УДК 532.545

О ВЛИЯНИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ НА ПРОЦЕССЫ ОБРАЗОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ ДОННЫХ ВОЛН

А. Г. Петров, И. И. Потапов*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
* Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск
E-mails: petrov@ipmnet.ru, potapovII@rambler.ru

Сформулирована задача развития линейных возмущений песчаного дна в канале прямоугольной формы с тяжелой несжимаемой жидкостью. Турбулентная вязкость потока определена как функция коэффициента гидравлического сопротивления, а уравнения гидродинамики записаны в длинноволновом приближении Буссинеска. В выражении для гидростатического давления учтена поправка к приближению Буссинеска, которая изменяет расход переносимых наносов. Задача развития донных возмущений решена с учетом уточненной формулы расхода наносов, что позволило получить аналитические выражения для скорости движения донных возмущений и длину волны максимально быстро растущих донных возмущений при малых числах Фруда.

Ключевые слова: донные возмущения, турбулентный поток жидкости, перенос наносов.

Введение. Анализ устойчивости донной поверхности, проведенный в работах [1, 2] с использованием оригинальной формулы расхода влекомых наносов, позволил получить зависимости, определяющие влияние турбулентной вязкости и числа Фруда потока на скорости увеличения и волновые числа максимально быстро растущих донных возмущений. Данные решения получены в предположении, что турбулентная вязкость потока и коэффициент гидравлического сопротивления потоку являются независимыми параметрами. При этом соответствие между расчетными и экспериментальными данными позволяет сделать вывод о слабом влиянии гидравлического сопротивления потоку на его донную устойчивость, а также получить аномально большие значения турбулентной вязкости потока, играющей важную роль при определении длины донных волн [1, 2].

В настоящей работе рассматривается задача устойчивости песчаного дна реки, взаимодействующего с турбулентным потоком жидкости. Для определения осредненного по глубине поля скорости жидкости принимаются линеаризованные уравнения Буссинеска [3], в которых учитываются зависимость среднего уклона русла от массовых сил и квадратичный закон сопротивления. Кроме того, в уравнения входит вязкое напряжение с коэффициентом турбулентного обмена. Поскольку профиль дна изменяется медленно, используются стационарные уравнения движения.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (государственный контракт № 02.740.11.0626), а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-98518-р восток(а)) и фонда ДВО РАН (код проекта 12-III-А-03-034).

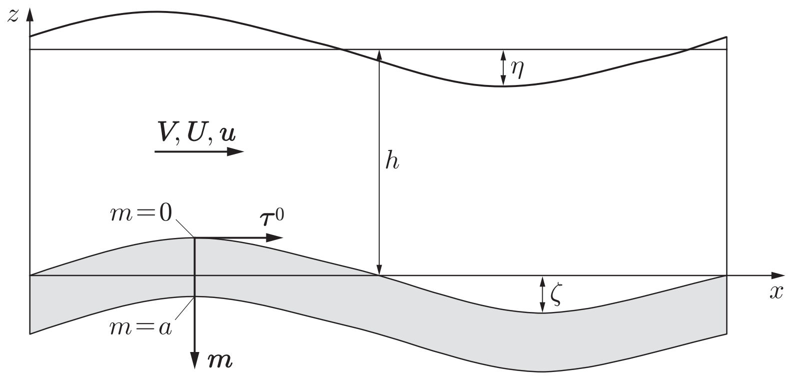

Рис. 1. Схема задачи

Особенностями данной формулировки задачи являются определение турбулентной вязкости потока $\nu_t = \nu_t(\lambda)$ как функции гидравлического сопротивления λ и учет влияния возмущений свободной поверхности потока и поправки в выражении для гидростатического давления на движение наносов.

1. Вывод уравнений гидродинамики. Рассматривается течение тяжелой несжимаемой жидкости в канале (рис. 1). Ось канала x имеет малый постоянный уклон J к горизонту. Характеристики течения зависят только от координаты x и координаты z, направленной вверх перпендикулярно оси x. Уравнения установившегося движения жидкости имеют вид

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P}{\partial x} = F_x,$$
$$U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P}{\partial z} + g = F_z, \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0.$$

Здесь U_x, U_z — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости жидкости; P — давление жидкости; ρ_w — плотность воды; F_x, F_z — диссипативные силы.

В идеальной жидкости $F_x = 0$, $F_z = 0$. Свободная $z = h + \eta(x)$ и донная $z = \zeta(x)$ поверхности представляют собой линии тока, давление на свободной поверхности является постоянным. Следовательно, граничные условия имеют вид

$$U_z(x, h+\eta) = U_x \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad U_z(x, \zeta) = U_x \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad P(x, h+\eta) = P_a, \tag{1.2}$$

где P_a — атмосферное давление на свободной поверхности потока.

2. Линеаризация и приближение Буссинеска в идеальной жидкости. Для канала прямоугольной формы ($\eta = \zeta = 0$) решением задачи (1.1), (1.2) является течение с постоянной скоростью $U_x = U$, $U_z = 0$, давление меняется по гидростатическому закону $P = P_a - \rho_w g(z - h)$. Это течение примем в качестве порождающего решения, а течение со скоростью $U_x = U + u$, $U_z = w$ при $P = P_a - \rho_w g(z - h - \eta) + p$ в канале с изменяющейся формой русла будем считать возмущенным течением. Линейная по переменным η, ζ, u, w, p задача записывается в виде

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial\,(p + \rho_w g\eta)}{\partial x} = 0, \quad U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{2.1}$$

$$w(x, h+\eta) = U \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad w(x, \zeta) = U \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad p(x, h+\eta) = 0. \tag{2.2}$$

В длинноволновом приближении функция w, являющаяся линейной функцией z, удовлетворяющей условиям (2.2), имеет вид

$$w = U\,\frac{\partial}{\partial x}\Big((\eta-\zeta)\,\frac{z}{h}+\zeta\Big).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{U}{h}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\eta-\zeta); \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = U\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big((\eta-\zeta)\,\frac{z}{h}+\zeta\Big), \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = U\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Big((\eta-\zeta)\,\frac{z}{h}+\zeta\Big).$$

Подставляя это решение во второе уравнение (2.1), получаем

$$\frac{1}{\rho_w}\,\frac{\partial p}{\partial z} = -U^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big((\eta-\zeta)\,\frac{z}{h}+\zeta\Big). \tag{2.4}$$

Интегрируя (2.4) с учетом условия (2.2) и отбрасывая нелинейные по η и ζ члены, имеем

$$\frac{p}{\rho_w} = -(z-h)U^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big((\eta-\zeta)\,\frac{z}{2h}+\frac{\eta+\zeta}{2}\Big). \tag{2.5}$$

С помощью формул $\langle z^2\rangle = h^2/3$, $\langle z\rangle = h/2$ найдем среднее по глубине давление p:

$$\frac{\langle p\rangle}{\rho_w} = \frac{1}{6}\,hU^2\,\frac{\partial^2\,(2\eta+\zeta)}{\partial x^2}. \tag{2.6}$$

С помощью (2.6) уравнения (2.1) можно представить в виде

$$U\,\frac{\partial u}{\partial x} + g\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{hU^2}{6}\,\frac{\partial^3\,(2\eta+\zeta)}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U}{h}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\eta-\zeta) = 0. \tag{2.7}$$

Интегрируя последнее уравнение по переменной x, получаем уравнение сохранения расхода

$$u + \frac{U}{h}\,(\eta-\zeta) = 0. \tag{2.8}$$

3. Турбулентное трение. В случае турбулентного течения в канале в правой части уравнений (1.1) следует учесть напряжения трения и проекцию силу тяжести на наклонную ось x:

$$F_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + gJ, \qquad F_z = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}.$$

Для канала с медленно меняющимся дном $z = \zeta(x)$ в качестве реологических соотношений, связывающих напряжения трения и скорость течения, примем уравнения пути смешения Прандтля

$$\tau_{xx} = 2\nu_t\,\frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \nu_t\Big(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}\Big), \quad \tau_{zz} = 2\nu_t\,\frac{\partial U_z}{\partial z};$$

$$\nu_t = \varkappa^2(z-\zeta+z_0)^2\Big|\frac{\partial U_x}{\partial z}\Big|, \tag{3.1}$$

где $\varkappa \approx 0{,}4$ — постоянная Кармана; z_0 — высота выступов шероховатости на дне. В реках высота выступов шероховатости превышает толщину ламинарного пограничного слоя, и поэтому учитывать его не требуется. В этом состоит отличие течений в каналах и реках от течения в гладких трубах.

В канале с плоским дном $\zeta = 0$ профиль скорости $U_x(z)$ не зависит от координаты x. Из уравнений

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + gJ = 0, \qquad \tau_{xz} = \varkappa^2 (z + z_0)^2 \Big(\frac{dU_x}{dz}\Big)^2$$

и граничных условий $U_x(0) = 0$, $\tau_{xz}(h) = 0$ находим связь уклона J и касательного напряжения T на ровном дне, а также распределение напряжения $\tau_{xz}(z)$ и форму профиля $U_x(z)$:

$$T = gJh, \quad \tau_{xz} = T - gJz, \qquad U_x(z) = \frac{\sqrt{gJ}}{\varkappa} \int\limits_0^z \frac{\sqrt{h - y}}{z_0 + y}\, dy. \tag{3.2}$$

В гидравлике используется закон квадратичного сопротивления: касательное напряжение на дне T пропорционально квадрату средней по глубине скорости потока:

$$T = \lambda U^2, \qquad U = \bar U_x = \frac{1}{h} \int\limits_0^h U_x(z)\, dz. \tag{3.3}$$

С помощью (3.2), (3.3) коэффициент квадратичного сопротивления можно выразить через высоту выступов шероховатости:

$$\lambda = \frac{T}{U^2} = \varkappa^2 \Big(\int\limits_0^1 d\xi \int\limits_0^\xi \frac{\sqrt{1 - \xi'}}{\xi_0 + \xi'}\, d\xi' \Big)^{-2}, \quad \xi_0 = \frac{z_0}{h}, \quad \xi = \frac{z}{h}.$$

При $0{,}01 < \xi_0 < 0{,}10$ функцию $\lambda = \lambda(\xi_0)$ с высокой степенью точности можно описать линейной зависимостью $\lambda = 0{,}007 + 0{,}69\xi_0$.

4. Уравнения турбулентного течения в приближении Буссинеска. С учетом турбулентного трения система уравнений (2.7), (2.8) имеет вид

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{hU^2}{6} \frac{\partial^3 (2\eta + \zeta)}{\partial x^3} = \bar F_x, \quad u + \frac{U}{h} (\eta - \zeta) = 0,$$

где $\bar F_x$ — осредненная по глубине функция F_x:

$$\bar F_x = \frac{1}{\eta + h - \zeta} \int\limits_\zeta^{h+\eta} \Big(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + gJ \Big)\, dz.$$

С учетом (2.3) подынтегральные слагаемые этого выражения с точностью до линейных членов имеют вид

$$\frac{1}{\eta + h - \zeta} \int\limits_\zeta^{h+\eta} \Big(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \Big)\, dz = -\frac{\lambda U_x^2}{h + \eta - \zeta} = -\frac{\lambda U^2}{h} - 2\, \frac{\lambda U u}{h} + \frac{\lambda U^2}{h^2} (\eta - \zeta),$$

$$\frac{1}{\eta + h - \zeta} \int\limits_\zeta^{h+\eta} \Big(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \Big)\, dz = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^h \Big(2\nu_t \frac{\partial U_x}{\partial x} \Big)\, dz = -\frac{U}{h} \frac{\partial}{\partial x} \Big(2\bar\nu_t \frac{\partial (\eta - \zeta)}{\partial x} \Big),$$

$$\frac{1}{\eta + h - \zeta} \int\limits_\zeta^{h+\eta} gJ\, dz = gJ.$$

Суммируя последние три равенства и учитывая равенство $-\lambda U^2/h+gJ=0$, получаем

$$\bar{F_x} = -2\,\frac{\lambda U u}{h} + \frac{\lambda U^2}{h^2}\,(\eta-\zeta) - \frac{U}{h}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\bar{\nu}_t\,\frac{\partial\,(\eta-\zeta)}{\partial x}\Big). \tag{4.1}$$

С помощью (3.1), (3.2) выражение для турбулентной вязкости можно записать в виде

$$\nu_t(z) = \varkappa^2(z+z_0)^2\left|\frac{\partial U_x}{\partial z}\right| = \varkappa(z+z_0)\sqrt{gJh\Big(1-\frac{z}{h}\Big)} = \varkappa(z+z_0)U\sqrt{\lambda\Big(1-\frac{z}{h}\Big)}.$$

Отсюда находим осредненную по глубине турбулентную вязкость

$$\bar{\nu}_t = \frac{4\varkappa\sqrt{\lambda}}{15}\,hU. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), получаем уравнения движения

$$\begin{gathered} U\,\frac{\partial u}{\partial x} + g\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{hU^2}{6}\,\frac{\partial^3\,(2\eta+\zeta)}{\partial x^3} = \frac{8\varkappa\sqrt{\lambda}}{15}\,hU\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\lambda\,\frac{U}{h}u + \lambda\,\frac{U^2}{h^2}\,(\eta-\zeta), \\ u = -(\eta-\zeta)U/h. \end{gathered} \tag{4.3}$$

5. Замыкание уравнений. Для замыкания системы уравнений (4.3) используется уравнение сохранения массы грунта на донной поверхности

$$(1-\varepsilon)\rho_s\,\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \tag{5.1}$$

где ε — пористость неподвижной песчаной массы на дне.

Величина расхода наносов G определяется с использованием экспериментальных данных [4, 5] либо с помощью теоретической модели движения водогрунтовой смеси в тонком придонном слое [1, 2, 6, 7]. В работах [1, 2] была предложена теоретическая модель, в которой давление вычислялось из уравнений гидростатики.

Следуя [1, 2], при определении расхода наносов G для модели движения водогрунтовой смеси в тонком придонном слое в рассматриваемом приближении Буссинеска необходимо учесть дополнительное слагаемое p (2.5), которое при $z=\zeta$ (на донной поверхности) принимает вид

$$p_\zeta = \frac{\rho_w h U^2}{2}\,\frac{\partial^2\,(\eta+\zeta)}{\partial x^2}. \tag{5.2}$$

С учетом (5.2) гидростатическое давление жидкости вблизи дна можно определить по формуле

$$P_0 = p_a - \rho_w g(p_0+\zeta-h-\eta), \tag{5.3}$$

где

$$p_0 = \frac{h^2\,\mathrm{Fr}}{2}\,\frac{\partial^2\,(\eta+\zeta)}{\partial x^2},$$

$\mathrm{Fr}=U^2/(gh)$ — число Фруда для невозмущенного потока. Наличие слагаемого p_0 в выражении (5.3) приводит к изменению вычисленной в [1, 2] величины расхода наносов.

5.1. *Система уравнений.* Введем координату x' в плоскости, касательной к донной поверхности $z=\zeta(x)$, и координату m, направленную вниз перпендикулярно касательной плоскости с началом $m=0$ на границе раздела областей переносимых и взвешенных наносов. Для давления p, плотности ρ и вектора касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}$ запишем систему уравнений приближения тонкого слоя

$$\begin{gathered}\rho = f\rho_s + (1-f)\rho_w,\\ \frac{\partial P}{\partial m} = \rho g, \qquad \frac{\partial\,(P+\rho g\zeta)}{\partial x'} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial m} = 0,\end{gathered} \tag{5.4}$$

где f — концентрация твердых частиц в жидкости. Согласно экспериментальным данным [6] $f \approx 0{,}1$.

5.2. *Реологические уравнения.* Трение водогрунтовой смеси складывается из трения водной и песчаной фаз. Абсолютная величина напряжения τ представляет собой сумму касательных напряжений водной τ_w и песчаной τ_s фаз. Направление напряжения определяется единичным вектором $\boldsymbol{e} = (\partial v/\partial m)/|\partial v/\partial m|$. Для τ_w и τ_s примем закон Прандтля для турбулентного течения и закон сухого трения Кулона. Таким образом, имеем

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\tau} = (\tau_w + \tau_s)\boldsymbol{e}, \qquad \tau_w = \rho_w \varkappa^2 (a-m)^2 \Big(\frac{\partial v}{\partial m}\Big)^2,\\ \tau_s = p_s \operatorname{tg}\varphi, \quad p_s = \rho_w g s m, \quad s = f\gamma, \quad \gamma = (\rho_s - \rho_w)/\rho_w.\end{gathered} \tag{5.5}$$

5.3. *Краевые условия.* В случае движения твердой фазы существуют область взвешенных частиц и область переносимых частиц [8, 9]. В первой области твердые частицы движутся, не соприкасаясь друг с другом, и сухое трение равно нулю. В области движения переносимых частиц справедливы уравнения (5.4), (5.5). Из условия непрерывности давления и касательного напряжения на границе раздела областей взвешенной и переносимой твердых фаз следует

$$m = 0: \qquad \tau_s = 0, \quad \tau_w = \lambda\rho_w U_x^2, \quad P = P_0. \tag{5.6}$$

Тогда $m = a$ соответствует границе раздела областей движущейся смеси и неподвижного грунта. При малой дисперсности неподвижного грунта скорость фильтрации в нем можно принять равной нулю. В области скольжения $m < a$ сухое трение удовлетворяет закону Кулона $\tau_s = p_s \operatorname{tg}\varphi$, а трение смеси согласно (5.5) равно

$$\tau = p_s \operatorname{tg}\varphi + \tau_w. \tag{5.7}$$

В неподвижной области $m > a$ трение покоя должно быть меньше порогового значения: $\tau_s < p_s(1+\Delta)\operatorname{tg}\varphi$ (величина Δ представляет собой разность значений трения покоя и трения скольжения и не превышает 0,1). В неподвижной жидкости трение равно нулю. Для касательного напряжения смеси получаем неравенство

$$\tau < p_s(1+\Delta)\operatorname{tg}\varphi. \tag{5.8}$$

Обозначим через τ_- и τ_+ предельные при $m \to a$ значения τ, определяемые по формулам (5.7), (5.8) соответственно. Из условия непрерывности $\tau_+ - \tau_- = 0$ следует неравенство

$$p_s \Delta \operatorname{tg}\varphi > \tau_w > 0.$$

Величину скачка Δ будем полагать равной нулю. Тогда условия на границе раздела областей движущейся смеси и неподвижного грунта имеют вид

$$m = a: \qquad \tau_w(a) = 0, \quad v(a) = 0, \quad \tau(a) = s\rho_w g a \operatorname{tg}\varphi. \tag{5.9}$$

Для вычисления расхода G из первого уравнения (5.4) находим давление смеси и градиент, входящий во второе уравнение (5.4):

$$P = P_0 + \rho_w g m, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\,(P + \rho g \zeta) = \frac{\partial}{\partial x}\,(\eta + s\zeta + p_0)\rho_w g.$$

Градиент не зависит от m, поэтому решение второго уравнения (5.4) линейно по m:

$$\tau(m) = \tau(0) + m\rho_w g\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\eta + s\zeta + p_0).$$

Отсюда с учетом граничных условий (5.6), (5.9) находим

$$\frac{\partial \tau}{\partial m} = \frac{\tau(a) - \tau(0)}{a} = \frac{s\rho_w g a \operatorname{tg}\varphi - \tau(0)}{a}.$$

Подставляя найденные выражения во второе уравнение (5.4), получаем уравнение для толщины слоя переносимых наносов a

$$\tau(0) = a s\rho_w g \operatorname{tg}\varphi\Big(1 + \operatorname{ctg}\varphi\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial \eta + p_0}{\partial x}\Big)\Big),$$

из которого с учетом линеаризации (5.6) $\tau(0) = \rho_w \lambda U^2(1 + 2u/U)$ определяем

$$a = a_0\Big(1 + \frac{2u}{U}\Big)\Big/\Big[1 + \operatorname{ctg}\varphi\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial\,(\eta + p_0)}{\partial x}\Big)\Big]. \qquad (5.10)$$

Здесь $a_0 = (\lambda h/\operatorname{tg}\varphi)\operatorname{Fr}/s$.

Линеаризуя (5.10), получаем

$$a = a_0\Big(1 + \frac{2u}{U} - \operatorname{ctg}\varphi\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial\,(\eta + p_0)}{\partial x}\Big)\Big). \qquad (5.11)$$

Из линейности функции $\tau_w(m)$ и граничных условий $\tau_w(0) = \lambda\rho_w U^2(1 + 2u/U_0)$ и $\tau_w(0) = 0$ следует

$$\tau_w = \lambda\rho_w U^2(1 + 2u/U)(1 - m/a).$$

Из этой формулы находим

$$-\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{\sqrt{\tau_w/\rho_w}}{\varkappa(a - m)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\varkappa}\,\frac{U + u}{a\sqrt{1 - m/a}}.$$

Расход твердых частиц в слое

$$G = \rho_s f\int\limits_0^a v(m)\,dm = -\rho_s f\int\limits_0^a m\,\frac{\partial v(m)}{\partial m}\,dm$$

определяется путем интегрирования по частям. Интеграл от функции m вычисляется точно:

$$\int\limits_0^a \frac{m\,dm}{a\sqrt{1 - m/a}} = \frac{4}{3}\,a.$$

Отсюда с учетом (5.11) получаем

$$G = G_0\Big(1 + \frac{3u}{U} - \operatorname{ctg}\varphi\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial\,(\eta + p_0)}{\partial x}\Big)\Big), \qquad (5.12)$$

где

$$G_0 = \frac{4}{3}\,\rho_s\sqrt{gh}\,h\,\frac{(\lambda\,\mathrm{Fr})^{3/2}}{\varkappa\gamma g\,\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

С использованием (5.12) уравнение для отметки дна (5.1) принимает вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = C_0\,\mathrm{Fr}^{3/2}\sqrt{gh}\,h\Big(-\frac{3\,\mathrm{tg}\,\varphi}{U}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{Fr}}{s}\,\frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^4(\eta+\zeta)}{\partial x^4}\Big), \qquad (5.13)$$

где

$$C_0 = \frac{4}{3}\,\frac{\lambda^{3/2}}{(1-\varepsilon)\varkappa\gamma g\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}. \qquad (5.14)$$

6. Линейная задача развития донных возмущений. Исключив u из уравнений (4.3), (5.13), получаем систему двух уравнений для η и ζ

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1-\mathrm{Fr}}{\mathrm{Fr}}\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\,\frac{\partial^3(2\eta+\zeta)}{\partial x^3} + \frac{8\varkappa\sqrt{\lambda}}{15}\,h\,\frac{\partial^2(\eta-\zeta)}{\partial x^2} - 3\lambda\,\frac{\eta-\zeta}{h} = 0; \qquad (6.1)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - C_0\sqrt{gh}\,h\,\mathrm{Fr}^{3/2}\Big(\frac{3\,\mathrm{tg}\,\varphi}{h}\,\frac{\partial(\eta-\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{Fr}}{s}\,\frac{h^2}{2}\,\frac{\partial^4(\eta+\zeta)}{\partial x^4}\Big) = 0. \qquad (6.2)$$

Возмущения донной и свободной поверхностей потока ζ, η выберем в виде

$$\zeta = \zeta_0 h\exp(\sigma t + ikx), \qquad \eta = \eta_0 h\exp(\sigma t + ikh), \qquad (6.3)$$

где ζ_0, η_0 — амплитудные коэффициенты; k — волновое число; σ — коэффициент амплитудного роста. Выражения для безразмерных волнового числа X и коэффициента амплитудного роста Σ имеют вид

$$X = hk, \qquad \Sigma = \frac{2s\sigma}{C_0}\sqrt{\frac{h}{g\,\mathrm{Fr}}}\,. \qquad (6.4)$$

Подставляя (6.3), (6.4) в уравнения (6.1), (6.2), находим

$$A_{11}\zeta_0 + A_{12}\eta_0 = 0, \qquad A_{21}\zeta_0 + A_{22}\eta_0 = 0, \qquad (6.5)$$

где

$$A_{11} = \Sigma - \mathrm{Fr}^2 X^4 + 6sX(3i\,\mathrm{tg}\,\varphi + X)\,\mathrm{Fr}, \quad A_{12} = 6X\,\mathrm{Fr}\,(X - 3is\,\mathrm{tg}\,\varphi) - \mathrm{Fr}^2 X^4,$$

$$A_{21} = (6iX + 8\varkappa\sqrt{\lambda}\,X^2/5 - iX^3 + 18\lambda)\,\mathrm{Fr}, \quad A_{22} = 6iX - (6iX + 18\lambda + 2iX^3 + 8\varkappa\sqrt{\lambda}\,X^2/5)\,\mathrm{Fr}\,.$$

Приравнивая к нулю определитель однородной системы (6.5), получаем кубическое уравнение

$$\Sigma = 3\,\mathrm{Fr}\,X^2(As + B)/Z, \qquad (6.6)$$

где

$$A = -10i\,\mathrm{Fr}\,X^3 + (45\,\mathrm{tg}\,\varphi - 8\sqrt{\lambda}\,\varkappa)\,\mathrm{Fr}\,X^2 + 30i(1-\mathrm{Fr})X - 90(\lambda\,\mathrm{Fr} - \mathrm{tg}\,\varphi),$$

$$B = (4\varkappa\sqrt{\lambda} + 15i)X^3\,\mathrm{Fr}^2 + (45\,\mathrm{Fr}^2\,\lambda - 8\sqrt{\lambda}\,\varkappa\,\mathrm{Fr})X^2 - 30i\,\mathrm{Fr}\,X - 90\lambda\,\mathrm{Fr},$$

$$Z = \lambda\,\mathrm{Fr}^2\,(45\sqrt{\lambda} + 4\varkappa X^2)^2 + 25X^2(\mathrm{Fr}\,X^2 - 3(1-\mathrm{Fr}))^2.$$

Выражение (6.6) для Σ позволяет получить следующие важные результаты:

— без использования дополнительных гипотез определить области формирования и смыва донных форм при различных значениях физико-механических характеристик донных материалов, определить области распространения волн на донной поверхности вниз по потоку (дюны) или против потока (антидюны) в зависимости от значений числа Фруда и волнового числа X;

— определить характерные длины волн и скорости движения донных возмущений.

7. Донные формы. Следуя [4], будем полагать, что реализуются донные волны с волновыми числами, для которых скорость роста амплитуды $\operatorname{Re}(\Sigma)$ имеет максимум, определяемый уравнением

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(\Sigma)}{\partial X} = F(X) = 0. \tag{7.1}$$

При малых волновых числах $\lambda < 10^{-4}$ решение системы (7.1) упрощается:

$$X = \sqrt{3(1 - \mathrm{Fr})/\,\mathrm{Fr}}. \tag{7.2}$$

Система (7.1) решалась численно с параметрами $s = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}01$, $\varkappa = 0{,}4$, $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$, $h = 0{,}07$ м при числах Фруда в диапазоне $s \leqslant \mathrm{Fr} \leqslant 1{,}0$. Полученные зависимости $X(\mathrm{Fr})$ и $\Sigma(\mathrm{Fr})$ представлены на рис. 2, 3. На рис. 2 показаны зависимость $X(\mathrm{Fr})$, полученная в результате численного решения уравнения (7.1) (кривая *1*), и аналитическая зависимость $X(\mathrm{Fr})$ (кривая *2*) [1], полученная для турбулентного потока с подобранной фиксированной безразмерной турбулентной вязкостью потока ($\nu_t = 0{,}215$):

$$X = \sqrt{(1 - \mathrm{Fr})P - (1 - \mathrm{Fr})^2}/(\sqrt{1+s}\,\nu_t\,\mathrm{Fr}).$$

Здесь

$$P = \sqrt{(1+s)(1 - (1 + 3\nu_t s \operatorname{tg}\varphi)\,\mathrm{Fr})}.$$

Проведено сравнение зависимостей $X(\mathrm{Fr})$ с экспериментальными данными П. Хаммана [8] и Т. Н. Казмирук [10].

Результаты сравнения выражений для волновых чисел, полученных в рамках предложенной модели и в рамках модели [1], позволяют сделать следующие выводы. Результаты расчетов по модели с постоянным специально подобранным значением турбулентной вязкости лучше согласуются с экспериментальными данными, особенно в диапазоне малых

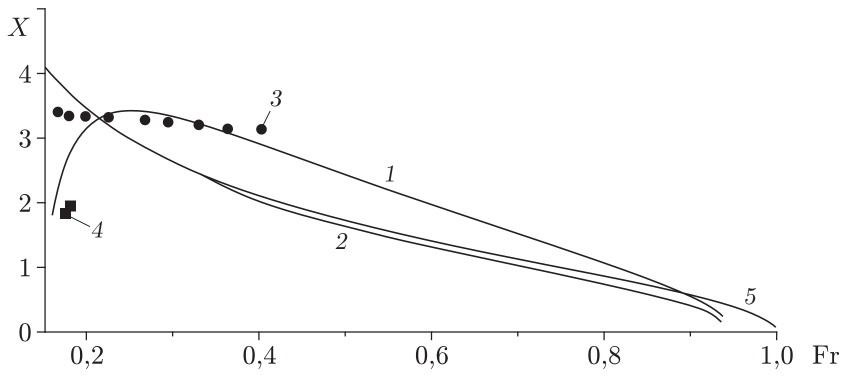

Рис. 2. Зависимость волнового числа X от числа Фруда:
1 — результаты численного решения уравнения (7.1); *2* — аналитическая зависимость [1]; *3* — экспериментальные данные [8]; *4* — экспериментальные данные [10]; *5* — асимптотическое решение (7.2)

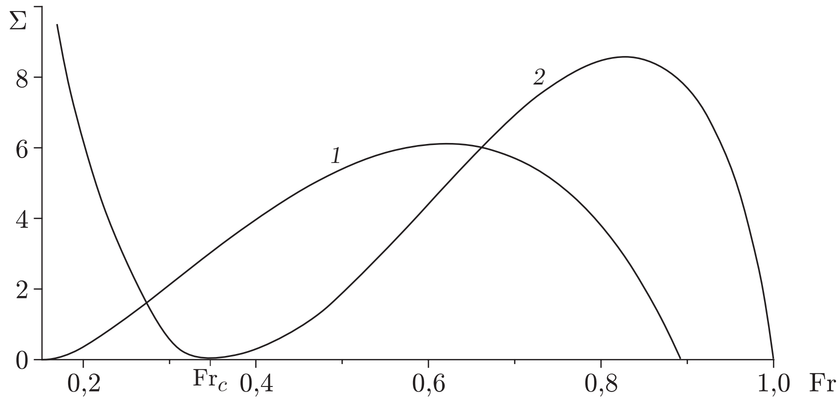

Рис. 3. Зависимость коэффициента амплитудного роста Σ от числа Фруда:
1 — численное решение рассматриваемой задачи; *2* — численное решение задачи при $\nu_t = 0{,}215$ [1] (значения Σ уменьшены в 100 раз)

чисел Фруда $s < \mathrm{Fr} < 2s$. Однако преимуществом предлагаемой модели является отсутствие в ней подбираемых эмпирических параметров. Существенное различие с экспериментальными данными в интервале малых чисел Фруда $s < \mathrm{Fr} < 2s$ обусловлено тем, что в использованном для гидродинамической модели приближении Буссинеска отсутствует механизм подавления коротковолновых возмущений.

Основной особенностью гидродинамической модели Буссинеска является наличие зоны минимального роста донных волн при числах Фруда, близких к $\mathrm{Fr}_c = 1/3$. Заметим, что в предложенной модели параметры λ, $\varkappa$, $\operatorname{tg}\varphi$ оказывают слабое влияние на значения волнового числа $X(\mathrm{Fr})$.

Очевидно, что для дальнейшего уточнения предлагаемой модели необходимо выполнить уточнение гидродинамической модели процесса.

Используя соотношение $X = 2\pi h/L$, из (7.2) найдем асимптотическую зависимость длины максимально быстро растущей донной волны L от числа Фруда

$$L = 2\pi h\sqrt{\frac{\mathrm{Fr}}{3(1-\mathrm{Fr})}} = \frac{2\pi U}{\sqrt{3(1-\mathrm{Fr})}}\sqrt{\frac{h}{g}}\,. \tag{7.3}$$

При малых числах Фруда формула (7.3) с точностью до константы согласуется с формулой Шуляка [8], полученной с использованием теории размерностей:

$$L = C_s\Big(\frac{\gamma g d^3}{\nu^2}\Big)^{0,1} U\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Здесь C_s — экспериментально определяемый параметр; d — диаметр частиц; ν — вязкость жидкости.

8. Определение скорости движения донных возмущений. Скорость движения донных возмущений определяется по формуле

$$W = -\operatorname{Im}(\sigma)h/X.$$

Используя замену $\operatorname{Im}(\sigma) = [C_0\operatorname{Im}(\Sigma)/(2s)]\sqrt{g\,\mathrm{Fr}/h}$, разложив полученное выражение в ряд по числу Фруда Fr и отбросив члены выше второго порядка, с учетом (5.14) получаем зависимость, определяющую скорость движения донных возмущений:

$$W = \frac{4\lambda^{3/2}}{\gamma\varkappa(1-\varepsilon)\operatorname{tg}\varphi}\,U\,\mathrm{Fr}\,. \tag{8.1}$$

Асимптотическая формула (8.1), справедливая при значениях скорости, существенно отличающихся от скорости трогания, совпадает с известной формулой Пушкарева [11]

$$W = 0{,}0188 U \,\mathrm{Fr}, \tag{8.2}$$

результаты расчетов по которой согласуются с экспериментальными данными [12] при $4\lambda^{3/2}/[\gamma\varkappa(1-\varepsilon)\operatorname{tg}\varphi] = 0{,}0188$. Данное равенство выполняется при средних значениях физико-механических параметров донного материала $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0{,}4$, $\varkappa = 0{,}4$, $\lambda = 0{,}0068$. Однако в реальных потоках значения физико-механических параметров (которые часто даже не фиксируются в экспериментах) могут существенно меняться, что приводит к значительным отклонениям от эмпирической зависимости (8.2). Таким образом, полученная асимптотическая формула (8.1) обобщает и уточняет известную эмпирическую формулу, что подтверждает правильность сформулированной математической модели.

Заключение. В работе сформулирована одномерная задача русловой устойчивости для песчаного дна канала прямоугольной формы относительно одномерных по пространству возмущений, не содержащая феноменологических параметров. Задача устойчивости русла решена с учетом уточненной формулы расхода наносов и зависимости турбулентной вязкости потока от гидравлического сопротивления. Для уточнения уравнения удельного расхода переносимых наносов учтено влияние возмущений свободной поверхности и поправки в выражении для гидростатического давления на перенос наносов.

Решение задачи устойчивости для линеаризованной системы уравнений позволило получить следующие важные результаты. Без использования дополнительных гипотез и феноменологических параметров в модели получены аналитические решения, позволяющие определить области формирования и смыва донных форм при различных значениях физико-механических характеристик донных материалов, согласующихся с экспериментальными данными П. Хаммана [8] и Т. Н. Казмирук [10].

Анализ полученного аналитического решения, определяющего скорость движения донных возмущений, показал, что результаты расчетов, полученные с учетом первого члена ряда в асимптотической формуле для скорости при малых числах Фруда, хорошо согласуются с результатами расчетов по аналогичной формуле для вязкой модели [1] и по известной эмпирической формуле Пушкарева. Таким образом, получено подтверждение правильности сформулированной математической модели и найденного аналитического решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Постановка и решение задачи об устойчивости несвязного дна канала // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 1. С. 62–74.
2. **Петров А. Г., Потапов И. И.** О развитии возмущений песчаного дна канала // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 2. С. 191–195.
3. **Вольцингер Н. Е.** Длинноволновая динамика прибрежной зоны / Н. Е. Вольцингер, К. А. Клеваный, Е. Н. Пелиновский. Л.: Гидрометеоиздат, 1989.
4. **Гришанин К. В.** Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
5. **Гришанин К. В.** Гидравлическое сопротивление естественных русел. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.
6. **Петров П. Г.** Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 72–75.
7. **Петров А. Г., Петров П. Г.** Вектор расходов наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 102–112.

8. **Шуляк Б. А.** Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М.: Наука, 1971.
9. **Гришанин К. В.** Динамика русловых потоков. Л.: Гидрометеоиздат, 1969.
10. **Казмирук Т. Н.** Некоторые особенности транспорта речных наносов открытым неустановившимся потоком. 1. Постановка задачи и методика исследований // Метеорология и гидрология. 2000. № 12. С. 60–70.
11. **Корчоха Ю. М.** Исследования грядового движения наносов на р. Пoлoмети // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1968. Вып. 161. С. 98–122.
12. **Пушкарев В. Ф.** Движение влекомых наносов // Тр. Гос. гидрол. ин-та. 1948. Вып. 8. С. 93–110.

Поступила в редакцию 11/XI 2011 г.,
в окончательном варианте — 5/V 2012 г.