# ОБ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

*В. Ц. Гурович, Р. К. Мазитов*

*(Новосибирск)*

Структура нелинейных волн в однородной диспергирующей среде изучена достаточно подробно [1-4]. Уравнения, описывающие нелинейные волны, допускают непрерывные периодические решения. Они соответствуют периодическим стационарным волнам. Существует также физически разумное решение с разрывом производной в одной точке. Профиль такого решения оказывается симметричным относительно точки разрыва и представляет собой уединенный импульс (уединенную волну).

В случае слабой дисперсии система уравнений сводится к одному уравнению, стационарное решение которого, соответствующее уединенной волне, было найдено еще Кортвегом — де Вризом, а нестационарное автомодельное — Ю. А. Березиным и В. И. Карпманом [4].

В работе [2] было отмечено, что учет диссипативных процессов нарушает симметрию уединенной волны и приводит к образованию затухающего цуга волн.

Ниже показывается, что аналогичная картина возникает и в отсутствие диссипации, если нелинейная волна распространяется по неоднородной среде.

1. Рассмотрим эволюцию магнитозвуковой волны, возбуждаемой в плазме магнитным поршнем. Ограничимся случаем, когда $H_0^2/8\pi \gg n_0 mc^2$, и учтем отклонение плазмы от квазинейтральности.

Система уравнений, описывающая такую волну, аналогична приведенной в [1,3] для однородного фона. Отличие появляется в нормировке магнитного поля

$$H - H_0(t) = (4\pi e n_0(0)/H_0(0))\ [\varphi - \varphi_0(t)] \qquad (1.1)$$

Здесь $H_0(t)$, $\varphi_0(t)$ — значения напряженности магнитного поля и потенциала электрического поля перед фронтом волны в произвольный момент времени; $H_0(0)$, $\varphi_0(0)$ — те же значения и момент $t = 0$; $n_0(t)$ — плотность ионов на фронте волны: $n_0(0)$ — плотность ионов в момент $t = 0$.

Зависимость $H_0$ и $\varphi_0$ от времени обусловлена неоднородностью фона. Положим

$$H_0(t) = (4\pi e n_0(0)/H_0(0))\varphi_0(t) \qquad (1.2$$

Выберем в качестве безразмерных переменных

$$q = \frac{n}{n_0(0)}, \quad u = \left(\frac{8\pi n_0(0) M}{H_0^2(0)}\right)^{1/2} v, \quad \psi = \frac{4\pi e n_0(0)}{H_0^2(0)}\varphi$$
$$\tau = \left(\frac{4\pi e^2 n_0(0)}{M}\right)^{1/2} t, \quad y = \left(\frac{4\pi e n_0(0)}{H_0(0)}\right)^{1/2} x \qquad (1.3)$$

Здесь $n$ — плотность ионов, М — масса иона. Тогда исходную систему уравнений запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial (qu)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \psi - q \qquad (1.4)$$

В неоднородной среде на достаточно большом расстоянии от поршня волна почти не зависит от начальных условий и ее можно считать автомодельной. Исходя из соображений размерности, зададим закон движения фронта волны [5]

$$\frac{dY}{d\tau} = -\frac{u_0}{1-\alpha\tau}, \qquad Y(\tau) = \frac{u_0}{\alpha}\ln|1-\alpha\tau| \qquad (1.5)$$

Здесь $\alpha$ — характеризует неоднородность среды, $u_0$ — скорость волны в момент $t = 0$.

В системе координат, движущейся вместе с фронтом волны, искомое автомодельное решение запишем в виде

$$w = \frac{W(\eta)}{1-\alpha\tau}, \qquad \psi = \frac{\Psi(\eta)}{(1-\alpha\tau)^2}, \qquad q = \frac{Q(\eta)}{(1-\alpha\tau)^2}, \qquad w = u + u_0 \qquad (1.6)$$

Здесь $\eta = y - Y(\tau)$ — автомодельная переменная. Существенно, что профили всех величин за фронтом волны не растягиваются с течением времени, изменяется только их амплитуда.

Подставив (1.6) в (1.4), получим систему уравнений для представителей $W$, $\Psi$, $Q$

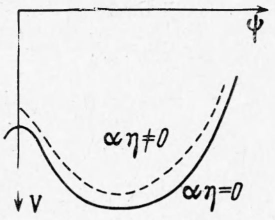
$$\alpha(W - u_0) + \frac{d}{d\eta}\left(\frac{W^2}{2} + \Psi\right) = 0, \quad 2\alpha Q + \frac{d}{d\eta}(QW) = 0, \quad \frac{d^2\Psi}{d\eta^2} - \Psi = -Q \qquad (1.7)$$

Граничные условия для $W$, $\Psi$, $Q$ зададим перед фронтом волны в точке $\eta = 0$

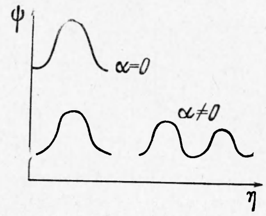
$$W(0) = 1,\ Q(0) = 1,\ \Psi(0) = 1,\ \Psi'(0) = 0 \qquad (1.8)$$

Из (1.5), (1.6), (1.8) следует, что волна распространяется по плазме с экспоненциально нарастающей плотностью $n \sim n_0(0)\exp(-2\alpha y/u_0)$ в сторону отрицательных $y$.

2. Ограничимся случаем, когда размер неоднородности значительно больше длины дисперсии ($\alpha \ll 1$). Наличие малого параметра $\alpha$ позволяет использовать особую теорию возмущений при решении системы (1.7) в интервале $0 \leqslant \eta \leqslant \alpha^{-1}$, который соответствует наиболее интересной области вблизи фронта волны.




Фиг. 1




Фиг. 2

Методом сращиваемых разложений, разработанным в [6], найдем с точностью порядка $\alpha$ приближенные интегралы первых двух уравнений системы (1.7)

$$Q = u_0 (W + 2\alpha\eta)^{-1},\quad W = [u_0^2 + 2(1 - \Psi)]^{1/2} - \alpha\eta \qquad (2.1)$$

Подставив (2.1) в третье уравнение (1.7), получим следующее уравнение для потенциала:

$$\frac{d^2\Psi}{d\eta^2} = \Psi - \frac{u_0}{[u_0^2 + 2(1-\Psi)]^{1/2} + \alpha\eta} \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.2) эквивалентно уравнению движения нелинейного осциллятора с медленно изменяющейся во времени потенциальной энергией

$$V = -{}^1/_2\,\Psi^2 - u_0\,[u_0^2 + 2(1-\Psi)]^{1/2} + u_0\alpha\eta \ln|[u_0^2 + 2(1-\Psi)]^{1/2} + \alpha\eta| \qquad (2.3)$$

Аналогия с нелинейным осциллятором позволяет установить структуру волны.

В случае однородной среды ($\alpha = 0$) движение осциллятора с бесконечным периодом (энергия $E = -u_0^2 - {}^1/_2$) соответствует уединенной волне. При наличии диссипации осциллятор совершает затухающие колебания с конечным периодом. Это означает, что за фронтом возникает затухающий цуг волн [2,4].

В случае неоднородной среды профиль потенциальной энергии $V(\Psi)$ (фиг. 1) поднимается с ростом $\eta$, что эквивалентно уменьшению энергии осциллятора.

Таким образом, неоднородность среды приводит к осцилляторной структуре волны с расстоянием между отдельными максимумами порядка длин дисперсии $\lambda = H_0/4\pi n_0 e$ (фиг. 2).

Авторы благодарят Р. З. Сагдеева за полезные советы.

Поступила 27 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы. Ядерный синтез, 1961, т. 1, стр. 82.
2. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в плазме. В сб.: «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1964, вып. 4.
3. Лонгмайр. Физика плазмы. М., Атомиздат, 1966, гл. 7.
4. Березин Ю. А., Карпман В. И. К теории нестационарных волн конечной амплитуды в разреженной плазме. ЖЭТФ, 1964, т. 46, стр. 1880.
5. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963, гл. 12.
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967, гл. 5.