd ed. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
3. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
4. **Kassner M. E.** Fundamentals of creep in metals and alloys. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 2009.
5. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
6. **Naumenko K.** Modeling of creep for structural analysis / K. Naumenko, H. Altenbach. Berlin; Heidelberg: Springer, 2007.
7. **Никитенко А. Ф.** Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1997.
8. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
9. **Работнов Ю. Н.** Теория ползучести // Механика в СССР за 50 лет: В 4 т. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 143–149.
10. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1986.
11. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1991.
12. **Григолюк Э. И.** Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. М.: Наука, 1978.
13. **Клюшников В. Д.** Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980.
14. **Клюшников В. Д.** Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1986.

15. **Ogden R. W.** Non-linear elastic deformations. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1984.
16. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
17. **Yamaki N.** Elastic stability of circular cylindrical shells. Amsterdam: North-Holland, 1984.
18. **Hoff N. J.** Creep buckling of plates and shells // Theoretical and applied mechanics: Proc. of the 13th Intern. congress, Moscow, 21–26 Aug. 1972. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1973. P. 124–140.
19. **Hoff N. J.** Theory and experiment in the creep buckling of plates and shells // Buckling of structures. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1976. P. 67–77.
20. **Куршин Л. М.** О постановках задач устойчивости в условиях ползучести (обзор) // Проблемы теории пластичности и ползучести. М.: Мир, 1979. С. 246–302.
21. **Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.** Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 3. С. 406–412.
22. **Кирсанов М. Н., Ключников В. Д.** Определение особых точек процесса деформирования сжатого стержня в условиях ползучести // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 144–150.
23. **Kirsanov M. N.** Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Intern. J. Engng Sci. 1997. V. 35, N 3. P. 221–227.
24. **Баранов А. Н., Морозов М. А.** Экспериментальное исследование критической деформации цилиндрических оболочек в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 1. С. 114–118.
25. **Кузнецов А. П., Юнгерман Н. М.** Экспериментальное исследование устойчивости оболочек в условиях ползучести // ПМТФ. 1965. № 4. С. 128–131.
26. **Miyazaki N., Hagihara S.** Bifurcation buckling of circular cylindrical shells subjected to axial compression during creep deformation // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 1993. V. 115. P. 268–274.
27. **Ohya H.** An experimental and theoretical investigation of creep buckling // Trans. of the 4th Intern. conf. on structural mechanics in reactor technology, San Francisco, 15–19 Aug. 1977. San Francisco: IASMR, 1977. V. L. Paper L 8/9.
28. **Rikards R. B., Teters G. A.** Nonsymmetric creep buckling of cylindrical shells under axial compression and external pressure // Buckling of structures. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1976. P. 78–85.
29. **Samuelson L. A.** Experimental investigation of creep buckling of circular cylindrical shells under axial compression and bending // Trans. ASME. Ser. B. J. Engng Indust. 1968. V. 90, N 4. P. 589–595.
30. **Kornev V. M., Korobeinikov S. N.** On solution symmetry for axisymmetric deformation of axially compressed cylindrical shell // Innovative numerical methods in engineering: Proc. of the 4th Intern. symp., Atlanta, 17–21 Mar., 1986. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 579–584.
31. **Корнев В. М., Коробейников С. Н.** О реализуемости симметрии решения в задаче осесимметричного деформирования цилиндрической оболочки при продольном сжатии // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. Свердловск: Урал. науч. центр АН СССР, 1986. С. 70–77.
32. **Коробейников С. Н.** Численное решение нелинейных задач о деформировании упругих оболочек вращения в собственных состояниях // Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. Т. 3, № 1. С. 43–56.
33. **Коробейников С. Н.** Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 5. С. 39–59.

34. **Артемьева А. А., Баженов В. Г., Кибец А. И. и др.** Верификация конечно-элементного решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования, устойчивости и закритического поведения оболочек // Вычисл. механика сплошных сред. 2010. Т. 3, № 2. С. 5–14.
35. **Murakami S., Tanaka E.** On the creep buckling of circular cylindrical shells // Intern. J. Mech. Sci. 1976. V. 18. P. 185–194.
36. **Obrecht H.** Creep buckling and postbuckling of circular cylindrical shells under axial compression // Intern. J. Solids Structures. 1977. V. 13, N 4. P. 337–355.
37. **Samuelson L. A.** Creep buckling of a cylindrical shell under non-uniform external loads // Intern. J. Solids Structures. 1970. V. 6, N 1. P. 91–116.
38. **Hagihara S., Miyazaki N.** Finite element creep buckling analysis of circular cylindrical shell under axial compression taking account of creep damage // Metals Materials. 1998. V. 4, N 3. P. 295–298.
39. **Stone C. M., Nickel R. E.** Creep buckling of shells // Trans. of the 4th Intern. conf. on structural mechanics in reactor technology, San Francisco, 15–19 Aug., 1977. San Francisco: IASMR, 1977. V. L. Paper L 7/8.
40. **MARC Users Guide. V. A.** Theory and users information. Santa Ana: MSC.Software Corp., 2012.
41. **MARC Users Guide. V. B.** Element library. Santa Ana: MSC.Software Corp., 2012.
42. **Bathe K.-J.** Finite element procedures. New Jersey; Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
43. **Curnier A.** Computational methods in solid mechanics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
44. **Любашевская И. В., Торшенов Н. Г., Соснин О. В., Локтионов В. Д.** Деформационно-прочностные свойства циркониевого сплава при температурах 600–800 °С // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 198–201.
45. **Zeinkiewicz O. C., Taylor R. L.** The finite element method. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

Поступила в редакцию 21/VI 2013 г.
