

С. М. Аульченко

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДОЗВУКОВЫХ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ

Для совершенствования решения задач аэродинамического проектирования крыловых профилей разработан метод, основанный на описании течения с помощью функционала, экстремалами которого являются уравнения течения идеального газа. Исследовано поведение второй вариации функционала, позволяющее идентифицировать экстремум, что дает возможность рассчитывать смешанные течения, в том числе и трансзвуковые обтекания профилей. Функция тока, через которую выражаются все величины, входящие в функционал, аппроксимируется разложением по базису, состоящему из собственных функций оператора Лапласа. Решение задачи осуществляется определением экстремума в конечномерном пространстве весовых коэффициентов базиса. Значение функционала в текущей точке конечномерного пространства вычисляется с использованием аппроксимации подынтегральной функции полиномами Эрмита.

Решение задачи проектирования критических крыловых профилей эквивалентно построению линии тока, соединяющей заданные участки границы. Теорема сравнения [1] позволяет от построения свободной линии тока с местным числом Маха $M = 1$ перейти к задаче о максимуме площади обтекаемого тела. Таким образом, она сводится к задаче оптимизации с ограничениями в виде уравнений газовой динамики. Удовлетворить этим ограничениям можно, минимизируя функционал

$$(1) \quad I = \int_{\Omega} (p + \rho q^2) d\omega.$$

Известно [2], что вариационные уравнения для (1) являются уравнениями плоских течений:

$$(2) \quad \mathbf{q} \times (\nabla \times \mathbf{q}) = -\frac{1}{2}(a^2 - q^2) \nabla \ln f, \quad \nabla(\rho \mathbf{q}) = 0, \quad p = f \rho^\gamma, \quad \ln f = \frac{s}{c_p}$$

($\mathbf{q} \cdot \nabla f = 0$ — условие адиабатичности).

Уравнение Бернулли имеет вид

$$-\frac{1}{2} q^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} a^2.$$

В (2) приняты обозначения: $\mathbf{q} = (u, v)$ — вектор скорости; p — давление; ρ — плотность; a — скорость звука; s — удельная энтропия; $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты; c_p, c_v — удельные теплоемкости газа при постоянных давлении и объеме; f — функция ψ , которая при стационарном течении и отсутствии вихря на бесконечности является константой, если отсутствуют скачки. Через функцию тока $\psi(x, y)$ (1) записывается как

$$(3) \quad I = \int_{\Omega} P(\psi, \nabla \psi) d\omega,$$

где

$$P(\psi, \nabla \psi) = 2\gamma \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right]^{1/(\gamma-1)} (p + \rho q^2);$$

$$p = f(\psi)^{-1/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma-1}{2\gamma} (1 - q^2) \right]^{\gamma/(\gamma-1)};$$

$$\rho = f(\psi)^{-1/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma-1}{2\gamma} (1 - q^2) \right]^{1/(\gamma-1)}; \quad (1 - q^2)^{2/(\gamma-1)} q^2 = (\nabla \psi)^2.$$

Для того чтобы уравнения Эйлера — Лагранжа для (1) совпадали с (2), необходимо

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial P}{\partial \nabla \psi} \mathbf{n} d\psi dl = 0,$$

что справедливо для краевых условий в задаче обтекания профиля, так как это сводится к условию

$$\int_{\partial\Omega} (-v, u) n \delta\psi dl = 0,$$

которое есть разность циркуляций по внешней и внутренней границам. Вторая вариация (1) имеет вид

$$(4) \quad \delta^2 I = 2\gamma \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{\gamma-1} f^{-\gamma/(\gamma-1)} \frac{\partial f}{\partial \psi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2\gamma} (1-q^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{\partial}{\partial \psi} \ln f \right) - \right. \\ \left. - f^{-1/(1-\gamma)} \frac{1}{2\gamma} (1-q^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \ln f - \nabla \left(f^{-1/(\gamma-1)} \frac{\partial}{\partial \nabla \psi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2\gamma} \times \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (1-q^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{\partial}{\partial \psi} \ln f \right) \right) \right] \delta^2 \psi d\omega.$$

В приведенных выше выражениях $\partial/\partial \nabla \psi \equiv (\partial/\partial \psi_x, \partial/\partial \psi_y)$, $\psi_x = \partial \psi / \partial x$, $\psi_y = \partial \psi / \partial y$. Для течений с $i(\psi) = \text{const}$ (4) приводится к

$$\delta^2 I = 2\gamma f^{-1/(\gamma-1)} \int_{\Omega} \Delta \frac{1}{\rho} \delta^2 \psi d\omega,$$

или, опуская положительные константы, получим

$$(5) \quad \delta^2 I \sim - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{q})^2 \delta^2 \psi d\omega + \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{q} n \delta^2 \psi dl$$

($\partial\Omega$ — граница области интегрирования Ω). Второе слагаемое в (5) равно нулю, так как $\nabla \mathbf{q}$ направлен по касательной к контуру и $\mathbf{q} = \text{const}$ в невозмущенном потоке, и, следовательно, необходимо минимизировать выпуклый функционал.

Пусть функционал площади

$$(6) \quad I_S = S^{-1}(F),$$

где $y = F(x, \mathbf{p})$ — функция, задающая контур, представляющая собой кубические сплайны для верхнего и нижнего контуров профиля, построенные по узлам, их задающим.

Решение задачи проектирования осуществляется определением экстремума объединенного функционала J , состоящего из (1) и (6) в конечномерном пространстве весовых коэффициентов базиса для представления функции тока и параметров \mathbf{p} , задающих профиль.

В данном случае функция тока аппроксимируется разложением по базису, состоящему из собственных функций оператора Лапласа в области Ω . А параметрами \mathbf{p} являются ординаты узлов, задающих контур профиля, за исключением фиксированных носка, состоящего из дуги окружности, и участков, примыкающих сверху и снизу к задней кромке.

Если профиль обтекается под углом атаки α со скоростью q_{∞} , то функция тока на внешней границе с учетом асимптотики [3] может быть определена по формулам

$$(7) \quad \psi(x, y) = \rho c_0 \left[u_{\infty} y - v_{\infty} x - \frac{k\Gamma}{2\pi} \left(\int_0^y f_1(x, \xi) d\xi + \int_0^x f_2(\eta, y) d\eta \right) \right], \\ \int_0^y f_1(x, \xi) d\xi = \frac{1}{C_1} \left[\frac{E_1}{2} \ln(\xi^2 + D_1 \xi + B_1) + \frac{2A_1 - E_1 D_1}{\sqrt{4B_1 - D_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\xi + D_1}{\sqrt{4B_1 - D_1^2}} \right] \Big|_0^y, \\ \int_0^x f_2(\eta, y) d\eta = \frac{1}{C_2} \left[\frac{E_2}{2} \ln(\eta^2 + D_2 \eta + B_2) + \frac{2A_2 - E_2 D_2}{\sqrt{4B_2 - D_2^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\eta + D_2}{\sqrt{4B_2 - D_2^2}} \right] \Big|_0^x, \\ A_1 = -x \sin \alpha, A_2 = y \sin \alpha, E_1 = E_2 = \cos \alpha.$$

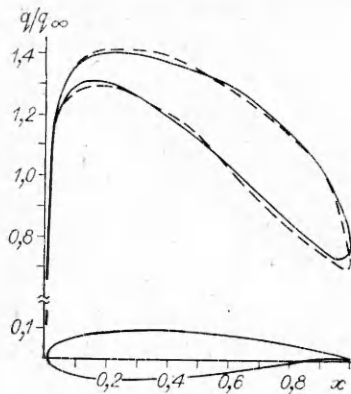


Рис. 1

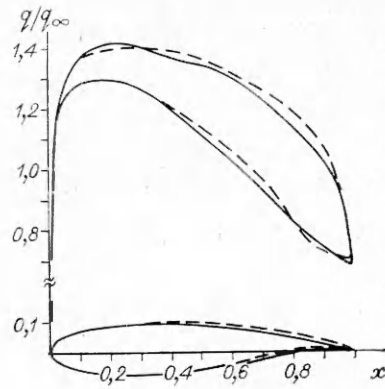


Рис. 2

$$C_1 = \sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha, \quad C_2 = \cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha,$$

$$B_1 = x^2(\cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha)/C_1, \quad B_2 = y^2(\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha)/C_2,$$

$$D_i = 2A_i E_i M_\infty^2 / C_i, \quad i = 1, 2, \quad k^2 = 1 - M_\infty^2$$

(Г — циркуляция).

В качестве исходного взят профиль с достаточно высоким критическим числом Маха ($M_\infty = 0,68$), спроектированный методом построения квазирешения обратной краевой задачи для модели газа Чаплыгина *. Угол в задней кромке этого и всех рассматриваемых в дальнейшем профилей равен нулю. Минимизацией функционала (1) проведен расчет обтекания данного профиля в рамках уравнений газовой динамики. Распределения соответствующих скоростей по контуру для разных моделей приведены на рис. 1, где сплошная линия — газ Чаплыгина ($C_y = 0,383$, $C_x = -0,001$), а штриховая — идеальный газ ($C_y = 0,48$, $C_x \sim 10^{-5}$). Отличие C_x от нуля связано с погрешностью расчетов.

Постановка задачи проектирования содержит геометрические ограничения на профиль

$$(8) \quad x_k - x_0 = L, \quad L = \text{const}, \quad F(x_0, p) = 0, \quad F(x_k, p) = 0,$$

$$F_x(x_0, p) = \infty, \quad F_x(x_k, p) \geq \text{tg } \theta_0, \quad -\pi/2 \leq \theta_0 < 0$$

и аэродинамические на поток

$$(9) \quad M_\infty = M_\infty^0, \quad C_{y_i} \geq C_{y_i}^0, \quad M_\Omega \leq 1.$$

Первая оптимизационная задача состоит в том, чтобы построить профиль $F(x, p)$, удовлетворяющий ограничениям (8), (9) и имеющий максимальную площадь. Вторая отличается от первой тем, что вместо функционала течения (1) был взят функционал, отвечающий модели газа Чаплыгина:

$$I = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} d\omega$$

($\varphi(x, y)$ — потенциал потока).

Условия для φ на внешней границе выписываются на основе той же асимптотики для скорости (7). На контуре вместо $\psi = 0$ имеем $\partial\varphi/\partial n = 0$. В случае изэнтропических течений условие Жуковского для профилей с острой задней кромкой эквивалентно равенству значений скорости на верхней и нижней частях профиля у кромки, а для конечного угла — равенству скорости нулю. Это условие добавляется в качестве штрафа

* Профиль и распределение скорости на нем любезно предоставлены Д. А. Фокиным (НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, г. Казань).

в J , а вычисленная по контуру профиля циркуляция Γ на каждой итерации при минимизации функционала подставляется в (7).

На рис. 2 штриховыми линиями показан модифицированный профиль, являющийся решением первой оптимизационной задачи с $M_\infty^0 = 0,68$, $C_y^0 = 0,4$, и приведено распределение скорости по нему. Приращение площади $\Delta S \sim 6\%$.

На рис. 3 приведено решение второй оптимизационной задачи, $\Delta S \sim 3\%$, штриховые линии — полученный профиль. В распределениях скорости на части верхних контуров модифицированных профилей на рис. 2, 3 имеется «полочка», соответствующая $M \approx 1$. Тот факт, что $M = \text{const}$ не реализуется на всей свободной поверхности полученных профилей, вызван ограничением снизу на C_y в (9).

Результаты расчетов подтверждают, с одной стороны, высокую точность предложенного алгоритма расчета и построения профилей, а с другой — возможность использования для их проектирования газа Чаплыгина как модели дозвукового течения реального газа, что позволяет создавать эффективные методы расчета, так как решения уравнения минимальных поверхностей могут быть представлены через аналитические функции комплексного переменного.

Автор выражает благодарность А. Ф. Латыпову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Rational Mech. Anal. — 1954. — V. 3, N 2.
2. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1983.
3. Бере Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: ИЛ, 1961.

г. Новосибирск

Поступила 21/VI 1991 г.,
в окончательном варианте — 11/VII 1991 г.

УДК 533.6.014

Н. М. Булгакова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СТРУЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Решение полной системы уравнений Навье — Стокса методом установления с использованием неявной схемы расщепления для струйных течений из сопла в вакуум [1], затопленное пространство [2] и спутный поток [3] позволяют рассматривать дозвуковые участки течения и их влияние на структуру струи. Кроме того, метод, предложенный в [4, 5], дает возможность расчета нестационарных процессов. В данной работе в рамках этого метода решается задача об истечении струи газа в затопленное пространство в импульсном режиме, что может быть приложено к описанию запуска струи и квазистационарных эрозионных факелов. Выход решения на установившийся режим соответствует решению стационарной задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерную (осесимметричную) задачу. Схема изучаемой области представлена на рис. 1. Снизу она ограничена осью струи OD , OA представляет собой звуковое отверстие радиусом r_c (либо срез сверхзвукового сопла). Выше кромки сопла границей