

УДК 532.526.2

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА НА ЛЕДЯНОЙ ПОКРОВ

В. Д. Жесткая, В. М. Козин

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,  
681013 Комсомольск-на-Амуре  
E-mail: kks@knastu.ru

Приведена математическая постановка задачи. Предложен способ определения начальных скоростей точек ледяного покрова при действии точечного ударного импульса. Приведен пример расчета прогибов ледяного покрова.

Ключевые слова: ледяной покров, импульс, численное моделирование.

Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при воздействии на него нагрузок различного типа позволяет решить ряд прикладных задач, возникающих в практике судоходства по замерзающим водным путям сообщения, при эксплуатации инженерных сооружений на речной и морской акваториях, при проведении мероприятий по предотвращению наводнений в периоды ледохода и ледостава. В частности, представляет интерес изучение поведения ледяного покрова после воздействия на него импульсной нагрузки. Такая задача возникает при проведении взрывных работ по разрушению заторов и зажоров, а также по разрушению ледяного покрова.

В настоящее время аналитические решения данной задачи [1, 2] найдены лишь для сравнительно простых ледовых условий. Получение аналитических решений задачи, моделирующей достаточно сложную реальную ледовую обстановку (произвольные очертания берегов водоема, переменная глубина водоема и т. п.), сопряжено с большими математическими трудностями, поэтому более перспективным представляется использование численных методов.

В настоящей работе численный метод, представляющий собой комбинацию метода конечных элементов и метода конечных разностей, используется для расчета прогибов ледяного покрова при воздействии на него точечного ударного импульса, т. е. внезапно приложенной силы  $P$ , в течение промежутка времени  $\Delta t$ , малого по сравнению с периодом собственных колебаний. В соответствии с работой [1] ледяной покров представляется в виде пластины, а вода считается идеальной несжимаемой жидкостью. Глубина водоема принимается постоянной.

При построении математической модели используется прямоугольная система координат, оси  $x$  и  $y$  которой расположены в плоскости ледяной пластины, а ось  $z$  направлена вверх (рис. 1).

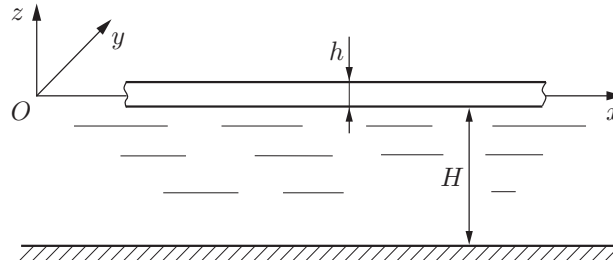


Рис. 1. Схема задачи

В качестве основных зависимостей примем дифференциальное уравнение вязкоупругих колебаний ледяного покрова [1]

$$D \left( 1 + \tau_f \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w + \rho_w g w + \rho_i h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = p(x, y, t), \quad (1)$$

уравнение Лапласа для потенциала скорости движения жидкости

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (2)$$

условие непротекания на дне водоема

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \quad (3)$$

и условие равенства скоростей на границе льда и воды

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $w$  — прогиб льда;  $\rho_w, \rho_i$  — плотность воды и льда соответственно;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — толщина ледяного покрова;  $\Phi$  — потенциал скорости;  $p$  — интенсивность внешней нагрузки;  $H$  — глубина бассейна;  $\tau_f$  — время релаксации деформаций;  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины. В данном случае

$$p(x, y, t) = U \delta(x, y) \delta(t),$$

где  $U$  — ударный импульс;  $\delta(x, y), \delta(t)$  — дельта-функции Дирака.

Алгоритм решения задачи строится аналогично тому, как это сделано в работах [3, 4] для другого типа воздействия на ледяной покров — при движении по нему нагрузки. Численное решение, приведенное в [3, 4], основано на двух численных методах: методе конечных элементов и методе конечных разностей.

При расчете рассматривается ограниченная в горизонтальной плоскости, но достаточно большая область ледяного покрова с находящейся под ней жидкостью. Размер этой области должен быть достаточным для того, чтобы можно было считать, что на ее границе  $\Gamma$  перемещения пластины практически отсутствуют, и принять условия жесткой заделки

$$w|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad (5)$$

где  $n$  — нормаль к границе  $\Gamma$ .

На вертикальной поверхности, ограничивающей жидкость под ледяным покровом, ставится условие непротекания [4]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad (6)$$

где  $n$  — нормаль, перпендикулярная оси  $z$ .

Используя известный в теории малых колебаний прием разложения перемещений системы на главные колебания, выражения для  $w$  и  $\Phi$  представим в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m, \quad \Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m,$$

где функции под знаком суммы линейно независимы. Ограничиваясь  $n$  членами ряда и разложив функцию  $\Phi_m$  на два сомножителя, получим

$$w = \sum_{m=1}^n w_m; \quad (7)$$

$$\Phi = \sum_{m=1}^n \Phi_m = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x, y, t) \psi_m(z) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x, y, t) \operatorname{ch}(k_m(z + H)). \quad (8)$$

Здесь  $k_m = \operatorname{const}$ ; выражение для  $\psi_m(z)$  получено в результате подстановки соотношения  $\Phi_m = \varphi_m(x, y, t) \psi_m(z)$  в (2), разделения переменных и решения дифференциального уравнения с переменной  $z$  [4].

Следует отметить, что при учете только  $n$  членов ряда исходная система, имеющая бесконечное число степеней свободы, заменяется на систему с конечным числом степеней свободы  $n$ .

При подстановке (7), (8) в (1)–(4) уравнение (3) удовлетворяется. Исключив  $\varphi_m$  из уравнений (1), (2), (4), получим систему

$$\sum_{m=1}^n \left( D \left( 1 + \tau_f \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w_m + \rho_w g w_m + \rho_i h \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + \rho_w \frac{\operatorname{cth} k_m H}{k_m} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \right) = p(x, y, t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} + k_m^2 w_m \right) = 0.$$

Из (5) находим

$$w_m|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w_m}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in \Gamma} = 0. \quad (10)$$

Как показано в [4], при выполнении на границе рассматриваемой области условий (10) выполняется также условие (6). Таким образом, потенциал  $\Phi$  из задачи исключен, а для определения функции  $w_m$ , входящей в (7), получены уравнения (9) и (10).

Используя алгоритм метода конечных элементов, построим дискретную модель ледяной пластины, положив

$$w_m(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) q_{im}(t). \quad (11)$$

Здесь  $N_i(x, y)$  — функции формы;  $q_{im}(t)$  — компоненты вектора узловых перемещений  $[q]_m(t)$ ;  $n$  — число узловых перемещений и число степеней свободы дискретной модели, поскольку в любой точке дискретной модели перемещения полностью определяются набором узловых перемещений. Значение  $n$ , при определении которого учитываются условия (10), зависит от типа и количества конечных элементов, образующих дискретную модель пластины.

С учетом (11) выражение для прогиба пластины записывается в виде

$$w = \sum_{m=1}^n w_m = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^n N_i(x, y) q_{im}(t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) q_i(t),$$

где  $q_i(t) = \sum_{m=1}^n q_{im}(t)$  — компоненты полного вектора узловых перемещений  $[q](t)$ :

$$[q](t) = \sum_{m=1}^n [q]_m(t). \quad (12)$$

Для получения разрешающей системы уравнений задачи применим обобщенный метод Бубнова — Галеркина. В результате получим систему матричных уравнений [3, 4]

$$\sum_{m=1}^n \left( [M]_m \frac{d^2[q]_m}{dt^2} + [C] \frac{d[q]_m}{dt} + [K][q]_m \right) = [P](t), \quad ([S] - k_m^2[T]) \frac{d[q]_m}{dt} = 0, \quad (13)$$

где  $[P](t)$  — вектор внешних узловых нагрузок. Элементы матриц  $[M]_m$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ ,  $[S]$ ,  $[T]$ , входящих в (13), зависят от  $\rho_w$ ,  $\rho_i$ ,  $h$ ,  $H$ ,  $\tau_f$ ,  $D$ ,  $k_m$ ,  $N_i(x, y)$ .

Для решения системы (13) используем метод конечных разностей [3, 4]. После преобразований получим матричные уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n ([A]_m [q]_{m,r+1} + [B]_m [q]_{m,r} + [D]_m [q]_{m,r-1}) &= (\Delta t)^2 [P]_r, \\ ([S] - k_m^2[T]) ([q]_{m,r+1} - [q]_{m,r-1}) &= 0, \quad r = 0, 1, 2, \dots, L, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\Delta t$  — шаг сетки;  $[q]_{m,r}$  — значение вектора  $[q]_m$  в  $r$ -м узле;  $[P]_r$  — значение вектора узловых нагрузок при  $t = r\Delta t$ ; матричные коэффициенты  $[A]_m$ ,  $[B]_m$ ,  $[D]_m$  зависят от параметров задачи.

Второму уравнению системы (14) можно удовлетворить, представив выражение для  $[q]_{m,r}$  в виде

$$[q]_{m,r} = [X]_m \alpha_{m,r}. \quad (15)$$

Здесь  $[X]_m$  — собственный вектор однородной системы линейных уравнений с матрицей  $[S] - k_m^2[T]$ , соответствующий собственному значению  $k_m^2$ ;  $\alpha_{m,r}$  — неизвестный коэффициент. Собственные векторы  $[X]_m$  и собственные значения  $k_m^2$  вычисляются на первом этапе расчета любым пригодным методом (например, методом вращений).

Подставив (15) в первое уравнение системы (14), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n ([A]_m [X]_m \alpha_{m,r+1} + [B]_m [X]_m \alpha_{m,r} + [D]_m [X]_m \alpha_{m,r-1}) &= (\Delta t)^2 [P]_r, \\ r &= 0, 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) должно быть дополнено начальными условиями. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  вектор узловых перемещений  $[q]$  равен  $[f_0]$ , а скорость его изменения —  $[\dot{f}_0]$ :

$$[q](0) = [f_0], \quad \left( \frac{d[q]}{dt} \right) \Big|_{t=0} = [\dot{f}_0]. \quad (17)$$

С учетом конечно-разностного представления производных из (12), (15), (17) следует система уравнений

$$\sum_{m=1}^n [X]_m \alpha_{m,0} = [f_0], \quad \sum_{m=1}^n [X]_m (\alpha_{m,-1} - \alpha_{m,1}) = -2[\dot{f}_0] \Delta t. \quad (18)$$

Из уравнений (18) найдем  $\alpha_{m,0}$  и  $\alpha_m = \alpha_{m,-1} - \alpha_{m,1}$ . Подставив значения  $\alpha_{m,0}$  и  $\alpha_m$  в (16), получим окончательную систему уравнений для определения  $\alpha_{m,r}$  ( $r = 1, 2, \dots, L-1$ ):

$$\sum_{m=1}^n ([D]_m + [A]_m)[X]_m \alpha_{m,1} = (\Delta t)^2 [P](0) - \sum_{m=1}^n [B]_m [X]_m \alpha_{m,0} - \sum_{m=1}^n [D]_m [X]_m \alpha_m,$$

$$\sum_{m=1}^n [A]_m [X]_m \alpha_{m,r+1} = (\Delta t)^2 [P](r\Delta t) - \sum_{m=1}^n [B]_m [X]_m \alpha_{m,r} - \sum_{m=1}^n [D]_m [X]_m \alpha_{m,r-1}.$$

Зная  $\alpha_{m,r}$ , найдем узловые перемещения и прогиб пластины в узле сетки по времени.

Если единственной нагрузкой на ледяной покров является ударная импульсная нагрузка при  $t = 0$ , то в приведенных выше зависимостях следует принять  $[P] = 0$ ,  $[f_0] = 0$ . Фактором, инициирующим движение системы, является начальная скорость  $[\dot{f}_0]$  ледяной пластины, которую она получает в момент действия импульса.

Начальные скорости точек пластины можно определить на основе закона сохранения количества движения, согласно которому  $K = U$  ( $K$  — количество движения пластины, приобретенное в результате удара;  $U = P\Delta\tau$  — импульс силы).

Для решения данной задачи применим метод конечных элементов. При этом прогиб пластины аппроксимируется выражением

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n q_i N_i(x, y),$$

где  $q_i$  — узловые перемещения;  $N_i$  — функции формы;  $n$  — число узловых перемещений.

При определении начальных скоростей необходимо задать их зависимости от координат  $x, y$  точек пластины. Будем считать, что скорости пропорциональны прогибам пластины при статическом действии на нее сосредоточенной силы  $P$  в точке приложения импульса. Тогда распределение скоростей по пластине можно представить в виде

$$v(x, y) = v_P \frac{w(x, y)}{w(x_P, y_P)}, \quad (19)$$

где  $v_P$  — скорость пластины в точке удара;  $w(x, y)$  — статический прогиб пластины при действии силы  $P$ ;  $w(x_P, y_P)$  — статический прогиб пластины в точке приложения силы  $P$ ;  $x_P, y_P$  — координаты точки приложения силы  $P$ . Заметим, что при определении статического прогиба можно принять  $P = 1$ , так как отношение  $w(x, y)/w(x_P, y_P)$  не зависит от значения  $P$ .

Количество движения пластины можно вычислить по формуле

$$K = \iint_S \rho_i h v(x, y) dx dy = \frac{\rho_i h v_P}{w(x_P, y_P)} \iint_S w(x, y) dx dy,$$

где  $\rho_i$  — плотность льда; интеграл берется по площади пластины  $S$ . Обозначив число конечных элементов через  $m$ , из этой формулы получаем

$$K = \frac{\rho_i h v_P}{w(x_P, y_P)} \sum_{i=1}^m \iint_{S_i} w_i(x, y) dx dy, \quad (20)$$

где  $w_i(x, y)$  — прогиб  $i$ -го конечного элемента;  $S_i$  — площадь  $i$ -го конечного элемента.

Если число узловых перемещений конечного элемента равно  $n_i$ , то

$$w_i(x, y) = \sum_{r=1}^{n_i} q_k^{(i)} N_k^{(i)}(x, y), \quad (21)$$

где  $q_k^{(i)}$  — узловые перемещения  $i$ -го конечного элемента;  $N_k^{(i)}$  — функции формы.

Подставляя (21) в (20), получим

$$K = \frac{\rho_i h v_P}{w(x_P, y_P)} \sum_{i=1}^m \iint_{S_i} \sum_{k=1}^{n_i} q_k^{(i)} N_k^{(i)}(x, y) dx dy = \frac{\rho_i h v_P}{w(x_P, y_P)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} q_k^{(i)} \iint_{S_i} N_k^{(i)} dx dy.$$

Вводя обозначение  $A_k^{(i)} = \iint_{S_i} N_k^{(i)} dx dy$  и учитывая, что  $K = U$ , для определения  $v_P$  имеем следующее равенство:

$$\frac{\rho_i h v_P}{w(x_P, y_P)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} q_k^{(i)} A_k^{(i)} = U.$$

Найдя  $v_P$ , по формуле (19) определим линейные скорости точек пластины, в частности скорости узлов сетки конечных элементов. Таким образом, получаем вектор  $[f_0]$ , входящий в начальные условия задачи.

В [3, 4] предложен метод расчета напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, находящегося под действием движущейся нагрузки. Из результатов сравнения решений, полученных этим методом, с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными, полученными как в лабораторных, так и в натуральных условиях, следует, что численные решения являются достаточно точными [4]. В настоящей работе предлагается использовать указанный метод для решения задачи о воздействии на ледяной покров нагрузки другого типа, а именно ударного импульса. Поскольку, как сказано выше, алгоритм решения этой задачи аналогичен алгоритму решения задачи о движении нагрузки по ледяному покрову, последняя может считаться тестом для задачи о воздействии импульса. Надежные результаты, полученные в случае действия движущейся нагрузки, позволяют считать достоверными результаты, полученные в случае воздействия импульса.

Приведем результаты расчета прогибов пластины (полученных в модельном эксперименте по исследованию реакции ледяного покрова на действие импульсной нагрузки), выполненного с использованием изложенного выше метода. Ледяной покров моделировался резиновой пленкой толщиной 1 мм, которая имела форму прямоугольной пластины длиной  $L = 2$  м и шириной  $B = 1,2$  м. Глубина водоема составляла 0,02 м. Физические параметры задачи имели следующие значения:  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_i = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\tau_f = 10$  с,  $D = 0,14 \cdot 10^{-4}$  нм. Значение импульса принято равным  $0,98 \cdot 10^{-4}$  Н·с, точка его приложения находится в центре пластины, действие импульса направлено вверх. Шаг сетки по времени равен 0,0625 с.

При дискретизации пластина разбита на квадратные конечные элементы с длиной стороны 0,2 м. Ось  $x$  совпадает с осью симметрии пластины и параллельна ее длинной кромке, начало координат находится на левой кромке пластины. При расчете учитывалась симметрия пластины и рассматривалась только ее часть по одну сторону от оси  $x$ .

Для построения дискретной модели использован так называемый совместный изгибный прямоугольный конечный элемент, имеющий 16 степеней свободы [5]. В каждом узле сетки элементов в общем случае имелось четыре узловых перемещения, а в узлах, лежащих

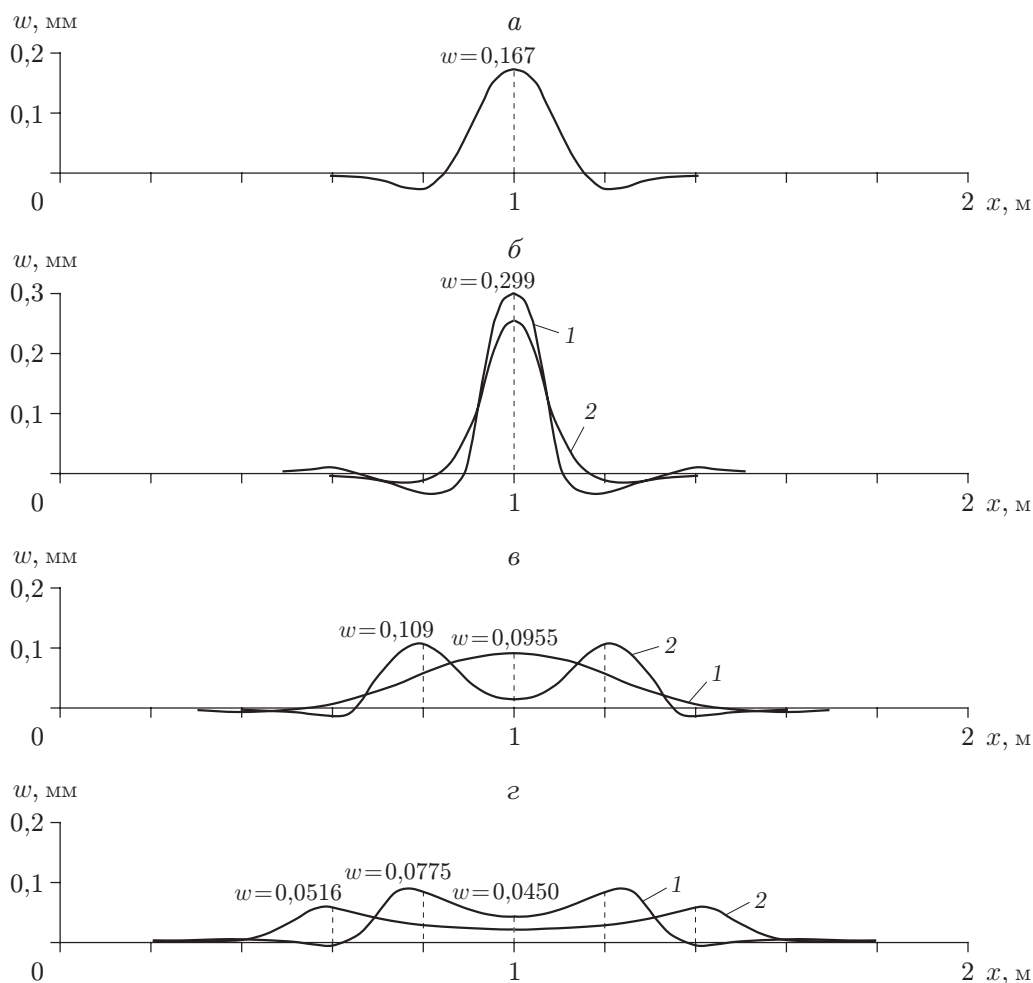


Рис. 2. Прогибы ледяного покрова:

$a - t = 0,0625$  с;  $б - 1 - t = 0,1875$  с;  $2 - t = 0,25$  с;  $в - 1 - t = 0,375$  с;  $2 - t = 0,5$  с;  
 $г - 1 - t = 0,6875$  с;  $2 - t = 1,875$  с

на оси симметрии, — два узловых перемещения. Таким образом, в данном случае с учетом граничных условий и условий симметрии общее число узловых перемещений  $n = 90$ .

На рис. 2 представлены графики прогибов на оси  $x$  пластины в различные моменты времени, прошедшего с момента приложения импульса.

С использованием изложенного выше метода можно провести расчет при действии не одного, а нескольких импульсов (одновременно или со сдвигом по времени). Заметим также, что численный метод, выбранный для решения задачи, позволяет учитывать различные особенности ледовой обстановки (например, очертания водоема в плане, наличие трещин, участков свободной воды и т. п.), плохо поддающиеся учету при аналитическом решении задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
2. Козин В. М., Погорелова А. В. Воздействие ударного импульса на плавающий ледяной покров // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 6. С. 26–30.

3. **Жесткая В. Д.** Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 243–248.
4. **Жесткая В. Д.** Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом / В. Д. Жесткая, В. М. Козин. Владивосток: Дальнаука, 2003.
5. **Бойцов Г. В.** Справочник по строительной механике корабля: В 3 т. / Г. В. Бойцов, О. М. Паллий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. Л.: Судостроение, 1982. Т. 2.

*Поступила в редакцию 1/VIII 2006 г.,  
в окончательном варианте — 12/IV 2007 г.*

---