УДК 532.529+532.72+533.6.011

ДИФФУЗИОННОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ И БАРОДИФФУЗИЯ ГАЗОВОЙ СМЕСИ В ПЛОСКОМ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛАХ

В. М. Жданов, Р. В. Смирнова

(*Москва*)

При вынужденном течении газовой смеси в капилляре или пористой среде в поле градиентов парциального давления компонент возникает ряд эффектов (диффузионный бароэффект [1, 2], эффект разделения смеси [3, 4] и др.), строгий анализ которых требует привлечения кинетического уравнения Больцмана. Основной целью кинетического рассмотрения является при этом получение выражений для потоков компонент смеси, усредненных по сечению канала либо отнесенных к единице поверхности пористой среды. Для каналов правильной геометрии (плоская щель, круглый цилиндрический капилляр) такая задача решалась в ряде работ [5—7] на базе линеаризованного кинетического уравнения с модельным БГК-интегралом столкновений в форме Гамеля [8]. В [9] течение смеси в плоском канале рассматривалось на основе точного линеаризованного оператора столкновений, однако последующее применение моментного метода решения ограничивалось моделью молекул — твердых шариков.

Ограниченность использованных моделей не позволяет гарантировать достаточную точность получаемых результатов, особенно в отношении таких кинетических величин, как коэффициент диффузионного скольжения или постоянная бародиффузии газовой смеси в канале. Известно, в частности [8], что никаким выбором параметров столкновения в БГК-модели для смеси не удается обеспечить одновременное адекватное описание диффузии и вязкости смеси даже в обычном гидродинамическом режиме течения.

Ниже задача о течении смеси в канале решается на основе линеаризованного кинетического уравнения с оператором столкновений в модельной форме, предложенной Мак-Кормаком [10]. Преимущество этой модели, основанной на эквивалентности моментов N порядка от точного и модельного интегралов столкновений, проявляется в том, что она автоматически дает правильное описание смеси в гидродинамическом пределе при произвольном законе взаимодействия молекул. При этом для рассматриваемого случая изотермического течения смеси удовлетворительное приближение обеспечивается уже при $N = 2$, когда определяющими моментами функции распределения, помимо плотности, среднемассовой скорости и температуры, оказываются диффузионная скорость и парциальный тензор вязких напряжений.

Используемый ниже метод решения ограничен областью малых чисел Кнудсена ($\mathrm{Kn} = \lambda/d$, где λ — эффективная средняя длина свободного пробега молекул, d — характерный поперечный размер канала). В этом случае область течения смеси в канале может быть условно разбита на две: область, удаленную от стенок, где справедливы обычные гидродинамические приближения, и тонкую пристеночную область (кнудсеновский слой), решение в которой должно рассматриваться с учетом истинных граничных условий для функции распределения на стенке канала и асимптотических условий на внешней границе слоя.

Решение задачи во внешней области дает выражение для скоростей каждой из компонент смеси в канале с некоторыми фиктивными макроскопическими граничными условиями на его стенках. Определение этих условий производится в результате решения кинетического уравнения в слое Кнудсена, для чего используется метод полных моментов.

Принятая постановка задачи тесно сближает ее с задачей об определении скорости диффузионного скольжения смеси [11—14], в связи с чем рассмотрение начинается именно с этого случая. Затем задача обобщается на случай течения смеси в плоском и цилиндрическом каналах при наличии как градиентов концентрации, так и градиента полного давления смеси. При этом показывается, в частности, что постоянная бародиффузии в выражении для разности усредненных по сечению скоростей компонент равна (с обратным знаком) коэффициенту диффузионного скольжения, что совпадает с общими выводами термодинамики необратимых процессов [15].

1. Диффузионное скольжение. Пусть газовая смесь занимает полупространство $x > 0$ над плоскостью $x = 0$. В направлении z существует градиент парциальной плотности компоненты $k_\alpha = n_\alpha^{-1} dn_\alpha/dz$, полное давление смеси p и температура T предполагаются постоянными. Вдали от стенки поддерживается постоянный градиент продольной среднемассовой скорости смеси $\partial u_z^{\mathrm{as}}(x)/\partial x$, нормальный к поверхности стенки. Для малых значений градиентов решение для функции распределения частиц α-сорта $f_\alpha(\mathbf{v}, x, z)$ можно искать в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)}(1+\Phi_\alpha),$$
$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha(z)\left(\frac{\beta_\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\exp(-\beta_\alpha \mathbf{v}^2),\quad \beta_\alpha = m_\alpha/2kT,$$

где $\Phi_\alpha(\mathbf{v}, x)$ удовлетворяет линеаризованному кинетическому уравнению [14]

$$v_z k_\alpha + v_x\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} = \sum_\beta \widehat{L}_{\alpha\beta}^{(N)}\Phi_\alpha \tag{1.1}$$

с оператором столкновений, задаваемым в форме [10]

$$\widehat{L}_{\alpha\beta}^{(2)}\Phi_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta}\Phi_\alpha + 2\left\{\gamma_{\alpha\beta}q_{\alpha z} - \left[q_{\alpha z} - \left(\frac{m_\alpha}{m_\beta}\right)^{1/2} q_{\beta z}\right]\nu_{\alpha\beta}^{(1)}\right\}c_{\alpha z} + 2\left\{\left(\gamma_{\alpha\beta} - \nu_{\alpha\beta}^{(2)}\right)\frac{\Pi_{\alpha xz}}{p_\alpha} + \nu_{\alpha\beta}^{(3)}\frac{\Pi_{\beta xz}}{p_\beta}\right\}c_{\alpha x}c_{\alpha z}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{c}_\alpha = \beta_\alpha^{1/2}\mathbf{v}$; $\gamma_{\alpha\beta}$ — некоторая эффективная частота столкновений; $q_{\alpha z} = \beta_\alpha^{1/2}u_{\alpha z}$ — безразмерная макроскопическая скорость α-компоненты; $\Pi_{\alpha xz}$ — парциальный тензор вязких напряжений; $p_\alpha = n_\alpha kT$, причем по определению

$$q_{\alpha z} = \pi^{-3/2}\int c_{\alpha z}\exp\left(-\mathbf{c}_\alpha^2\right)\Phi_\alpha d\mathbf{c}_\alpha,$$
$$\Pi_{\alpha xz} = 2p_\alpha \pi^{-3/2}\int c_{\alpha x}c_{\alpha z}\exp\left(-c_\alpha^2\right)\Phi_\alpha d\mathbf{c}_\alpha.$$

Величины $\nu_{\alpha\beta}^{(1)}, \nu_{\alpha\beta}^{(2)}$ и $\nu_{\alpha\beta}^{(3)}$ заданы выражениями

$$\nu_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{16}{3}\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha}n_\beta\Omega_{\alpha\beta}^{(11)} = \frac{n_\beta kT}{m_\alpha n[D_{\alpha\beta}]_1},$$
$$\nu_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{16}{5}\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}n_\beta\left[\frac{10}{3}\Omega_{\alpha\beta}^{11} + \frac{m_\beta}{m_\alpha}\Omega_{\alpha\beta}^{22}\right],$$
$$\nu_{\alpha\beta}^{(3)} = \frac{16}{5}\frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}n_\beta\left[\frac{10}{3}\Omega_{\alpha\beta}^{11} - \Omega_{\alpha\beta}^{22}\right],$$

где $\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$ — известные интегралы Чепмена — Каулинга [16]; $[D_{\alpha\beta}]_1$ — коэффициент взаимной диффузии α- и β-молекул (первое приближение Чепмена — Энскога [16]); $\mu_{\alpha\beta}$ — приведенная масса молекул.

Умножая уравнение (1.1) последовательно на $c_z\exp\left(-\mathbf{c}_\alpha^2\right)$ и $c_x c_z\exp\left(-\mathbf{c}_\alpha^2\right)$ и интегрируя по скоростям, приходим к уравнениям моментов вида

$$p_\alpha k_\alpha + \frac{\partial \Pi_{\alpha xz}}{\partial x} = \sum_\beta \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n[D_{\alpha\beta}]_1}(u_{\beta z} - u_{\alpha z}); \tag{1.3}$$

$$(1.4)\qquad \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\Pi_{\beta xz}}{y_{\beta}} = - y_{\beta}\beta_{\alpha}^{-1/2} \frac{\partial Q_{\alpha z}}{\partial x},$$

где

$$a_{\alpha\alpha} = \frac{y_{\alpha}}{p} \left(\nu_{\alpha\alpha}^{(2)} - \nu_{\alpha\alpha}^{(3)} + \sum_{\beta\neq\alpha} \nu_{\alpha\beta}^{(2)} \right); \quad a_{\alpha\beta} = - \frac{y_{\alpha}}{p} \nu_{\alpha\beta}^{(3)}, \quad \beta \neq \alpha.$$

Здесь $y_{\alpha} = p_{\alpha}/p$ — относительная концентрация α-компоненты, величина $Q_{\alpha z}$ определена выражением

$$(1.5)\qquad Q_{\alpha z} = 2\pi^{-3/2} \int c_{\alpha x}^2 c_{\alpha z} \exp\left(- \mathbf{c}_{\alpha}^2\right) \Phi_{\alpha} d\mathbf{c}_{\alpha}.$$

Вдали от стенки функция распределения α-компоненты должна удовлетворять известным разложениям Чепмена—Энскога [16] или Грэда [17]. При выборе модельного интеграла столкновений в форме (1.2) адекватное описание газовой смеси в этой области обеспечивается заданием f_{α} в форме 10-моментного приближения Грэда [17]

$$(1.6)\qquad f_{\alpha} = n_{\alpha} \left(\frac{\beta_{\alpha}^{3/2}}{\pi} \right) \exp\left[- \beta_{\alpha} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2\right] \left[1 + \frac{m_{\alpha}}{kT} \mathbf{w}_{\alpha} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \right.$$

$$\left. + \frac{m_{\alpha}}{kT} \frac{\Pi_{\alpha rs}}{p_{\alpha}} (v_r - u_r)(v_s - u_s) \right],$$

где $\mathbf{w}_{\alpha} = \mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}$ ($\mathbf{u}$ — среднемассовая скорость смеси). Для рассматриваемого случая медленного течения смеси линеаризация (1.6) с учетом малости величин $\beta_{\alpha}^{1/2} u_z$, $\beta_{\alpha}^{1/2} w_{\alpha z}$, $\Pi_{\alpha xz}/p_{\alpha}$ приводит к результату

$$(1.7)\qquad f_{\alpha}^{\mathrm{as}} = f_{\alpha}^{(0)} \left(1 + \Phi_{\alpha}^{\mathrm{as}}\right), \quad \Phi_{\alpha}^{\mathrm{as}} = 2 c_{\alpha z} q_{\alpha z}^{\mathrm{as}} + 2 \frac{\Pi_{\alpha xz}^{\mathrm{as}}}{p_{\alpha}} c_{\alpha x} c_{\alpha z}.$$

Подставляя (1.7) в (1.5) и интегрируя, получаем $Q_{\alpha z} = q_{\alpha z}^{\mathrm{as}}$, т. е. в этой области вместо (1.4) справедливо уравнение

$$(1.8)\qquad \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\Pi_{\beta xz}^{\mathrm{as}}}{y_{\beta}} = - y_{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha z}^{\mathrm{as}}}{\partial x}.$$

Для двухкомпонентной смеси совместное решение уравнений (1.3), (1.8) приводит к результату (α, β = 1, 2; $\alpha \neq \beta$)

$$(1.9)\qquad u_{\alpha z}^{\mathrm{as}} = u_{\alpha z}^{\mathrm{as}}(0) + \frac{\eta_{\beta}}{\eta} \left[U_{\alpha\beta}^{0} - U_{\alpha\beta}^{\mathrm{as}}(0) \right] \left[1 - \exp(- s x)\right] + \frac{\partial u_{z}^{\mathrm{as}}(x)}{\partial x} x.$$

Здесь $u_{\alpha z}^{\mathrm{as}}(0)$ — фиктивные значения макроскопических скоростей компонент на стенке, $U_{\alpha\beta}^{\mathrm{as}}(x) = u_{\alpha z}^{\mathrm{as}}(x) - u_{\beta z}^{\mathrm{as}}(x)$, кроме того,

$$(1.10)\qquad U_{\alpha\beta}^{0} = - \frac{[D_{\alpha\beta}]_1}{y_{\alpha} y_{\beta}} \frac{d y_{\alpha}}{d z}, \quad s^{-2} = \frac{y_{\alpha} y_{\beta} [D_{\alpha\beta}]_1}{p\,|a|\,\eta},$$

$$\eta_{\alpha} = y_{\alpha} \sum_{\beta=1}^{2} y_{\beta} \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|}, \quad \eta = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha},$$

где $|a|$ — определитель системы (1.8); $|a|_{\beta\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\beta\alpha}$ определителя. Заметим, что величины η_{α} совпадают по определению с парциальными коэффициентами вязкости, введенными в работе [17].

Ниже понадобится также выражение для $\Pi_{\alpha xz}^{as}$, которое следует из (1.8), (1.9)

$$(1.11)\qquad \Pi_{\alpha xz}^{as} = -\eta_\alpha \frac{\partial u_z^{as}(x)}{\partial x} - \frac{y_\alpha^2 y_\beta^2}{|a|\eta} s\left[U_{\alpha\beta}^{0} - U_{\alpha\beta}^{as}(0)\right]\exp(-sx).$$

Полученные соотношения определяют поведение основных макроскопических величин смеси вне слоя Кнудсена. Одновременно они полностью задают вид асимптотической функции распределения (1.7) на внешней границе этого слоя. Отметим, что при традиционном подходе к определению скорости диффузионного скольжения [11—14] в качестве асимптотической функции распределения используются обычно известные решения Чепмена—Энскога [16] или Грэда [17], в которых вязкие напряжения не зависят от диффузионных скоростей компонент. Фактически это соответствует определению $\Pi_{\alpha xz}$ из уравнений вида (1.8), в которых вместо $\partial u_{\alpha z}^{as}/\partial x$ фигурирует производная от среднемассовой скорости смеси $\partial u_z^{as}/\partial x$. Можно показать, что из уравнений (1.3) при этом следует $U_{\alpha\beta}^{as} = U_{\alpha\beta}^{0} = U_{\alpha\beta}^{as}(0)$. Поскольку $U_{\alpha\beta}^{as}(0)$ оказывается известной, задача сводится к определению значения среднемассовой (или среднемолярной) скорости смеси на стенке $u_z^{as}(0)$, которая и называется скоростью скольжения. В нашем случае $U_{\alpha\beta}^{as} = u_{\alpha z}^{as} - u_{\beta z}^{as}$ меняется по сечению канала, т. е., помимо $u_z^{as}(0)$, необходимо знать еще $U_{12}^{as}(0)$ или, что то же самое, независимо определять значения $u_{1z}^{as}(0)$ и $u_{2z}^{as}(0)$. Вывод соотношений типа (1.8) рассматривался в работе [18], где появление зависимости вязких напряжений от диффузионных скоростей компонент связывалось с использованием (в рамках приближения 13 моментов) разложения функции распределения относительно максвелловских значений при средней парциальной скорости компоненты смеси. Нетрудно заметить, однако, что эти соотношения следуют и из обычного 10-моментного (либо 13-моментного) приближения Грэда, если в уравнениях для $\Pi_{\alpha xz}$ работы [17] сохранить наряду с $\partial u_z/\partial x$ член вида $(2/5)\partial q_{\alpha z}/\partial x$. Действительно, поскольку в отсутствие градиента температуры (и в пренебрежении малыми термодиффузионными поправками) $q_{\alpha z} = (5/2)p_\alpha w_{\alpha z}$ [17], учет этого члена немедленно приводит к (1.8).

Обратимся к определению $u_{\alpha z}^{as}(0)$. Будем искать решение для Φ_α в виде

$$\Phi_\alpha = c_{\alpha z} h_\alpha(c_{\alpha x}, x)$$

и введем функции распределения для падающих и отраженных молекул, так что $h_\alpha = h_\alpha^+$ для $c_{\alpha x} > 0$ и $h_\alpha = h_\alpha^-$ для $c_{\alpha x} < 0$.

Задавая на стенке обычные максвелловские условия отражения молекул, имеем

$$(1.12)\qquad h_\alpha^+(c_{\alpha x}, 0) = (1-\varkappa_\alpha)h_\alpha^-(-c_{\alpha x}, 0),\ c_{\alpha x} > 0,$$

где $\varkappa_\alpha$ — доля частиц α-сорта, испытавших диффузионное отражение на стенке.

Решение для $h_\alpha^\pm$ ищется в виде разложения

$$h_\alpha^\pm = 2\sum_{k=0}^{\infty} a_{k\alpha}^\pm(x)\, c_{\alpha x}^k,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе моментных уравнений, получаемых умножением (1.1) на $c_{\alpha x}^{n}\exp\left(-c_{\alpha x}^{2}\right)$ и интегрированием по всему пространству скоростей.

Рассмотрим первое приближение ($k=0$), для которого $h_{\alpha}^{\pm}=2a_{0\alpha}^{\pm}$. В этом случае

$$q_{\alpha z}=\frac{1}{2}\left(a_{0\alpha}^{+}+a_{0\alpha}^{-}\right),\quad \Pi_{\alpha xz}=\frac{p_{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\left(a_{0\alpha}^{+}-a_{0\alpha}^{-}\right),\quad Q_{\alpha z}=q_{\alpha z}.$$

Условие на стенке $a_{0\alpha}^{+}=(1-\varkappa_{\alpha})\,a_{0\alpha}^{-}$ принимает вид

$$q_{\alpha z}(0)=-\frac{\pi^{1/2}}{2}\frac{2-\varkappa_{\alpha}}{\varkappa_{\alpha}}\frac{\Pi_{\alpha xz}(0)}{p_{\alpha}}. \tag{1.13}$$

Нетрудно убедиться, что система моментных уравнений ($n=0{,}1$) сводится в этом случае к уравнениям вида (1.3), (1.8), т. е. можно воспользоваться уже полученными решениями (1.9), (1.11), полагая $u_{\alpha}^{\mathrm{as}}(0)=u_{\alpha}(0)$ и $\Pi_{\alpha xz}^{\mathrm{as}}(0)=\Pi_{\alpha xz}(0)$. Тогда условие (1.13) приводит к системе двух алгебраических уравнений для $u_{1}^{\mathrm{as}}(0)$ и $u_{2}^{\mathrm{as}}(0)$, разрешая которые, находим

$$u_{\alpha}^{\mathrm{as}}(0)=b_{\alpha}\left[\frac{m_{\beta}^{1/2}y_{\beta}}{(m^{1/2}b)_{y}}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}U_{\alpha\beta}^{0}+\left(\frac{\pi kT}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{1+\Lambda}\left(\frac{\eta_{\alpha}}{m_{\alpha}^{1/2}p_{\alpha}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,b_{\beta}\frac{\eta}{p}\frac{\Lambda}{(m^{1/2}b)_{y}}\right)\frac{\partial u_{z}^{\mathrm{a}}(x)}{\partial x}\right] \tag{1.14}$$
$$(\alpha,\beta=1,2;\ \alpha\neq\beta),$$

где

$$\Lambda=\left(\frac{\pi kT}{2}\right)^{1/2}\frac{(m^{1/2}b)_{y}}{m_{1}^{1/2}m_{2}^{1/2}}\frac{1}{s\,[D_{12}]_{1}};\quad (m^{1/2}b)_{y}=b_{2}m_{1}^{1/2}y_{1}+b_{1}m_{2}^{1/2}y_{2};$$
$$b_{\alpha}=\frac{2-\varkappa_{\alpha}}{\varkappa_{\alpha}}\quad(\alpha=1,2).$$

Определим скорость диффузионного скольжения u_{D} как значение среднемолярной скорости смеси $u_{z}^{\mathrm{M}}=\sum\limits_{\alpha}y_{\alpha}u_{\alpha z}^{\mathrm{as}}$ при $x\to\infty$, полагая при этом $\partial u_{z}^{\mathrm{as}}(x)/\partial x=0$. Тогда

$$u_{D}=y_{1}u_{1}^{\mathrm{as}}(0)+y_{2}u_{2}^{\mathrm{as}}(0)+\frac{\eta_{2}y_{1}-\eta_{1}y_{2}}{\eta}\left[U_{12}^{0}-U_{12}^{\mathrm{as}}(0)\right].$$

Используя (1.14), после простых преобразований получаем

$$u_{D}=-\sigma_{12}y_{1}y_{2}U_{12}^{0}=\sigma_{12}D_{12}\frac{dc_{1}}{dz},\quad \sigma_{12}=\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\sigma_{12}^{k}+\frac{1}{1+\Lambda}\sigma_{12}^{b}, \tag{1.15}$$
$$\sigma_{12}^{k}=\frac{m_{1}^{1/2}b_{2}-m_{2}^{1/2}b_{1}}{(m^{1/2}b)_{y}},\quad \sigma_{12}^{b}=\frac{1}{\eta}\left(\frac{\eta_{1}}{y_{1}}-\frac{\eta_{2}}{y_{2}}\right).$$

Заметим, что σ_{12}^{k} при $b_{1}=b_{2}=1$ (полностью диффузионное отражение) соответствует коэффициенту диффузионного скольжения, полученному в [1, 11], а σ_{12}^{b} равна (с обратным знаком) постоянной бародиффузии в вязком потоке, найденной в работе [17].

Расчет скорости u_D во втором приближении ($k = 0, 1$) рассматривается в приложении.

2. Диффузия и бародиффузия смеси в канале. *Плоский канал.* Рассмотрим течение смеси в канале, ограниченном при $y = \pm d/2$ двумя бесконечными параллельными плоскостями. В направлении z, как прежде, существует градиент парциальной плотности компоненты k_α, при этом $\sum\limits_\alpha p_\alpha k_\alpha = dp/dz \neq 0$. Линеаризованное кинетическое уравнение для этого случая сохраняет вид (1.1), остаются в силе и уравнения моментов (1.3), (1.4). Для малых чисел Кнудсена решение уравнений (1.3), (1.8), справедливых в области, удаленной от стенок на расстояние порядка нескольких длин свободного пробега, приводит к соотношениям

(2.1)
$$u_{1z} = -\frac{1}{2\eta}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\frac{dp}{dz} + u_1\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{\eta_2}{\eta}\left[U_{12}^0 - U_{12}^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right)\right]\left[1 - \frac{\operatorname{ch} sy}{\operatorname{ch}(sd/2)}\right],$$
$$U_{12} = u_1 - u_2 = U_{12}^0\left[1 - \frac{\operatorname{ch} sy}{\operatorname{ch}(sd/2)}\right] + U_{12}^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right)\frac{\operatorname{ch} sy}{\operatorname{ch}(sd/2)};$$

(2.2)
$$\Pi_{1xz} = -y\frac{\eta_1}{\eta}\frac{dp}{dz} - \frac{y_1^2y_2^2}{|a|\eta}s\left[U_{12}^0 - U_{12}^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right)\right]\frac{\operatorname{sh} sy}{\operatorname{ch}(sd/2)},$$
$$\Pi_{xz} = \Pi_{1xz} + \Pi_{2xz} = -y\frac{dp}{dz},$$

где
$$U_{12}^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right) = u_1^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right) - u_2^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right);$$
$$U_{12}^0 = -\frac{[D_{12}]_1}{y_1y_2}\left[\frac{dy_1}{dz} + \alpha_p^b y_1y_2\frac{1}{p}\frac{dp}{dz}\right]; \quad \alpha_p^b = -\sigma_{12}^b.$$

Введем переменную $x = y + d/2$ и рассмотрим поведение величин (2.1), (2.2) вблизи нижней стенки при $x \sim \delta$, где δ — эффективная толщина кнудсеновского слоя. Заметим, что величина s имеет порядок обратной длины свободного пробега, т. е. $sd \gg 1$. Используя условие $\delta/d \ll 1$, получаем, что выражения (2.1), (2.2) на внешней границе кнудсеновского слоя переходят в выражения (1.9), (1.11), которые использовались в задаче о скольжении, если заменить при этом $(-d/2\eta)dp/dz$ на $\partial u_z^{\text{as}}(x)/\partial x$. Тогда задача об определении $u_{\alpha z}^{\text{as}}(d/2)$ сводится к рассмотренной выше и можно воспользоваться уже полученными результатами.

Найдем выражение для среднемолярной скорости в канале. Усредняя u_{1z} и u_{2z} по сечению канала, имеем

$$\langle u\rangle_z^{\text{м}} = -\frac{d^2}{12\eta}\frac{dp}{dz} + y_1u_{1z}^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right) + y_2u_{2z}^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{\eta_2y_1 - \eta_1y_2}{\eta}\left[U_{12}^0 - U_{12}^{\text{as}}\left(\frac{d}{2}\right)\right].$$

Используя результаты, соответствующие первому приближению моментного метода (выражение (1.14)), после несложных преобразований находим

$$\langle u\rangle_z^{\text{м}} = -\left(\frac{d^2}{12\eta} + Bd\right)\frac{dp}{dz} - \sigma_{12}y_1y_2U_{12}^0,$$

где

$$B = \frac{1}{2\eta^2}\left(\frac{\pi kT}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{1+\Lambda}\left(b_1\frac{\eta_1^2}{m_1^{1/2}p_1} + b_2\frac{\eta_2^2}{m_2^{1/2}p_2} + b_1b_2\frac{\eta^2}{p}\frac{\Lambda}{(m^{1/2}b)}\right),$$

σ_{12} определяется выражением (1.15). При этом в окончательном выражении опущены члены $\sim (sd)^{-1}$ по сравнению с единицей.

Представляет также интерес выражение для разности усредненных по сечению скоростей компонент смеси. Используя (2.1) и пренебрегая после усреднения членами $\sim (sd)^{-1}$ по сравнению с единицей, находим

$$\langle u \rangle_{1z} - \langle u \rangle_{2z} = U_{12}^0 + U_{12}^{\mathrm{as}}\left(\frac{d}{2}\right)\frac{2}{sd}.$$

Использование (1.14) с заменой $\partial u_z^{\mathrm{as}}(x)/\partial x$ на $\left(-d/2\eta\right)\frac{dp}{dz}$ дает

$$U_{12}^{\mathrm{as}}\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{\Lambda}{1+\Lambda}\left[U_{12}^0 + \frac{sd}{2}[D_{12}]_1\alpha_p^* \frac{1}{p}\frac{dp}{dz}\right],$$

где

$$\alpha_p^* = \alpha_p^b + \alpha_p^k, \quad \alpha_p^k = -\sigma_{12}^k.$$

В результате имеем

$$\langle u \rangle_{1z} - \langle u \rangle_{2z} = U_{12}^0 + \frac{\Lambda}{1+\Lambda}[D_{12}]_1\alpha_p^* \frac{1}{p}\frac{dp}{dz} = -\frac{[D_{12}]_1}{y_1 y_2}\left[\frac{dy_1}{dz} + \alpha_p y_1 y_2 \frac{1}{p}\frac{dp}{dz}\right], \tag{2.3}$$

где $\alpha_p = \frac{\Lambda}{1+\Lambda}\alpha_p^k + \frac{1}{1+\Lambda}\alpha_p^b$.

Таким образом, постоянная бародиффузии в выражении для разности усредненных по сечению скоростей компонент оказалась равной (с обратным знаком) коэффициенту диффузионного скольжения (или коэффициенту при градиенте концентрации в выражении для среднемолярной скорости смеси). Заметим, что этот результат находится в соответствии с выводами термодинамики необратимых процессов [15], где σ_{12} и α_p оказываются перекрестными коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям Онзагера. Проведенный выше анализ объясняет также, почему значение α_p отличается от постоянной бародиффузии в вязком потоке α_p^b, вычисленной в работе [17]. Хотя использованное в этой работе приближение 13 моментов Грэда позволило учесть влияние вязкого переноса импульса на диффузию (что привело к отличию α_p^b от значений, даваемых первым приближением метода Чепмена—Энскога [16]), соотношения для $\Pi_{\alpha xz}$ брались при этом в обычной форме, не зависящей от диффузионных скоростей компонент. Как уже отмечалось, это приводит к условию $U_{12} = U_{12}^{\mathrm{as}}\left(\frac{d}{2}\right) = U_{12}^0$, и последующее усреднение по сечению канала не меняет результата. Полученное выше выражение для разности усредненных скоростей содержит наряду с U_{12}^0 член $\sim (sd)^{-1}U_{12}^{\mathrm{as}}\left(\frac{d}{2}\right)$. В отсутствие градиента полного давления $U_{12}^{\mathrm{as}}\left(\frac{d}{2}\right) \sim U_{12}^0$, и этим членом можно пренебречь. Однако в общем случае $U_{12}^{\mathrm{as}}\left(\frac{d}{2}\right)$ содержит член, пропорциональный $sdp^{-1}(dp/dz)$, который и дает вклад в разность $\langle u \rangle_{1z} - \langle u \rangle_{2z}$, сравнимый с вкладом от бародиффузионного члена в U_{12}^0.

Цилиндрический канал. Рассмотрим течение смеси в круглом цилиндрическом канале радиуса R (ось z направлена вдоль оси цилиндра). Уравнения моментов в цилиндрической системе координат принимают вид

$$p_\alpha k_\alpha + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_{\alpha rz}) = \sum_\beta \frac{n_\alpha n_\beta kT}{n[D_{\alpha\beta}]_1}(u_{\beta z} - u_{\alpha z}); \tag{2.4}$$

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta}\frac{\Pi_{\beta rz}}{y_\beta} = -y_\alpha\beta_\alpha^{-1/2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_{\alpha z}) - \frac{1}{r}q_{\alpha z}\right]. \tag{2.5}$$

Вдали от стенки $Q_{\alpha z} = q_{\alpha z}$ уравнение (2.5) переходит в

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta}\frac{\Pi_{\beta rz}}{y_\beta} = -y_\alpha\frac{\partial}{\partial r}(ru_{\alpha z}). \tag{2.6}$$

Для двухкомпонентной смеси совместное решение уравнений (2.4), (2.6) дает

$$u_{1z} = -\frac{1}{4\eta}\frac{dp}{dz}(R^2 - r^2) + u_{1z}^{\mathrm{as}}(R) + \frac{\eta_2}{\eta_1}\left[U_{12}^0 - U_{12}^{\mathrm{as}}(R)\right]\left[1 - \frac{I_0(sr)}{I_0(sR)}\right],$$

$$U_{12} = U_{12}^0\left[1 - \frac{I_0(sr)}{I_0(sR)}\right] + U_{12}^{\mathrm{as}}(R)\frac{I_0(sr)}{I_0(sR)}; \tag{2.7}$$

$$\Pi_{1xz} = -\frac{r}{2}\frac{\eta_1}{\eta}\frac{dp}{dz} - \frac{y_1^2y_2^2}{|a|\eta}s\left[U_{12}^0 - U_{12}^{\mathrm{as}}(R)\right]\frac{I_1(sr)}{I_0(sR)}, \tag{2.8}$$

$$\Pi_{xz} = \Pi_{1xz} + \Pi_{2xz} = -\frac{r}{2}\frac{dp}{dz},$$

где $I_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

В пристеночном слое толщиной $\delta \ll R$ уравнения (2.4), (2.5) можно заменить уравнениями (1.3), (1.4). Можно показать также, что выражения (2.7), (2.8) на внешней границе кнудсеновского слоя переходят в (1.9)—(1.11). Таким образом, и в этом случае задача об определении $U_{12}^{\mathrm{as}}(R)$ сводится к рассмотренной выше задаче о скольжении смеси на плоской стенке. Усредняя выражения для $u_{1z}(r)$ и $u_{2z}(r)$ по сечению канала и используя для $u_{\alpha z}^{\mathrm{as}}(R)$ значения (1.14) с заменой $\partial u_z^{\mathrm{as}}(x)/\partial x$ на $(R/2\eta)dp/dz$, находим

$$\langle u\rangle_z^{\mathrm{M}} = -\left(\frac{R^2}{8\eta} + BR\right)\frac{dp}{dz} - \sigma_{12}y_1y_2U_{12}^0.$$

Выражение для $\langle u_{1z}\rangle - \langle u_{2z}\rangle$ сохраняет вид (2.3), как и в задаче о течении в плоском канале, т. е. постоянная бародиффузии $\alpha_p = -\sigma_{12}$ оказывается не зависящей от геометрии канала.

3. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом. Сравнение полученных выше значений σ_{12} (или α_p) с результатами, найденными другими методами, удобно провести на примере смеси с малой относительной разницей масс и поперечников рассеяния молекул компонент. Для модели молекул — твердых шариков — выражение для σ_{12} можно представить в виде

$$\sigma_{12} = a\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} - b\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} - c\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}, \tag{3.1}$$

где m_α и d_α — масса и эффективный диаметр молекул α-сорта. В (3.1) учтена также возможность небольших отличий в характере взаимодействия молекул разного сорта со стенкой. В табл. 1 приводятся значения

Таблица 1

Коэффициенты \ Методика расчета	Элементарное рассмотрение [1]	Приближение 13 моментов [12]	Вариационный метод [14,19]		Метод полупространственных моментов [9, 15]	Данная работа		БГК-модель			Эмпирическая формула [22]
			первое приближение	второе приближение		первое приближение	второе приближение	метод полных моментов [7]	метод полупространственных моментов [5,13,20]	вариационный метод [6,21]	
a	1,00	1,14	1,07	1,29	0,946	1,06	1,05	0,735 0,688	0,700 0,651	0,750 0,688	0,95
b	0	0,068	0,750	0,598	1,0	0,753	0,850	1,06 0,753	1,18 0,838	1,00 0,750	1,05
c	2,00	1,93	2,00	1,90	2,0	0,995	0,924	0,940 0,995	0,667 0,717	1,00 1,00	

a, b и c, вычисленные на основании общих выражений для σ_{12}, полученных различными методами. При этом для случая БГК-модели эффективные частоты столкновений $\gamma_{\alpha\alpha}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$ задавались в виде

$$\gamma_{\alpha\alpha} = Ad_\alpha^2 \left(\frac{\pi kT}{m_\alpha}\right)^{1/2} n_\alpha, \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{8}{3} d_{\alpha\beta}^2 \left(\frac{2\pi kT}{\mu_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} n_\beta, \quad d_{\alpha\beta} = (d_\alpha + d_\beta)/2,$$

где $A = 16/3$ и $16/5$ (первая и вторая строка соответственно), что соответствует обычно принимаемому выбору этих величин [13, 7]. Для $A = 16/3$ значения a, b и c практически не зависят от концентрации, для $A = 16/5$ в табл. 1 приведены значения, соответствующие $y_1 = y_2 = 0{,}5$. Использование тех же модельных параметров при расчете второго приближения для модели Мак-Кормака (данная работа*) показало, что для 50% смеси результаты оказываются практически нечувствительными к выбору параметров модели. Это подтверждается также расчетами для случая, когда $\gamma_{\alpha\alpha}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$ заданы в форме, предложенной в [10] для модели третьего порядка. Два приближения вариационного метода соответствуют результатам работы [14] без учета и с учетом поправок порядка термодиффузионной постоянной (учет этих поправок в нашей схеме соответствовал бы использованию модели Мак-Кормака при $N = 3$). В последнем столбце табл. 1 даются эмпирические значения a и b, полученные в результате обработки экспериментальных данных по диффузиофорезу масляных капель в неоднородной по концентрации газовой смеси [22].

Из приведенных результатов следует, что различные методы расчета дают довольно близкие значения коэффициента a, хотя БГК-модель кажется в этом отношении менее удовлетворительной. Более чувствительным к выбранному приближению оказывается коэффициент b, при этом методы, не принимающие во внимание изменение функции распределения в кнудсеновском слое [1, 12], дают резко отличающиеся результаты.

Отметим, что результаты данной работы и расчеты, основанные на БГК-модели, приводят к более слабой зависимости от различий в коэффициентах отражения на стенке.

Обращает на себя внимание близость результатов первых приближений данной работы и вариационного метода. Анализ общего выражения $\sigma_{12}^{(v)}$ работы [14] показывает, что в пренебрежении термодиффузионными

* Результаты первого приближения, как видно из (1.15), вообще не зависят от произвольных параметров модели.

Таблица 2

Смесь	Экспериментальные данные	Вариационный метод [19] ($b_1=b_2=1$)	Данная работа			
			$b_1=b_2=1$		$b_1\neq b_2$	
			первое приближение	второе приближение	первое приближение	второе приближение
N_2—C_2H_4	0,073 [22] 0,04 [2]	0,10	0,11	0,12	0,093	0,10
CO_2—C_3H_8	0,11 [22]	0,11	0,12	0,13	—	—
Ar—CO_2	0,026 [2]	0,031	0,040	0,050	0,034	0,044

поправками соответствующее выражение для σ_{12} (при $b_1 = b_2 = 1$) в наших обозначениях имеет вид

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^{(v)} + \frac{m_1 - m_2}{(m)_y} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{12}^k + \sigma_{12}^b\right).$$

С другой стороны, параметр Λ в формуле (1.15) меняется для произвольных отношений масс и концентраций компонентов в пределах 0,88—1,15. Для изотопной смеси $\Lambda = (5\pi)^{1/2}/4 = 0{,}99$, что и объясняет отмеченную близость результатов.

Следует заметить, что для реальных потенциалов взаимодействия молекул термодиффузионные поправки оказываются, как правило, заметно меньшими, чем для модели шариков, поэтому использование второго приближения метода моментов может оказаться в некоторых случаях более существенным, чем учет таких поправок.

Широкое сравнение экспериментальных и расчетных значений σ_{12} для ряда смесей выполнено в [19, 21]. При этом использовались главным образом результаты по диффузиофорезу взвешенных частиц [22] и измерения диффузионного бароэффекта [2,20]. В пределах точности экспериментальных данных результаты расчетов σ_{12} (как и расчеты на основе вариационного метода [14]) находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом. Особый интерес представляют смеси с очень близкими массами молекул компонент (N_2 — C_2H_4, CO_2 — C_3H_8, Ar — CO_2). Для таких смесей направление движения частиц при диффузиофорезе, а также диффузионный бароэффект (возникновение разности давлений при течении через капилляр неоднородной по концентрации газовой смеси) имеют знак, противоположный тому, который предсказывается элементарной теорией [1]. В табл. 2 показано, что результаты расчета значений σ_{12} для трех смесей удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. При расчетах использовались параметры взаимодействия молекул, описываемые потенциалом Леннарда—Джонса. Количественное согласие с экспериментом можно улучшить, предполагая наличие разницы в характере отражения молекул от стенки. В двух последних строках табл. 2 приведены значения σ_{12} в первом и втором приближении, при расчете которых использовались экспериментальные значения $K = b_1/b_2$, найденные в [4] по результатам измерений эффекта разделения смесей N_2 —C_2H_4 ($K = 1{,}035$) и Ar — CO_2 ($K = 1{,}011$) при молекулярном течении этих смесей в круглых цилиндрических капиллярах (Kn $\gg 1$).

Эксперименты по разделению смеси в другой предельной области (Kn $\ll 1$) могут быть в принципе использованы и для определения постоянной бародиффузии α_p [12, 23]. К сожалению, результаты работы [4] не распространялись в область достаточно малых чисел Кнудсена. Тем не менее наблюдаемое изменение знака эффекта для смеси N_2 — C_2H_4

при Kn ~ 1 и порядок величины эффекта при Kn < 1 удовлетворительно согласуются с расчетами, использующими значения $\alpha_p = -\sigma_{12}$. Аналогичное изменение знака, не наблюдавшееся в [4], следует ожидать при Kn < 1 и на смеси Ar — CO_2, на что уже обращалось внимание в работе [23].

Приложение. Приведем расчет скорости диффузионного скольжения во втором приближении ($k = 0{,}1$), когда $h_\alpha^{\pm} = 2\left(a_{0\alpha}^{\pm} + a_{1\alpha}^{\pm} c_{\alpha x}\right)$. Вместо уравнений для коэффициентов $a_{0\alpha}^{\pm}$ и $a_{1\alpha}^{\pm}$ удобно по-прежнему иметь дело с системой уравнений для моментов $M_\alpha^{(n)}$, которые определены в виде

$$M_\alpha^{(n)} = \pi^{-1/2}\left[\int_{-\infty}^{0} c_{\alpha x}^n h_\alpha^{-}(x, c_{\alpha x}) \exp\left(-c_{\alpha x}^2\right) dc_{\alpha x} + \int_0^\infty c_{\alpha x}^n h_\alpha^{+}(x, c_{\alpha x}) \exp\left(-c_{\alpha x}^2\right) dc_{\alpha x}\right].$$

При этом к уравнениям моментов (1.3), (1.4), в которых $q_{\alpha z} = \frac{1}{2} M_\alpha^{(0)}$, $\Pi_{\alpha z} = p_\alpha M_\alpha^{(1)}$ и $Q_{\alpha z} = M_\alpha^{(2)}$, добавляются еще два уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(M_\alpha - \frac{\Pi_{\alpha xz}}{p_\alpha}\right) = 2\beta_\alpha^{1/2}\gamma_\alpha (q_{\alpha z} - Q_{\alpha z}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(q_{\alpha z} - Q_{\alpha z}) = \frac{1}{2}\beta_\alpha^{1/2}\gamma_\alpha\left(M_\alpha - 3\frac{\Pi_{\alpha xz}}{p_\alpha}\right),$$

где $M_\alpha = 2M_\alpha^{(3)}$; $\gamma_\alpha = \gamma_{\alpha\alpha} + \gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$.

Условие (1.12) приводит к следующим соотношениям для моментов на стенке $(x = 0)$:

(П.1) $$(4 - \pi) q_{\alpha z}(0) + b_\alpha \pi^{1/2} \frac{\Pi_{\alpha xz}(0)}{p_\alpha} - (2 - \pi) Q_{\alpha z}(0) = 0,$$

$$2\pi^{1/2} q_{\alpha z}(0) - b_\alpha (4 - 3\pi)\frac{\Pi_{\alpha xz}(0)}{p_\alpha} + b_\alpha (2 - \pi) M_\alpha(0) = 0.$$

В результате для определения $q_{\alpha z}$, $Q_{\alpha z}$, $\Pi_{\alpha xz}$ и $M_\alpha (\alpha = 1{,}2)$ имеем систему восьми уравнений с граничными условиями (П.1) и условиями ограниченности искомых функций при $x \to \infty$. Эта система решается сведением ее к уравнению восьмого порядка относительно $Q_{\alpha z}$. Получаемые при этом результаты для случая $\partial u_z^{0s}(x)/\partial x = 0$ можно представить в виде

(П.2) $$Q_{1z} = \beta_1^{1/2}\eta_2 \sum_{k=1}^{3} C_k \exp(-\lambda_k x) + \beta_1^{1/2} A^* U_{12}^0,$$

$$Q_{2z} = -\beta_2^{1/2}\eta_1 \sum_{k=1}^{3} C_k \exp(-\lambda_k x) + \beta_2^{1/2}(A^* - 1) U_{12}^0,$$

$$\Pi_{1xz} = -\Pi_{2xz} = g\eta \sum_{k=1}^{2} C_k \lambda_k \exp(-\lambda_k x),$$

$$q_{\alpha z} = Q_{\alpha z} - \frac{D^*\eta}{\bar{\rho}_\alpha \gamma_\alpha^2} \sum_{k=1}^{3} C_k \lambda_k^2 f_{\alpha k} \exp(-\lambda_k x),$$

$$M_\alpha = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{2D^*\eta}{\beta_\alpha \gamma_\alpha^3} \lambda_k^2 f_{\alpha k} - (-1)^\alpha \frac{3g\eta}{p_\alpha} \right) C_k \lambda_k \exp(-\lambda_k x), \ \alpha = 1, 2,$$

где $g = s^{-2}D$; $D^* = \dfrac{1}{s^2(\beta_2\gamma_2^2 - \beta_1\gamma_1^2)}$; $D = \dfrac{p_1 p_2}{p[D_{12}]_1}$;

$$f_{\alpha k} = \lambda_k^4 - \beta_\beta\gamma_\beta^2\lambda_k^2 - D\left[\gamma^*\lambda_k^2 + \left(\frac{\beta_\alpha\gamma_\alpha^3}{p_\alpha} + \frac{\beta_\beta\gamma_\beta^3}{p_\beta} - \gamma^*\beta_\beta\gamma_\beta^2\right)\right];$$

$$\lambda^* = \gamma_\alpha/p_\alpha + \gamma_\beta/p_\beta + 1/g \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \beta \neq \alpha).$$

При этом λ_k являются положительными корнями уравнения

$$\lambda^6 - Z_1\lambda^4 + Z_2\lambda^2 - Z_3 = 0,$$

где $Z_1 = D\gamma^* + \beta_1\gamma_1^2 + \beta_2\gamma_2^2$, $Z_2 = D\left[\dfrac{\beta_1\gamma_1^2\gamma_2}{p_2} + \dfrac{\beta_2\gamma_2^2\gamma_1}{p_1}\right] +$

$$+ s^2(\beta_2\gamma_2^2 + \beta_1\gamma_1^2) + \beta_1^2\beta_2^2\gamma_1^2\gamma_2^2, \ Z_3 = s^2\beta_1\beta_2\gamma_1^2\gamma_2^2.$$

Подставляя в (П.2) граничные условия (П.1), приходим к системе четырех линейных алгебраических уравнений для C_1, C_2, C_3 и A^*. Можно заметить, что для определения скорости диффузионного скольжения u_D достаточно найти постоянную A^*. Действительно,

$$u_D = \lim_{x\to\infty} (\beta_1^{-1/2} y_1 q_{1z} + \beta_2^{-1/2} y_2 q_{2z}) = (A^* - y_2) U_{12}^0$$

или

$$\sigma_{12} = \frac{y_2 - A^*}{y_1 y_2}.$$

Из-за громоздкости выражение для A^*, записываемое с помощью соответствующих определителей четвертого порядка, здесь не приводится. Результаты конкретных расчетов σ_{12} в первом и втором приближении для некоторых частных случаев приводятся в табл. 1, 2.

Поступила 19 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kramers H. A., Kistemaker J.** On the slip of a diffusing gas mixture along a wall.— «Physica», 1943, vol. 10, p. 699.
2. **Waldmann L., Schmitt K. H.** Über das bei der Gasdiffusion auftretende Druckgafälle.— «Z. Naturforsch.», 1961, Bd 16, S. 1343.
3. **Present R. D., de Bethune A. T.** Separation of a gas mixture flowing through a long tube at low pressure.— «Phys. Rev.», 1949, vol. 75, p. 1050.
4. **Huggil J.** The flow of gases through capillaries.— «Proc. Roy. Soc.», 1952, vol. 212A, p. 123.
5. **Lang H.** Zur Theorie der Gegendiffusion von verdünkten Gases in einem engen Spalt.— «Z. Angew. Math. und Mech.», 1968, vol. 48, T. 208.
6. **Shendalman L. H.** Low-speed transport of gas mixtures in long cylindrical tubes according to the BGK model.— «J. Chem. Phys.», 1969, vol. 51, p. 2483.
7. **Суетин П. Е., Скакун С. Г., Черняк В. Г.** Бароэффект при произвольных числах Кнудсена.— ЖТФ, 1972, т. XLII, с. 642.
8. **Hamel B. B.** Kinetic model for binary gas mixtures.— «Phys. Fluids», 1965, vol. 8, p. 418.
9. **Breton J. P.** Interdiffusion of gases through porous media-effect of molecular interaction.— «Phys. Fluids», 1965, vol. 8, p. 418.

10. **McCormack F. J.** Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases.— «Phys. Fluids», 1973, vol. 16, p. 2095.
11. **Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э.** Скольжение и температурный скачок на границе газовой смеси.— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1758.
12. **Жданов В. М.** К теории скольжения на границе газовой смеси.— ЖТФ, 1967, т. XXXVII, с. 192.
13. **Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.** О диффузионном скольжении бинарной газовой смеси.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1971, № 4, с. 22.
14. **Loyalka S. K.** Velocity slip coefficient and the diffusion slip velocity for a multicomponent gas mixture.— «Phys. Fluids», 1971, vol. 14, p. 2599.
15. **Breton J. P.** The diffusion equation in discontinuous systems.— «Physica», 1970, vol. 50, p. 365.
16. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ, 1960.
17. **Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А.** Влияние вязкого переноса импульса на диффузию газовой смеси.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 857.
18. **Маркеев Б. М.** К вопросу о вязком переносе импульса в газовой смеси.— ЖТФ, 1974, т. XLIV, с. 1550.
19. **Lang H., Loyalka S. K.** Diffusion slip velocity: theory and experiment.— «Z. Naturforsch.», 1972, Bd 27a, S. 1307.
20. **Lang H., Eger K.** Über die Gasdiffusion in engen Kapillaren.— «Z. Physik. Chem.», 1969, Bd 68, S. 130.
21. **Почуев Н. Д., Селезнев В. Д., Суетин П. Е.** Течение бинарной газовой смеси при произвольной аккомодации тангенциального импульса.— ПМТФ, 1974, № 5, с. 37.
22. **Schmitt K. H., Waldmann L.** Untersuchen an Schwebstoffteilchen in diffundieren Gasen.— «Z. Naturforsch.», 1960, Bd 15a, S. 843.
23. **Селезнев В. Д., Суетин П. Е., Смирнов Н. А.** Разделение бинарной газовой смеси во всем диапазоне чисел Кнудсена. — ЖТФ, 1975, т. XLV, с. 1499.

УДК 536.24:532.54

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

С. Г. Иванушкин, В. И. Кондрашов, В. Е. Томилов

(*Томск*)

В последнее время интерес исследователей вызывают задачи активного воздействия (механического, акустического или электромагнитного —для проводящей среды) на течение, имеющие целью интенсификацию теплообмена [1]. К механическим методам воздействия относится применение пульсирующих потоков теплоносителей для увеличения теплосъема в термических начальных участках каналов при ламинарном неустановившемся течении вязкой несжимаемой жидкости.

В данной работе исследуется возможность интенсификации теплообмена изменением частоты и амплитуды пульсаций градиента давления в кольцевых каналах, поскольку в настоящее время в ряде работ [2—5] имеются противоречивые сведения по указанному вопросу. Выбор кольцевого канала объясняется широким распространением в технике теплообменных устройств, образованных двумя коаксиальными цилиндрами, а также отсутствием теоретических и экспериментальных работ по теплопередаче при пульсирующем течении в каналах такой формы. В отличие от известных работ задача решается в сопряженной постановке, которая наиболее полно отражает реальные нестационарные тепловые процессы при течении вязкой жидкости в термических начальных участках, когда условия на поверхностях раздела сред заранее неизвестны и температуры в стенках и жидкости должны определяться совместно [6, 7]. Учтено влияние диссипативной функции и осевой теплопроводности как в жидкости, так и в стен-