О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВОДЕ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Б. В. Бошенятов, Б. И. Заславский

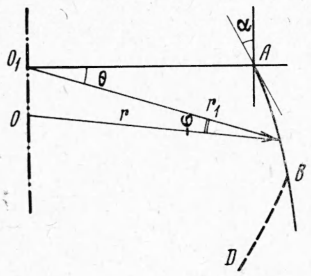
(Москва)

В рамках теории коротких волн [1,2] рассматривается задача об отражении цилиндрической ударной волны в воде от свободной поверхности. При исследовании движения существенно используются результаты, полученные в работах [2-4].

1. Пусть ударная волна возникла в результате взрыва бесконечного цилиндрического заряда, на единице длины которого выделилась некоторая энергия, характеризуемая линейным размером R_0 — «радиусом заряда». Ось заряда была расположена параллельно свободной поверхности на некоторой глубине h. Совместим ось симметрии цилиндрической системы координат r, θ с осью заряда, угол θ будем отсчитывать от плоскости, параллельной свободной поверхности. Для определения течения за фронтом ударной волны воспользуемся системой уравнений «коротких волн» [1,2]

$$\frac{\partial\mu}{\partial\tau} + (\mu - \delta)\frac{\partial\mu}{\partial\delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial y} + \frac{1}{2}\mu = 0$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial\delta} - \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Величины μ, ν, y, δ определяются равенствами

$$U = a_0M_0\mu, \qquad V = a_0M_0\sqrt{\frac{n+1}{2}M_0}\;\nu$$

$$r = a_0t\left(1 + \frac{n+1}{2}M_0\delta\right), \qquad \tau = \ln\frac{a_0t}{R_0}$$

$$\theta = y\sqrt{\frac{n+1}{2}M_0}, \qquad M_0\mu = \frac{p}{Bn}, \qquad R = \frac{r}{R_0}$$

$$b = 3045 \text{ атм}, \quad n = 7.15$$

Здесь a_0 — начальная скорость звука; U и V — проекции вектора скорости частиц на направление радиус-вектора и направление, перпендикулярное к нему; M_0 — некоторая малая величина; R — расстояние, выраженное в радиусах заряда R_0.

Из (1.1) можно получить течение, которое формируется за фронтом ударной волны в безграничной жидкости, при этом $\nu = 0$, т. е. течение одномерное [2]. Получаем

$$\delta = 2\mu + e^{-\tau}\Phi\,(\mu^2e^{\tau}) \tag{1.2}$$

Здесь Φ— произвольная функция. В дальнейшем будем предполагать, что профиль давления за ударным фронтом треугольный, тогда

$$\delta = 2\mu + Ce^{-\tau} \tag{1.3}$$

Положение ударного фронта определяется уравнением

$$\delta + \frac{\partial\delta}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)^2 \tag{1.4}$$

В одномерном случае из (1.4) и (1.3) получаем на ударном фронте

$$\mu = Ae^{-3\tau/4}, \qquad \delta = 2Ae^{-3\tau/4} + Ce^{-\tau} \qquad (A,\ C = \text{const}) \tag{1.5}$$

Из (1.5) и (1.1) следует асимптотическая формула Л. Д. Ландау [5]

$$P = kR^{-3/4} \qquad (k = \text{const}) \tag{1.6}$$

2. После выхода ударной волны на свободную поверхность волны разрежения, бегущие от точек свободной поверхности, через которые прошел ударный фронт, взаимодействуют с течением (1.3). При определении течения в области взаимодействия назовем это течение возмущенным, удобно центр системы координат O перенести на свободную поверхность в точку O_1 пересечения с перпендикуляром, опущенным из центра заряда (фиг. 1). Формулы перехода от μ, ν, y, δ, к μ_1, ν_1, y_1, δ_1 в новой системе координат имеют вид

$$\delta = ^{2\tau} + y_1y_0e^{-\tau}, \quad \nu_1 = \nu - \mu y_0e^{-\tau}, \quad y_1 = y + y_0e^{-\tau}, \quad \mu_1 = \mu \tag{2.1}$$

$$\left(y_0 = \frac{h}{R_0\sqrt{{}^1/_2\,(n+1)\,M_0}}\right)$$

Произведем следующую замену переменных и функций:

$$\delta_1 = [\delta^\circ + \delta_0(\tau)]e^{-1/2\tau}, \qquad y_1 = y^\circ e^{-\tau/4}, \qquad \mu_1 = [\mu^\circ + \mu_0(\tau)]e^{-1/2\tau} \tag{2.2}$$

$$\nu_1 = \left(\nu^\circ + 2y^\circ \frac{d\mu_0}{d\tau}\right)e^{-3/4\tau}$$

Здесь $\delta_0(\tau)$ и $\mu_0(\tau)$ — неизвестные функции времени, $\delta_0 e^{-1/2\tau}$ — значение δ_1 в точке A (фиг. 1) пересечения фронта ударной волны со свободной поверхностью, $\mu_0 e^{-1/2\tau}$ значение μ_1 в этой точке. Уравнения (1.1) после преобразований (2.2) примут вид

$$\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\tau} + \left(\mu^\circ + \mu_0 - \frac{\delta^\circ + \delta_0}{2} - \frac{d\delta_0}{d\tau}\right)\frac{\partial\mu^\circ}{\partial\delta^\circ} + \frac{1}{4}y^\circ\frac{\partial\mu^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2}\frac{\partial\nu^\circ}{\partial y^\circ} = 0$$

$$\frac{\partial\mu^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\partial\nu^\circ}{\partial\delta^\circ} = 0 \tag{2.3}$$

3. При отражении ударной волны от свободной поверхности возможны регулярные и нерегулярные отражения [3]. Последнее начинается с момента, когда волны разрежения, бегущие от свободной поверхности, догоняют ударный фронт. Пусть этот момент достигнут на расстоянии $R = R_*$ или соответственно $\tau = \tau_*$. При этом положим на фронте ударной волны

$$\mu_0(\tau_*) + \mu^\circ = 1 \tag{3.1}$$

Значение y_0 и M_0 можно выразить через τ_* [4]

$$y_0 = e^{3/4\,\tau_*}, \qquad M_0 = \frac{k}{Bn}\, e^{-1/4\,\tau_*} \tag{3.2}$$

При выводе (3.2) используются формулы (1.1), (2.1), (1.6).

В новой системе координат уравнения (1.3), (1.5) примут вид

$$\delta^\circ = 2(\mu_0 + \mu^\circ) - {}^1/_2 x^{-3} + y^\circ x^{-3/2} - {}^3/_2 x^{-1} - \delta_0(\tau) \tag{3.3}$$

$$\delta^\circ + \delta_0 = 2x^{-1/2} - {}^3/_2 x^{-1} + y^\circ x^{-3/2} - {}^1/_2 x^{-3}$$

$$\mu^\circ + \mu_0 = x^{-1/2}, \quad x = e^{1/2(\tau-\tau_*)} \tag{3.4}$$

Область возмущенного течения сопрягается с течением (3.3) по характеристической поверхности уравнений (2.3) (BD на фиг. 1). Уравнение характеристических поверхностей системы (2.3) имеет вид

$$-\frac{\partial\delta^\circ}{\partial\tau} + \left(\mu^\circ + \mu_0 - \frac{1}{2}\delta^\circ - \frac{1}{2}\delta_0 - \frac{d\delta_0}{d\tau}\right) - \frac{1}{4}y^\circ\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\right)^2 = 0 \tag{3.5}$$

Интегрируя (3.5) при условии, что искомая поверхность распространяется по (3.3) и в момент времени $\tau = \tau_*$ проходит через точку A, получаем

$$\delta^\circ = q_0(\tau)y^{\circ 2} + \chi_1^\vee(\tau)y^\circ + \chi_0^\vee(\tau) \tag{3.6}$$

$$q_0 = -{}^1/_4\,(x-1)^{-1}, \qquad \chi_1^\vee = -{}^1/_2 x^{-3/2}(x-1)$$

$$\chi_0^\vee = -{}^1/_4 x^{-3} + {}^1/_4 x^{-2} - {}^7/_4 x^{-1} + {}^7/_4 - \delta_0(\tau) \tag{3.7}$$

Точка пересечения B(фиг. 1) характеристической поверхности BD и ударного фронта отделяет участок фронта AB, искривленный влиянием свободной поверхности, от неискаженного ударного фронта. Координаты этой точки определяются из (3.4) и (3.6)

$$y_B^\circ = -x^{-3/2}(x^2 - 1) + [x^{-1}(x^2-1) - 4(x-1)(2x^{-1/2} + {}^1/_4\,x^{-1} - {}^7/_4)]^{1/2}$$

$$\delta_B^\circ = q_0 y_B^{\circ 2} + \chi_1^\vee y_B^\circ + \chi_0^\vee \tag{3.8}$$

Таким образом, решение ищется в области, ограниченной свободной поверхностью, участком ударного фронта AB и характеристической поверхностью BD. В окрестности точки A пересечения ударного фронта и свободной поверхности имеет место течение типа течения Прандтля — Майера [3], т. е. при $y^\circ \to 0$, $\delta^\circ \to 0$

$$\mu^\circ = -\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^\circ}{y^\circ}\right)^2 + \mu_0(\tau), \qquad \nu^\circ = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta^\circ}{y^\circ}\right)^3 + \nu_0(\tau) \tag{3.9}$$

Формулы (3.9) являются граничными условиями на свободной поверхности. На ударном фронте, уравнение которого в координатах δ°, y°, τ имеет вид

$$\frac{\delta_0+\delta^\circ}{2}+\frac{\partial\delta^\circ}{\partial\tau}+\frac{d\delta_0}{d\tau}+\frac{1}{4}y^\circ\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}=\frac{1}{2}(\mu_0+\mu^\circ)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\right)^2 \tag{3.10}$$

должно быть выполнено условие непрерывности составляющей вектора скорости, касательной к ударному фронту

$$(\mu^\circ+\mu_0)\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}+\nu^\circ=0 \tag{3.11}$$

Примем, что в точке A, при нерегулярном отражении угол падения ударной волны α (т. е. угол между ударным фронтом и перпендикуляром к свободной поверхности) сохраняет все время критическое значение [3, 4], т. е.

$$\alpha=\left(\frac{n+1}{2}\,\frac{p'}{Bn}\right)^{1/2}=\alpha_*{}^\circ\left(\frac{n+1}{2}\,M_0\right)^{1/2}e^{-1/4\tau} \tag{3.12}$$

Здесь p' — давление на ударном фронте в точке A.
Отсюда получаем в координатах δ°, y°, τ

$$\alpha_*{}^\circ=\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\bigg|_{y=0}=\sqrt{\mu_0(\tau)} \tag{3.13}$$

и, следовательно

$$\mu_0=\frac{d\delta_0}{d\tau}+\frac{1}{2}\delta_0 \tag{3.14}$$

На характеристической поверхности BD искомое течение должно сопрягаться с (3.3).

4. Для определения течения в области ABD воспользуемся точными частными решениями системы (2.3), найденными в работе [4]

$$\mu^\circ=\varphi_2 y^{\circ2}+\varphi_1 y^\circ+\varphi_0,\qquad \nu^\circ=\psi_3 y^{\circ3}+\psi_2 y^{\circ2}+\psi_1 y^\circ+\psi_0$$

$$\delta^\circ=qy^{\circ2}+\chi_1 y^\circ+\chi_0,\qquad \varphi_2=-{}^1/_2q^2+{}^1/_2q+z(\tau) \tag{4.1}$$

$$\psi_3=-{}^2/_3[\varphi_{2\tau}+\varphi_{2q}\,(\varphi_2-q+2q^2)+{}^1/_2\,\varphi_2-2\varphi_2 q]$$

$$\psi_2=-\varphi_{1\tau}-\varphi_{1q}\,(\varphi_2-q+2q^2)+\chi_1\varphi_2+\varphi_1 q-{}^1/_4\,\varphi_1$$

$$\psi_1=-2\varphi_{0\tau}-2\,\varphi_{0q}(\varphi_2-q+2\,q^2)+\varphi_1\chi_1,\qquad \psi_0=\varphi_1\chi_{0q}-\chi_1\varphi_{0q}$$

$$\chi_1=\int\limits_{-\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{q} w\,dq\right)dq,\quad \chi_0=\int\limits_{-\infty}^{q} v\,dq,\quad \varphi_1=\int\limits_{-\infty}^{q}\varphi_{2q}\left(\int\limits_{-\infty} w\,dq\right)dq,\quad \varphi_0=\int\limits_{-\infty}^{q}\varphi_{2q}\,v\,dq$$

Функции w, v определяются из уравнений

$$w_\tau+w_q({}^3/_2q^2-{}^1/_2q+z)+w(5q-{}^3/_4)=0$$

$$v_\tau+v_q({}^3/_2q^2-{}^1/_2q+z)+v(4q-{}^1/_2)-\chi_1\chi_{1q}=0 \tag{4.2}$$

Решения (4.1) удовлетворяют (3.9) при любых конечных значениях $z(\tau)$, $v(q,\tau)$ $w(q,\tau)$. Эти функции выберем из условия сопряжения течения (4.1) с течением (3.3) на характеристической поверхности BD, на которой $q=q_0(\tau)$.

Запишем (3.3) следующим образом:

$$\mu^\circ={}^1/_2\,qy^{\circ2}+\varphi_1{}^\nu\,y^\circ+\varphi_0{}^\nu,\quad \delta^\circ=qy^{\circ2}+\chi_1{}^\nu y^\circ+\chi_0{}^\nu \tag{4.3}$$

$$\nu=-(\mu^\circ+\mu_0)x^{-3/2}+2\mu_0{}'e^{3/4\tau_*}$$

$$\varphi_1{}^\nu=-{}^1/_4x^{-3/2}(x+1),\qquad \varphi_0{}^\nu={}^1/_8x^{-3}+{}^1/_8x^{-2}+{}^1/_8x^{-1}+{}^7/_8-\mu_0(\tau) \tag{4.4}$$

Чтобы (4.1) переходило в (4.3) на характеристике BD, функции должны удовлетворять следующим условиям:

$$\varphi_2(q_0,\tau)={}^1/_2q_0,\qquad z(\tau)={}^1/_2 l^2, \tag{4.5}$$

$$\chi_1(q_0,\tau)=\chi_1{}^\nu,\qquad \chi_0(q_0,\tau)=\chi_0{}^\nu$$

$$\varphi_1(q_0,\tau)=\varphi_1{}^\nu,\ \varphi_0(q_0,\tau)=\varphi_0{}^\nu,\qquad \psi_0(q_0\tau)=-(\varphi_0{}^\nu+\mu_0)x^{-3/2} \tag{4.6}$$

$$\psi_1(q_0,\tau)=2\mu_0{}'-\varphi_1{}^\nu x^{-3/2},\qquad \psi_2(q_0,\tau)=-{}^1/_2q_0x^{-3/2},\quad \psi_3(q_0,\tau)=0$$

Если выполнены (4.5), то (4.6) выполняются тождественно. Таким образом, задача сводится к интегрированию двух уравнений (4.2) при условии (4.5). Общее решение этих уравнений имеет вид

$$w = F_1(\eta)x^{3/2}\omega^{5/3}(\omega - 3\eta)^{10/3}$$

$$v = x\omega^{4/3}(\omega - 3\eta)^{8/3}\,[\omega^4 + 8\eta\,\omega^3 - 26\eta^2\omega^2 - 168\ \eta^3\omega + F_2(\eta)] \tag{4.7}$$

$$\eta = \omega\,\frac{1+4(x-1)q}{1+12(x-1)q},\quad \omega = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

F_1 и F_2 — произвольные функции.

Из условия (4.7)

$$z\,(\tau) = -\,{}^1\!/_2\,q_0^2,\qquad \varphi_2\,(q,\ \tau) = -\,{}^1\!/_2\,q^2 + {}^1\!/_2\,q + {}^1\!/_2\,q_0^2$$

$$\int\limits_{-\infty}^{q_0}\left(\int\limits_{-\infty}^{q_0} w\,dq\right)dq = \chi_1\,(q_0,\ \tau) = -\frac{1}{2}\,x^{-3/2}\,(x-1) \tag{4.8}$$

Отсюда находим

$$F_1 = -\,280\eta$$

$$\chi_1 = \int\limits_{-\infty}^{q}\left(\int\limits_{-\infty}^{q} w\,dq\right)dq = -\frac{(\omega+2\eta)}{2x^{1/2}\,\omega^{1/3}}\,(\omega-3\eta)^{4/3}$$

$$\varphi_1 = -\frac{(x-1)\,(2\eta+\omega)}{4x^{3/2}\,\omega^{7/3}}\,(\omega-3\eta)^{4/3} + \frac{(\eta+\omega)\,(\eta-2\omega)}{4x^{3/2}\,\omega^{7/3}}\,(\omega-3\eta)^{1/3} \tag{4.9}$$

Для определения F_2 имеем

$$\chi_0^{\nu}\,(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{q_0} \nu\,dq = \frac{13}{220}\,\omega^6 - \frac{1}{2}\,\omega^{1/3}\int\limits_{1/3\,\omega}^{0} F_2\,(\eta)\,(\omega-3\eta)^{2/3}\,d\eta \tag{4.10}$$

или, после простых преобразований

$$\int\limits_{1/3\,\omega}^{0} B\,(\eta)\,(\omega-3\eta)^{2/3}\,d\eta = 2\omega^{-1/3}\,[{}^1\!/_4\,\omega^6 - {}^1\!/_4\,\omega^4 + 2\omega^2 - \delta_0\,(\tau)] \tag{4.11}$$

$$B\,(\eta) = F_2 + {}^{1547}\!/_3\,\eta^4$$

5. Уравнение фронта ударной волны (3.10) после подстановки (3.14) примет вид

$$\frac{1}{2}\,\mu_0\,(\tau) + \frac{\partial\delta^\circ}{\partial\tau} + \frac{1}{4}\,y^\circ\,\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{1}{2}\,\mu^\circ - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta^\circ}{\partial y^\circ}\right)^2 = 0 \tag{5.1}$$

где функция $\mu_0(\tau)$ определяется из условия на фронте в точке $y^\circ = 0$

$$\delta(0,\ \tau) = 0 \tag{5.2}$$

Она может быть определена численно таким же способом, как аналогичная функция определялась в работе [4]. Если функцию $\delta_0(\tau)$, связанную с $\mu_0(\tau)$ соотношением (3.14), в интервале $\tau_0 < \tau < \tau_1$ аппроксимировать полиномом, т. е. положить

$$\delta_0 = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots$$

то функции $\varphi_0(q, \tau)$ и $\chi_0(q, \tau)$ выразятся конечными формулами, куда войдут неизвестные коэффициенты a_k, которые должны быть определены так, чтобы условие (5.2)

$$\delta(0,\ \tau) = 0$$

выполнялось возможно точнее в данном интервале.

Формулы для $\varphi_0(q, \tau)$ и $\chi_0(q, \tau)$ не приводим из-за громоздкости.

Полученное решение удовлетворяет всем граничным условиям задачи кроме условия непрерывности составляющей вектора скорости, касательной к ударному фронту (3.11). Это условие в классе частных решений (4.1) может быть удовлетворено только приближенно.

Поступила 14 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
4. Заславский Б. И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва загубленного заряда со свободной поверхностью воды. ПМТФ, 1964, № 4.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Л. Н. Маурин

(Иваново)

Рассматривается устойчивость тонкого слоя вязкой жидкости, удерживаемого силами поверхностного натяжения на поверхности бесконечного вращающегося цилиндра. Показано, что цилиндрическая фигура жидкого слоя неустойчива уже при сколь угодно медленных вращениях по отношению к длинноволновым кольцеобразным аксиально-симметричным возмущениям.

В невозмущенном движении пленки отлична от нуля только азимутальная составляющая скорости (твердое вращение)

$$V_\varphi = \Omega r, \qquad P = \frac{\rho\Omega^2 r^2}{2} - \frac{\rho\Omega^2 (R+h)^2}{2} + \frac{\alpha}{R+h} \tag{1}$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения цилиндра (направлена по оси цилиндра z), P — давление, R — радиус твердого цилиндра, h — толщина пленки, α — коэффициент поверхностного натяжения.

Пусть возмущение свободной поверхности пленки $hf(z, t)$ и возмущение течения — аксимально-симметричны

$$\begin{gathered} v_r = u(r)\, e^{ikz+\sigma t}, \qquad V_\varphi + v(r)\, e^{ikz+\sigma t} \\ v_z = w(r)\, e^{ikz+\sigma t}, \qquad p = p(r)\, e^{ikz+\sigma t} \\ R + h + hf(z, t) = R + h + h\varepsilon e^{ikz+\sigma t}, \qquad \partial(\ldots)/\partial\varphi \equiv 0, \qquad \varepsilon \ll 1 \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим линеаризованные по возмущению уравнения Навье—Стокса и неразрывности

$$\begin{gathered} \sigma u - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{d^2u}{dr^2} - k^2 u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right] \\ \sigma v + 2\Omega u = \nu\left[\frac{d^2v}{dr^2} - k^2 v + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right] \\ \sigma w = -\frac{ik}{\rho} p + \nu\left[\frac{d^2w}{dr^2} - k^2 w + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] \end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + ikw = 0 \tag{4}$$

граничные условия имеют вид

при $r = R$

$$u = v = W = 0 \tag{5}$$

на свободной поверхности

$$\sigma_{ik} n_k = -\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) n_i, \qquad v_r = \frac{d}{dt}(hf) = \frac{\partial (hf)}{\partial t} \tag{6}$$

Тензор напряжений σ_{ik} и единичный вектор n_i взяты в цилиндрической системе координат [1].

При этом $n_\varphi = 0$ в силу аксиальной симметрии возмущения, а $n_z = -hdf/dz$ — порядка величины возмущения. Выражение для главных радиусов кривизны также